

**NELSON DE SOUZA AMORIM  
FERNANDO MANUEL ARAÚJO MOREIRA  
CARLOS CÉLIO SOUSA DA CRUZ  
UBIRAEALSON DE LIMA RUELA  
PAULA RENATHA NUNES DA SILVA  
JOSÉ ROBERTO BRANCO RAMOS FILHO  
VICENTE MOREIRA RODRIGUES  
THIAGO AUGUSTO DE SOUSA MOREIRA  
GILSON FERNANDES BRAGA JUNIOR  
ESTEFANY COUTO MILÉO  
(ORGANIZADORES)**

# **ANAIS DO XIV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE ENGENHARIA FÍSICA**



**Atena**  
Editora

Ano 2020

**NELSON DE SOUZA AMORIM  
FERNANDO MANUEL ARAÚJO MOREIRA  
CARLOS CÉLIO SOUSA DA CRUZ  
UBIRAEALSON DE LIMA RUELA  
PAULA RENATHA NUNES DA SILVA  
JOSÉ ROBERTO BRANCO RAMOS FILHO  
VICENTE MOREIRA RODRIGUES  
THIAGO AUGUSTO DE SOUSA MOREIRA  
GILSON FERNANDES BRAGA JUNIOR  
ESTEFANY COUTO MILÉO  
(ORGANIZADORES)**

# **ANAIS DO XIV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE ENGENHARIA FÍSICA**



**Atena**  
Editora

Ano 2020

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

**Diagramação:** Geraldo Alves

**Edição de Arte:** Lorena Prestes

**Revisão:** Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa

Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia

Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá

Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima

Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões

Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie di Maria Ausiliatrice

Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense

Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão

Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará

Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste

Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador

Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano

Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás

Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná

Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia  
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

### **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília  
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília  
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande  
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

### **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás  
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Msc. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
Prof. Dr. Adailson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Profª Msc. Bianca Camargo Martins – UniCesumar  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Msc. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Profª Msc. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil  
 Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita  
 Prof. Msc. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária  
 Prof. Msc. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná  
 Prof<sup>a</sup> Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
 Prof. Msc. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco  
 Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
 Prof<sup>a</sup> Msc. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará  
 Prof<sup>a</sup> Msc. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ  
 Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás  
 Prof. Msc. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados  
 Prof. Msc. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual de Maringá  
 Prof. Msc. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados  
 Prof<sup>a</sup> Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
 Prof<sup>a</sup> Msc. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo  
 Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)</b> <b>(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
S612a	<p>           Simpósio Brasileiro de Engenharia Física (14 : 2019 : Santarém)            Anais [...] / XIV Simpósio Brasileiro de Engenharia Física, 23-25            outubro 2019, Santarém, PA; organizadores Nelson de Souza            Amorim... [et al.]. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.         </p> <p>           Formato: PDF            Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader            Modo de acesso: World Wide Web            ISBN 978-65-86002-15-7            DOI 10.22533/at.ed.157200203         </p> <p>           1. Engenharia física – Congressos. I. Título.         </p> <p style="text-align: right;">CDD 573.724</p>
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
 Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

## APRESENTAÇÃO

O curso de Engenharia Física da Universidade Federal de São Carlos foi criado no ano 1999 e foi pioneiro nesta área no Brasil. No ano de 2019, o curso de engenharia física no Brasil completou 20 anos. Nesse contexto, a Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e a Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPa) promoveram o XIV Simpósio Brasileiro de Engenharia Física que foi realizado na cidade de Santarém-PA no período de 23 a 25 de Outubro de 2019 na Universidade Federal do Oeste do Pará – Campus Tapajós com o tema “Jubileu de 20 anos da Engenharia Física no Brasil”.

Com a proposta de promover o conhecimento científico e inovação tecnológica bem como a integração entre especialistas, docentes e discentes da área, foram discutidos os 20 anos de existência do curso no Brasil e o intercâmbio de informações técnicas-científicas através de minicursos e palestras relacionados as diferentes temáticas da Engenharia Física e suas perspectivas futuras.

A coleção Anais do XIV Simpósio Brasileiro de Engenharia Física é uma obra que tem como objetivo divulgar os diversos trabalhos que participaram do evento através de trabalhos acadêmicos que abordaram diferentes temas, tais como: termodinâmica, propriedades dielétricas de materiais, ciência dos dados e machine learning, internet das coisas, deep learning, processos oxidativos avançados, energia solar, gerenciamento de projetos, física quântica e automação. Deste modo a obra contribui para disseminar os resultados obtidos pelos acadêmicos e fortalecer a diversidade científica no país, de forma multidisciplinar.

