CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS, EXATAS E DA TERRA E SEU ALTO GRAU DE APLICABILIDADE

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2020

CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS, EXATAS E DA TERRA E SEU ALTO GRAU DE APLICABILIDADE

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2020

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Geraldo Alves
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Atena Editora
Ano 2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

C569 Ciências tecnológicas, exatas e da terra e seu alto grau de aplicabilidade [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-86002-63-8
DOI 10.22533/at.ed.638202403

1. Ciências agrárias. 2. Ciências exatas. 3. Tecnologia. I.Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes.

CDD 500

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

Atualmente, notamos grande necessidade do desenvolvimento das ciências, bem como o aprimoramento dos conhecimentos já adquiridos pela sociedade. Sabe-se também que as ciências tecnológicas, exatas e da terra cumprem um papel importantíssimo na construção de saberes ligados a humanidade. Tais saberes só se tornam possíveis por meio de autores responsáveis por desenvolver pesquisas científicas nas mais diversas áreas do conhecimento.

Permeados de tecnologia este e-book contempla estudos na área da ciência tecnológicas, exatas e da terra, mostrando a aplicabilidade destas ciências em variados temas cotidianos. Temas ligados a Medicina, saúde, agricultura e ensino, são abordados nos capítulos desta obra, entre outros temas relacionados à produção científico-metodológica nas ciências.

Para o leitor, esta obra intitulada “Ciências tecnológicas, exatas e da terra e seu alto grau de aplicabilidade” tem muito a contribuir com estas áreas, já que cada capítulo aponta para o desenvolvimento, e aprimoramento de pesquisas científicas envolvendo temas diversos, mostrando-se não somente uma base teórica, mas também a aplicação prática de vários estudos.

Boa leitura!

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 8

CÁLCULO DE DERIVADA DE FUNÇÕES A UMA VARÍAVEL COM UTILIZAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Data de aceite: 17/03/2020

Maurício Emanuel Ferreira Costa
Universidade Federal do Pará- centro de Ciências Exatas e Naturais- FACET-Campus Abaetetuba
http://lattes.cnpq.br/3348480523892821

Luane Gonçalves Martins, Lates
Universidade Federal do Pará- centro de Ciências Exatas e Naturais- FACET-Pólo Igarapé-Miri
http://lattes.cnpq.br/7300710249292246

Aubedir Seixa Costa
Universidade Federal do Pará- centro de Ciências Exatas e Naturais- FACET-Campus Abaetetuba
http://lattes.cnpq.br/9474738220279039

Reginaldo Barros
Universidade Federal do Pará- centro de Ciências Exatas e Naturais- Abaetetuba
Lattes: 9658271624403087

Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Universidade Federal do Pará- centro de Ciências Exatas e Naturais- FACET-Campus Abaetetuba
http://lattes.cnpq.br/6473574128276776

Antonio Maia de Jesus Chaves Neto
Universidade Federal do Pará- Centro de Exatas e Naturais-LPCN
http://lattes.cnpq.br/3507474637884699

Genivaldo Passos Correa
Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais- Campus Abaetetuba-Pa
http://lattes.cnpq.br/6321452953013620

José Francisco da Silva Costa
http://lattes.cnpq.br/9492719731740641
Universidade Federal do Pará- Faculdade de Formação e Desenvolvimento do Campo-FADECAM-Campus Abaetetuba

RESUMO: A presente pesquisa tem como objetivo expor um novo método para calcular derivadas a partir da forma algébrica dos números complexos. É visível que o uso de teoremas, postulados e axiomas sem contar as técnicas longas e difíceis de serem utilizadas e interpretadas nos mais distintos problemas, são ausentes de métodos alternativos que são, por vezes, necessários e até o único recurso. Essas circunstâncias impulsionam ainda mais a pesquisa para explanar novas técnicas voltadas a esse ramo da matemática. De maneira específica, o artigo a ser apresentado aborda exemplos, demonstrar fórmulas e aplicabilidades que deverão ser utilizadas para um melhor entendimento do método. . A priori, será exposto de maneira didática os cálculos de derivações que serão úteis para as compreensões dos teoremas. Enfatizam ainda nesse artigo exemplos de aplicabilidade em comparação com os métodos convencionais em livros textos. A ideia central consiste em mostrar que no estudo do calculo diferencial de Newton, convenciona-se uma acréscimo real ou diferencial, enquanto que no método alternativo,

leva-se em consideração um acréscimo ou incremento imaginário que deve satisfazer ao cálculo em primeira ordem de aproximação.
PALAVRAS-CHAVE: Teorema, método alternativo, aplicabilidade, derivações.