Comitê Organizador

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
A IMPORTÂNCIA DO REALIMENTADOR NA EFICIÊNCIA DE UM CICLO DE RANKINE UTILIZANDO O EES	
Muller Gabriel da Silva Chaves Carlos Eduardo Ribeiro Silva Vitor Azevedo Pinto Carlos Célio Sousa da Cruz	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1572002031</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>11</b>
ANÁLISE TEÓRICA DAS PROPRIEDADES DIELÉTRICAS DA MACAÚBA ( <i>Acrocomia acuelata</i> )	
Alex Torres da Silva Nelson de Souza Amorim	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1572002032</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>19</b>
APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE DATA SCIENCE E MACHINE LEARNING EM UM PROBLEMA DE CLASSIFICAÇÃO DE UM DATASET DE MARKETING BANCÁRIO	
Yasmin Braga Teixeira João Vitor Rebelo Viana Josecley Fialho Góes Anderson Alvarenga de Moura Meneses	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1572002033</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>28</b>
AQUISIÇÃO DE DADOS DO CONSUMO ELÉTRICO EM UMA EDIFICAÇÃO DA UFOPA UTILIZANDO CONCEITOS DE IOT	
Leonardo Paz Amoêdo Dalton Felipe Silva Varão João Elias Brasil Bentes Júnior Anderson Alvarenga de Moura Meneses	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1572002034</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>37</b>
DEEP LEARNING PARA REGRESSÃO DE POTÊNCIA ELÉTRICA DE UMA USINA DE ENERGIA DE CICLO COMBINADO	
Mauro Sérgio dos Santos Moura Anderson Alvarenga de Moura Meneses	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1572002035</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>46</b>
DEGRADAÇÃO DE CORANTES EM MEIO AQUOSO EMPREGANDO DIÓXIDO DE TITÂNIO NA FORMA DE FILMES FINOS PREPARADOS SOBRE SUBSTRATO CERÂMICO COMERCIAL	
Graziele Daiana Sena de Sousa Adriano Cesar Rabelo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1572002036</b>	

<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>59</b>
FATORES CRÍTICOS QUE INTERFEREM NO GERENCIAMENTO DO TEMPO EM PROJETOS DE ENGENHARIA: ESTUDO DE CASO EM SANTARÉM – PA	
Raíssa Coelho Almeida Kevin de Matos Costa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1572002037</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>70</b>
OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON-FOCK EM COORDENADAS DO CONE DE LUZ	
Jorge Kysnney Santos Kamassury Damião Pedro Meira Filho Sérgio Antônio de Souza Farias Natalie Von Paraski	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1572002038</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>83</b>
RÁPIDO RECONHECIMENTO DE MODULAÇÕES ANALÓGICAS E DIGITAIS VIA REDES RESIDUAIS PROFUNDAS	
Jorge Kysnney Santos Kamassury Vinícius Felipe de Oliveira da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1572002039</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>98</b>
REVISÃO DE LITERATURA SOBRE A AUTOMAÇÃO NO ENSINO DE FÍSICA NO BRASIL	
Davi Henrique da Silva Pedroso Gabriel Gonçalves da Silva Gilson Fernandes Braga Junior	
<b>DOI 10.22533/at.ed.15720020310</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>109</b>
DIAGNÓSTICO DOS MICROSSISTEMAS DE ENERGIA SOLAR FOTOVOLTAICO INSTALADOS NAS COMUNIDADES RURAIS DO MUNICÍPIO DE SANTARÉM	
Fabiane da Conceição Almeida Manoel Roberval Pimentel Santos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.15720020311</b>	
<b>SOBRE OS ORGANIZADORES</b> .....	<b>119</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO</b> .....	<b>121</b>



## OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON-FOCK EM COORDENADAS DO CONE DE LUZ

Data de aceite: 27/01/2020

### Jorge Kysnney Santos Kamassury

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC,  
Centro Tecnológico - CTC  
Florianópolis – Santa Catarina  
<http://lattes.cnpq.br/1350512148935889>

### Damião Pedro Meira Filho

Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia do Pará - IFPA  
Santarém – Pará  
<http://lattes.cnpq.br/2267580178817640>

### Sérgio Antônio de Souza Farias

Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA,  
Instituto de Ciências da Educação - ICED  
Santarém – Pará  
<http://lattes.cnpq.br/8423926486006264>

### Natalie Von Paraski

Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia do Pará - IFPA  
Santarém – Pará  
<http://lattes.cnpq.br/5662091583286508>

**RESUMO:** O presente trabalho apresenta os passos e as considerações físico-matemáticas necessárias para a obtenção da famosa equação quântica relativística de Klein-Gordon-Fock (KGF) fazendo uso das coordenadas do cone de luz. Na abordagem proposta, destacamos inicialmente algumas propriedades

algébricas da Teoria da Relatividade Restrita assim como apresentamos resumidamente as coordenadas do cone de luz em termos das coordenadas  $(t, x)$ , isto é, do espaço-tempo de Minkowski. Em seguida, calculamos a equação de KGF tanto em coordenadas usuais do espaço-tempo de Minkowski quanto em coordenadas do cone de luz. Ademais, considerando essas últimas coordenadas, obtemos com detalhes a equação diferencial de KGF para uma partícula quântica eletricamente carregada em regime de relatividade restrita e sob influência de um campo eletromagnético clássico geral. Por fim, alcançamos a equação de KGF com estrutura análoga a uma equação de Schrödinger. A abordagem desenvolvida no texto apresenta assim as vantagens do formalismo das coordenadas do cone de luz para os estudos dos fenômenos relativísticos tão úteis nas pesquisas contemporâneas da Física de Partículas Elementares e Campos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Equação de Klein-Gordon-Fock; Coordenadas do Cone de Luz; Campo eletromagnético clássico.

### OBTAINING THE KLEIN-GORDON-FOCK EQUATION IN LIGHT CONE COORDINATES

**ABSTRACT:** The present work presents the steps and the physical-mathematical considerations necessary to obtain the famous

Klein-Gordon-Fock (KGF) relativistic quantum equation using the light cone coordinates. In the proposed approach, we first highlight some algebraic properties of the Theory of Constrained Relativity as well as briefly present the cone of light coordinates in terms of the coordinates  $(t, \mathbf{x})$ , that is, of Minkowski spacetime. We then calculate the KGF equation in both the usual Minkowski spacetime coordinates and the cone of light coordinates. Moreover, considering these latter coordinates, we obtain in detail the differential equation of KGF for an electrically charged quantum particle in a restricted relativity regime and under the influence of a general classical electromagnetic field. Finally, we reach the KGF equation with structure analogous to a Schrödinger equation. The approach developed in the text thus presents the advantages of the cone of light coordinate formalism for the study of relativistic phenomena so useful in contemporary research in Elementary and Field Particle Physics.

**KEYWORDS:** Klein-Gordon-Fock Equation; Coordinates of the Cone of Light; Classical Electromagnetic Field.

## 1 | INTRODUÇÃO

Reconhecidamente uma das principais indagações que emergem quando estudamos mudanças de coordenadas é qual a vantagem de tal abordagem, ou seja, qual o interesse físico e/ou matemático em promover uma mudança de coordenadas e quais as suas implicações.

Matematicamente, por exemplo, a simples mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares/esféricas tem seu apelo por facilitar consideravelmente a descrição de sistemas simétricos. Sob esse enfoque, a mudança de coordenadas do espaço-tempo de Minkowski para as coordenadas do cone de luz também tem sua utilidade. Naturalmente, a física é inalterável, porém a descrição analítica e a compreensão de fenômenos relativísticos tornam-se mais fáceis (SALES, SUZUKI e SORIANO, 2015). De fato, as coordenadas do cone de luz são bastante úteis, por exemplo, no estudo de colisões relativísticas, em especial, para eventos onde a velocidade relativa é muito próxima da velocidade da luz.

Embasado nesse contexto, apresentamos no presente trabalho um exemplo detalhado de como realizar a mudança de coordenadas do espaço-tempo de Minkowski para as coordenadas do cone de luz. Para tal propósito, usaremos a famosa equação quântica relativística de Klein-Gordon.