ABSTRACT: This research aims to expose a new method to calculate derivatives from the algebraic form of complex numbers. It is evident that the use of theorems, postulates and axioms, not to mention the long and difficult techniques to be used and interpreted in the most different problems, are absent from alternative methods that are sometimes necessary and even the only resource. These circumstances further propel research to explain new techniques in this branch of mathematics. Specifically, the article to be presented covers examples, demonstrating formulas and applicability that should be used for a better understanding of the method. . A priori, the derivative calculations that will be useful for understanding the theorems will be exposed in a didactic manner. They also emphasize in this article examples of applicability compared to conventional textbook methods. The main idea is to show that in the study of Newton's differential calculus, a real or differential increase is agreed, whereas in the alternative method, an increment or increment that must satisfy the first-order approximation calculation is considered. .
KEYWORDS: Theorem, alternative method, applicability, derivations.

1 I INTRODUÇÃO

Neste artigo utiliza-se a forma algébrica $x + iy$ dos números complexos na expressão

$$f(x+iy) = f(x) + f'(x)iy$$

Para obtenção das derivadas da função f, contínua num intervalo [a,b]. Diferentemente, das conclusões dos matemáticos que utilizaram a variação como taxe de variação na varável x. Nesse artigo, utiliza-se como taxa de variação a expressão i,y, onde y é tão pequeno que considera apenas a primeira aproximação. Assim sendo, Essa expressão que contém no segundo termo a unidade imaginária representa a indeterminação que deve ser eliminada para obtenção da derivada real . $f'(x)$ Utiliza-se a forma algébrica dos números complexos como método essencial em operações de cálculo de derivada. No desenvolvimento das operações, consideramos desprezíveis todos os termos de ordens superiores a 2, uma vez que y é uma variável considerada tão pequena o quanto se queira. Em todas as operações, ambos os membros contém o termo que é eliminado para encontrar a expressão da derivada real . $f'(x)$ A expressão:

$$f(x+iy) = f(x) + f'(x)iy$$

Difere da derivada usual definida pelo matemático inglês Isac Newton

(*GUIDORIZZI, HAMILTON,* 2001), que considera apenas a expressão,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Como expressão geral para o cálculo de derivada de função continua f num intervalo $[a, b]$ A primeira expressão que contém o termo iy faz o papel de Δx na segunda expressão e ambas as expressões podem ser usadas para obter as derivadas das funções dadas como será visto ao longo desse primeiro artigo. No entanto o que se pretende ao longo desse artigo não é mostrar um método inovador de obtenção de derivadas e sim apenas mostrar que a forma algébrica $x + iy$ pode ser utilizada como parte essencial no desenvolvimento como forma analítica para calcular derivadas de diversas funções tendo como ponto de partida o teorema

$$f(x+iy) = f(x) + f'(x)iy$$

Dessa forma, verifica-se que esse teorema pode ser modificado de acordo com o tipo de função a ser tratado (STEWART, JAMES, 2001) e que é de grande valia para uma gama de derivadas de funções elementares como será visto ao longo desse primeiro artigo. O teorema citado acima traz a unidade imaginária i, como um fator importante seguido da varável y, cujo coeficiente nos dar a derivada da imagem da função $f(x)$ Parece-nos curioso que para o cálculo da derivada da função f, consideram-se apenas termos do primeiro grau em, iy, pois os termos posteriores, como $(iy)^2, (iy)^3$ etc, são desprezados devido a variável y tender a zero, como se faz no calculo de funções de derivadas quando se considera a expressão

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

De modo análogo, faz-se o mesmo procedimento quando é aplicado o teorema $f(x+iy) = f(x) + f'(x)iy$

Isto é,

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+iy) - f(x)}{iy} = f'(x)$$

Dessa forma, fica evidente que as derivadas das funções para serem determinadas admitem apenas o termo linear em iy.