A equação de Klein-Gordon foi originalmente proposta em 1926 pelo físico sueco Oskar Klein (KLEIN, 1926) e o físico alemão Walter Gordon (GORDON, 1926) para descrever elétrons relativísticos. Muitas vezes essa equação também é chamada de equação de Klein-Gordon-Fock (KGF) devido à contribuição do físico soviético Vladimir Fock (FOCK, 1926). Apesar de não ser bem-sucedida ao abordar os elétrons em condições relativísticas, a equação de KGF sob a interpretação de

Feynman-Stueckelberg permite-nos, por exemplo, descrever o comportamento das partículas com spin 0, como os mésons ( $\pi$  e  $\eta$ ) e assim abordar certos campos bosônicos (MEIRA FILHO e KAMASSURY, 2018).

Além de calcularmos a equação de KGF em coordenadas do cone de luz, estendemos nossa abordagem e obtemos com detalhes a equação diferencial de KGF para uma partícula quântica eletricamente carregada em regime de relatividade restrita e sob influência de um campo eletromagnético clássico geral. Por fim, alcançamos a equação de KGF com estrutura análoga a uma equação de Schroedinger.

## 2 | ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

O espaço quadridimensional de Minkowski é um espaço-tempo plano e, portanto, de curvatura nula e é definido por coordenadas contravariantes  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  e covariantes  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ . Estas coordenadas (contravariantes e covariantes) relacionam-se com o parâmetro temporal  $t$  e com as coordenadas cartesianas em três dimensões  $(x, y, z)$  da seguinte forma

$$\begin{cases} x^0 = c \cdot t = +x_0 \\ x^1 = x = -x_1 \\ x^2 = y = -x_2 \\ x^3 = z = -x_3 \end{cases}$$

onde a constante  $c$  representa a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética no vácuo.

Considerando as variações infinitesimais dessas coordenadas, temos:

$$\begin{cases} dx^0 = c \cdot dt = +dx_0 \\ dx^1 = dx = -dx_1 \\ dx^2 = dy = -dx_2 \\ dx^3 = dz = -dx_3 \end{cases}$$

De modo geral, sabe-se que as características e peculiaridades de um determinado espaço-tempo podem ser obtidas através de seu elemento de linha que, por sua vez, é invariante sob transformações específicas desse espaço-tempo, a exemplo das transformações de Lorentz (INVERNO, 1992). Nesse sentido, para um espaço-tempo quadridimensional genérico, o seu respectivo elemento de linha pode ser expresso por

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \quad (1)$$

onde  $g_{\alpha\beta}$  representa as componentes do tensor métrico do referido espaço tempo (MEIRA FILHO e KAMASSURY, 2018).

Sabendo que o tensor métrico pode ser aplicado para baixar e elevar índices, conforme as expressões

$$x^\alpha = \sum_{\beta=0}^3 g^{\alpha\beta} x_\beta \quad (2)$$

$$x_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 g_{\alpha\beta} x^\beta \quad (3)$$

e considerando o espaço-tempo de Minkowski, temos

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

para o qual vale a seguinte propriedade:

$$\sum_{\mu=0}^3 \eta_{\alpha\mu} \eta^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta \quad (5)$$

Isto posto, a equação (1) pode ser reescrita como se segue:

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (6)$$

De fato, ainda é possível escrever os operadores diferenciais no espaço quadridimensional

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \partial^\alpha \quad (7)$$

assim como o operador d'Alembertiano:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (8)$$

Para efeitos de simplificação, podemos utilizar um subespaço bidimensional ( $z$  e  $ct$ ) cujo elemento de linha é dado por

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dz)^2 \quad (9)$$

e o diagrama do cone de luz é ilustrado na Figura 1, no qual, o elemento de

linha (ou a distância no espaço-tempo) é classificado como:

- Distância tipo-tempo  $(ds)^2 > 0$ : associada à dinâmica espaço-temporal de estruturas massivas, as quais, propagam-se com velocidade  $|\vec{v}| < c$ . Os eventos que são separados por uma distância tipo-tempo são ditos *eventos com relação causal*;
- Distância tipo-espaço  $(ds)^2 < 0$ : associada à dinâmica espaço-temporal de estruturas que se propagam com  $|\vec{v}| > c$ . Eventos separados pela distância tipo-espaço são denominados de *eventos sem relação causal*;
- Distância tipo-luz  $(ds)^2 = 0$ : associada à dinâmica de ondas eletromagnéticas que se propagam no vácuo com  $|\vec{v}| = c$ .

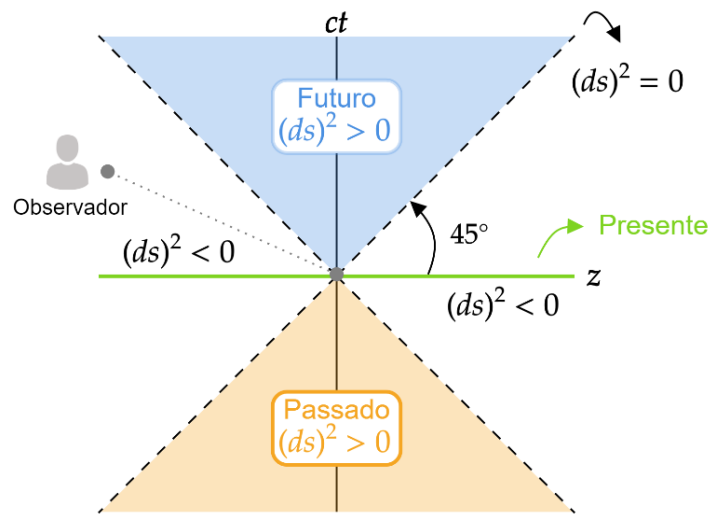


Figura 1: Diagrama do cone de luz

Fonte: Autores

Consideremos as coordenadas do cone de luz conforme apresentado na Figura 2. Relacionando as coordenadas do cone de luz ( $u^0$  e  $u^3$ ) com as coordenadas ( $z$  e  $x^0 = ct$ ), alcançamos:

$$u^0 = +z \cos(45^\circ) + x^0 \sin(45^\circ) = \frac{x^0 + z}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

$$u^3 = -z \cos(45^\circ) + x^0 \sin(45^\circ) = \frac{x^0 - z}{\sqrt{2}} \quad (11)$$

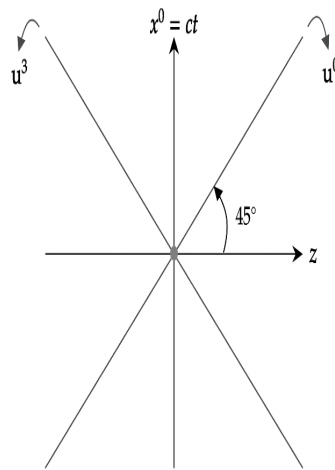


Figura 2: Coordenadas do cone de luz

Fonte: Autores

Nesse sentido, generalizando para quatro dimensões, obtemos as coordenadas no espaço-tempo de Minkowski

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (12)$$

e as coordenadas do cone de luz:

$$\begin{aligned} u^\mu &= (u^0, u^1, u^2, u^3) \\ &= \left( \frac{x^0 + z}{\sqrt{2}}, x, y, \frac{x^0 - z}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \left( \frac{ct + z}{\sqrt{2}}, x, y, \frac{ct - z}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

### 3 I EQUAÇÃO DE KGF PARA UMA PARTÍCULA LIVRE EM COORDENADAS CARTESIANAS

Seja o espaço-tempo quadridimensional (plano e de curvatura nula) descrito na seção anterior, os passos iniciais para a obtenção da equação de KGF para uma partícula livre nas coordenadas  $(x, y, z, ct)$  correspondem ao uso da expressão da energia relativística para partícula livre dada por

$$\sum_{\mu=0}^3 p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$$

e da seguinte estrutura de operador diferencial quântico para o momento linear

quadridimensional:

$$\begin{cases} \hat{p}^\mu = i\hbar \partial / \partial x_\mu = i\hbar \partial^\mu \\ \hat{p}_\mu = i\hbar \partial / \partial x^\mu = i\hbar \partial_\mu \end{cases}$$

Desse modo, a partir da aplicação da relação operacional sobre as funções de onda  $\Psi$ , obtemos a expressão

$$\sum_{\mu=0}^3 \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = m_0^2 c^2 \Psi \quad (14)$$

que consiste em uma equação de onda quântica em regime relativístico para partícula livre de spin zero e é tradicionalmente denominada como *equação de Klein-Gordon-Fock*.

Reescrevendo a equação (14) como se segue

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (15)$$

e considerando a métrica dada na equação (4), alcançamos

$$\partial_0 \partial_0 \Psi - \partial_1 \partial_1 \Psi - \partial_2 \partial_2 \Psi - \partial_3 \partial_3 \Psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0$$

ou, alternativamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \\ \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Na literatura, essa última expressão é conhecida como a equação de KGF para uma partícula livre em coordenadas cartesianas.

#### 4 | EQUAÇÃO DE KGF PARA UMA PARTÍCULA LIVRE EM COORDENADAS DO CONE DE LUZ

Considerando as coordenadas curvilíneas generalizadas  $u^\mu$  em termos das coordenadas cartesianas  $x^\mu$ , a equação de KGF para uma partícula quântica livre e relativística pode ser escrita como

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \left( \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu - i \sum_{\alpha=0}^3 \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \tilde{p}_\alpha \right) \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \quad (17)$$

sendo o tensor métrico  $\tilde{g}^{\mu\nu}$ , dado por

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta}$$

o símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  (CHRISTOFFEL, 1869) expresso por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} (\partial_\alpha \tilde{g}_{\nu\beta} + \partial_\beta \tilde{g}_{\nu\alpha} - \partial_\nu \tilde{g}_{\alpha\beta}) \quad (18)$$

e o termo  $\tilde{p}_\mu$  como:

$$\tilde{p}_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial u^\mu}$$

Fazendo uso das relações expressas em (13) e sabendo que as componentes não-nulas da métrica  $\eta^{\mu\nu}$  são

$$\eta^{00} = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33} = 1$$

obtemos

$$\begin{aligned} g^{00} &= g^{01} = g^{02} = g^{10} = g^{12} = g^{13} = g^{20} \\ &= g^{21} = g^{23} = g^{31} = g^{32} = g^{33} = 0 \end{aligned}$$

e

$$g^{03} = -g^{11} = -g^{22} = g^{30} = 1$$

Nesse caso, podemos concluir que os componentes do símbolo de Christoffel são todos nulos, isto é

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0$$

o que nos possibilita reescrever a equação (17) como:

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \quad (19)$$

Considerando novamente as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas do cone de luz, verifica-se as seguintes relações entre os operadores



diferenciais:

- Para a coordenada  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u^1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u^1} = \frac{\partial}{\partial u^1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial u^1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\partial}{\partial u^1} \right) = \frac{\partial^2}{\partial u^{12}}$$

- Para a coordenada  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u^2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial u^2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\partial}{\partial u^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial u^{22}}$$

- Para a coordenada  $x^0 = ct$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial u^0}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\partial u^3}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^3} \right] \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^3} \right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial u^{02}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} + \frac{\partial^2}{\partial u^{32}} \right]$$

- Para a coordenada  $z$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial u^0}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{32}} = \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^3} \right] \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^3} \right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{32}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial u^{02}} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} + \frac{\partial^2}{\partial u^{32}} \right]$$

Isto posto, podemos substituir as relações dos operadores diferenciais em coordenadas do cone de luz na equação (19) como se segue

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^{0^2}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} + \frac{\partial^2}{\partial u^{3^2}} \right) \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{1^2}} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{2^2}} - \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^{0^2}} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} + \frac{\partial^2}{\partial u^{3^2}} \right) \Psi = - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \end{aligned}$$

alcançando a expressão

$$2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^0 \partial u^3} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{1^2}} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{2^2}} = - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \quad (20)$$

ou de forma equivalente:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u^0} = \left( \frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{1^2}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{2^2}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \right) \right] \quad (21)$$

A expressão (21) representa a equação de KGF para partícula livre escrita em termos das coordenadas do cone de luz. Alternativamente, é possível reescrever a equação de KGF de modo algebricamente similar à famosa equação de Schroedinger (BAGROV, BUCHBINDER e GITMAN, 1976)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u^0} = \hat{H} \Psi \quad (22)$$

sendo o operador do tipo hamiltoniano  $\hat{H}$  dado por:

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial u^{2^2}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right)$$

## 5 | EQUAÇÃO DE KGF PARA UMA PARTÍCULA CARREGADA SUBMETIDA A CAMPO ELETROMAGNÉTICO EM COORDENADAS DO CONE DE LUZ

Generalizando a equação (17) para o caso de uma partícula quântica eletricamente carregada de spin-zero, em regime relativístico e sob influência de um campo eletromagnético clássico, temos

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \left( \tilde{P}_\mu \tilde{P}_\nu - i \sum_{\alpha=0}^3 \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \tilde{p}_\alpha \right) \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \quad (23)$$

onde o termo  $\tilde{P}_\mu$  é dado por:

$$\tilde{P}_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial u^\mu} - \frac{q}{c} \tilde{A}_\mu$$

Usando os resultados apresentados na secção 4, pode-se alcançar:

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{P}_\mu \tilde{P}_\nu \Psi = m_0^2 c^2 \Psi$$

Nesse caso, verifica-se que

$$(\tilde{g}^{00} \tilde{P}_0 \tilde{P}_3 + \tilde{g}^{11} \tilde{P}_1 \tilde{P}_1 + \tilde{g}^{22} \tilde{P}_2 \tilde{P}_2 + \tilde{g}^{30} \tilde{P}_3 \tilde{P}_0) \Psi = m_0^2 c^2 \Psi$$

de modo que

$$(\tilde{P}_0 \tilde{P}_3 + \tilde{P}_3 \tilde{P}_0) \Psi = (\tilde{P}_1 \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 \tilde{P}_2 + m_0^2 c^2) \Psi \quad (24)$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= i\hbar \frac{\partial}{\partial u^0} - \frac{q}{c} \tilde{A}_0, & \tilde{P}_1 &= i\hbar \frac{\partial}{\partial u^1} - \frac{q}{c} \tilde{A}_1 \\ \tilde{P}_2 &= i\hbar \frac{\partial}{\partial u^2} - \frac{q}{c} \tilde{A}_2, & \tilde{P}_3 &= i\hbar \frac{\partial}{\partial u^3} - \frac{q}{c} \tilde{A}_3 \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 \tilde{P}_3 \Psi &= \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial u^0} - \frac{q}{c} \tilde{A}_3 \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial u^3} - \frac{q}{c} \tilde{A}_0 \right) \Psi \\ &= (i\hbar)^2 \frac{\partial}{\partial u^0} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u^3} \right) - i\hbar \frac{q}{c} \left( \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial u^0} \right) \Psi - i\hbar \frac{q}{c} \tilde{A}_3 \frac{\partial \Psi}{\partial u^0} \\ &\quad - i\hbar \frac{q}{c} \tilde{A}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial u^3} + \frac{q^2}{c^2} \tilde{A}_0 \tilde{A}_3 \Psi \end{aligned} \quad (25)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{P}_3 \tilde{P}_0 \Psi &= \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial u^3} - \frac{q}{c} \tilde{A}_3 \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial u^0} - \frac{q}{c} \tilde{A}_0 \right) \Psi \\ &= (i\hbar)^2 \frac{\partial}{\partial u^3} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u^0} \right) - i\hbar \frac{q}{c} \left( \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial u^3} \right) \Psi - i\hbar \frac{q}{c} \tilde{A}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial u^3} \\ &\quad - i\hbar \frac{q}{c} \tilde{A}_3 \frac{\partial \Psi}{\partial u^0} + \frac{q^2}{c^2} \tilde{A}_3 \tilde{A}_0 \Psi \end{aligned} \quad (26)$$

A partir das equações (25) e (26), reescrevemos a equação (24) como

$$2\tilde{P}_3 \tilde{P}_0 \Psi = \left[ \tilde{P}_1 \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 \tilde{P}_2 + m_0^2 c^2 - i\hbar \frac{q}{c} \left( \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial u^3} - \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial u^0} \right) \right] \Psi$$

Com base no eletromagnetismo clássico, sabemos que

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{A}_\nu}{\partial u^\mu} - \frac{\partial \tilde{A}_\mu}{\partial u^\nu}$$

e

$$\tilde{F}_{03} = \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial u^0} - \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial u^3} = - \left( \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial u^3} - \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial u^0} \right)$$

o que nos permite obter:

$$2\tilde{P}_3\tilde{P}_0\Psi = \left[ \tilde{P}_1\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2\tilde{P}_2 + m_0^2c^2 + i\hbar\frac{q}{c}\tilde{F}_{03} \right] \Psi \quad (27)$$

De fato, podemos ainda escrever alternativamente a equação (27) no seguinte formato

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u^0} = \tilde{H}\Psi \quad (28)$$

no qual, o operador do tipo hamiltoniano  $\tilde{H}$  corresponde a

$$\tilde{H} = - \left\{ \frac{iq}{\hbar c} \tilde{A}_0 + \frac{i}{2\hbar} (\tilde{P}_3)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^2 \tilde{P}_i\tilde{P}_i + m_0^2c^2 + i\hbar\frac{q}{c}\tilde{F}_{03} \right] \right\}$$

A equação (28) apresenta-se como uma equação de KGF sob a configuração de uma equação diferencial de primeira ordem na coordenada  $u^0$  em plena similaridade com a equação de Schroedinger.

## 6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do referido trabalho, apresentamos os passos necessários para a obtenção da equação de KFG em coordenadas do cone de luz. Além disso, estendemos nossa abordagem, desenvolvendo as considerações físicas e matemáticas para obter a equação diferencial de KGF para uma partícula quântica carregada, em regime de Relatividade Restrita e sob influência de um campo eletromagnético clássico geral.

## REFERÊNCIAS

BAGROV, V. G.; BUCHBINDER, I. L.; GITMAN, D. M. Coherent States of a Relativistic Particle in an External Electromagnetic Field. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 9, n. 11, p. 1955-1965, 1976.

CHRISTOFFEL, E. Ueber die Transformation der Homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 70, p. 46-70, 1869.

FOCK, V. Zur Schrödingerschen Wellenmechanik. **Zeitschrift Für Physik**, v. 38, p. 242-250, 1926.

GORDON, W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. **Zeitschrift Für Physik**, v. 40, p. 117-133, 1926.

INVERNO, R. D. **Introducing Einstein's Relativity**. 1. ed. Oxford: Clarendon Press, 1992.

KLEIN, O. Quantentheorie und Fünfdimensionale Relativitätstheorie. **Zeitschrift Für Physik**, v. 37, p. 895-906, 1926.

MEIRA FILHO, D. P.; KAMASSURY, J. K. S. Potência Irradiada por uma Partícula Elétrica Acelerada no Espaço-Tempo de Minkowski. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 3, p. e3316, Abril 2018.

SALES, J. H.; SUZUKI, A.; SORIANO, L. Partículas e Antipartículas do Cone de Luz. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 3, p. 3309, 2015.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Acompanhamento do consumo 28, 30  
Aprendizado de máquina 19, 20, 21, 22, 37, 38, 83  
Aprendizagem profunda 37

### C

Campo eletromagnético clássico 70, 72, 79, 81  
Ciclo de rankine 1, 4  
Ciência de dados 19, 20  
Comunidades rurais 109, 110  
Constante dielétrica 11, 12, 13, 14, 15, 17  
Coordenadas do cone de luz 70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 81  
Cronogramas 59, 60, 61, 62, 67

### E

Ees 1, 2, 4, 5, 9  
Eficiência 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 36, 37, 46, 50, 56, 84, 111, 115, 119  
Eficiência energética 28, 29, 30, 31, 33, 35, 36, 119  
Energia 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 44, 49, 50, 75, 109, 110, 111, 112, 116, 117, 118, 119, 120  
Energia elétrica 2, 3, 28, 29, 36, 37, 41, 44, 109, 110, 111, 117, 120  
Energia solar 109, 110, 111, 117  
Engenharia 7, 10, 11, 18, 36, 37, 44, 46, 58, 59, 62, 69, 103, 107, 108, 117, 119, 120  
Ensino-aprendizado 98  
Equação de klein-gordon-fock 70  
Experimento 98, 100, 102, 104, 107

### F

Falhas 61, 109, 115, 116, 117, 119  
Fator de perda 11, 12, 13, 15, 16, 17  
Filmes finos 46, 50, 51  
Fotocatálise heterogênea 46, 47, 48

### G

Gerenciamento 28, 29, 33, 59, 60, 61, 62, 63, 68, 69

### I

Interdisciplinaridade 98, 102, 103, 106  
Internet das coisas 26, 28, 30, 36, 44

## **K**

K-nearest neighbors 19, 20, 21

## **M**

Macaúba 11, 12, 13, 17, 18

Marketing bancário 19

Ms project 63

## **P**

Potência elétrica 37

Processos oxidativos avançados 46, 47, 48, 57, 58

Projetos 30, 59, 60, 61, 62, 63, 67, 68, 69, 100, 103, 106, 120

Propriedades dielétricas 11, 12, 18

## **R**

Realimentador 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9

Reconhecimento automático de modulações 83

Redes neurais 19, 21, 25, 38, 83, 84, 85, 87

Regressão 20, 37, 38, 43, 44, 89

Resnet 89, 90, 91

## **S**

Substrato cerâmico 46

## **T**

Tecnologia 1, 29, 36, 56, 57, 69, 70, 84, 98, 99, 100, 104, 105, 106, 107, 117, 120

Tempo de treinamento 83, 85, 92, 94

Tratamento de águas residuais 46, 57

 **Atena**  
Editora

**2 0 2 0**