Outro fato que merece atenção é a razão que difere entre a derivada definida por Newton e o teorema que envolve a forma algébrica dos números complexos (GUIDORIZZI, HAMILTON, 2001). Para Newton ou Leibniz, o acréscimo é na abscissa x, enquanto para a função $f(x+iy)$ o acréscimo é na parte imaginaria iy. Como entender esse fato do ponto de vista geométrico? Por que razão obtém-se os dois teoremas levam aos mesmos resultados no calculo de derivadas as funções?

Para responder a essas indagações, deve-se, primeiramente, compreender os desenvolvimentos matemáticos a que esse primeiro artigo propõe como uma nova alternativa de obter as derivadas de funções continuas num certo intervalo [a,b] e suas aplicações (NETO, J. BARCELOS, 2009) .

2 I DERIVADA DE UMA FUNÇÃO A UM VARIÁVEL REAL

Se uma grandeza y depende de uma grandeza x, então a definição da derivada de y em relação a x formaliza o conceito intuitivo da taxa de variação instantânea de y em relação a x. Se, por exemplo, y determina a posição de um móvel sujeito a uma variação unidimensional em sua posição de repouso dependendo do tempo x, a taxa de variação instantânea de y em relação a x é a velocidade instantânea do móvel em função do tempo x. A derivação é um conceito matemático que se tornou ferramenta para a solução de inúmeros problemas como veremos adiante. Vamos primeiramente ilustrar a necessidade do uso da ferramenta "derivação", utilizando um problema muito simples, mas que a matemática estudada no ensino médio não consegue resolver (FINNEY, ROSS L et al, 2002).

2.1 A derivada de Newton

Newton definiu o conceito de derivada (LEITHOLD, LOUIS, 1994) considerando-a como uma taxa de variação entre duas grandezas . Isto é:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Assim sendo, para uma função f dada pela notação $f(x)$ o limite de $\Delta x \to 0$ o define a derivada no ponto em que a reta é tangente à curva. Isto é:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A partir dessa notação, pode determinar expressões de várias derivadas de uma função de um variável real (MUNEM, M.A..; FOULIS, D.J., 1982). Assim com base a expressão é possível construir uma tabela de derivadas: Derivada do produto, da divisão soma e subtração que correspondem às propriedades das derivadas.

2.2 Teorema da derivada de uma função a uma variável real

Toda função continua num intervalo $[a, b]$ pode ser escrita em termos de uma função complexa $f(x + iy)$ que pode ser considerada a soma de uma função real $f(x)$ e pelo produto da derivada $f'(x)$ da função dada com um incremento imaginário Isto é:

$$f(x+iy)=f(x)+f'(x)iy \qquad (2^a)$$

Demonstração do teorema

Considere uma função polinomial da forma

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+p$$

Dando a $f(x)$ o acréscimo $x+iy$ obtemos a seguinte função complexa:

$$f(x)=a(\,x+iy)^n+b(\,x+iy)^{n-1}+\cdots+p$$

Seja a função

$$f(x+iy)=a(x+iy)^n+b.(x+iy)^{n-1}+\cdots+P$$

De acordo com o binômio de Newton, temos que:

$$(x+iy)^n=\binom{n}{0}x^n(iy)^0+\binom{n}{1}x^{n-1}(iy)^1+\binom{n}{2}x^{n-2}(iy)^2+\cdots$$

$$(x+iy)^{n-1}=\binom{n-1}{1}x^{n-1}(iy)^1+\binom{n-1}{2}x^{n-2}(iy)^2+\cdots$$

$$\rightarrow f(x+iy)=a\binom{n}{0}x^n+a\binom{n}{1}x^{n-1}iy+a\binom{n}{2}x^{n-2}(iy)^2+\cdots$$

$$+b\binom{n-1}{1}x^{n-1}(iy)^1+b.\binom{n-1}{2}x^{n-2}(iy)^2+\cdots+P$$

Todos os termos superiores a iy devem ser desprezados. Logo,

$$f(x+iy)=a\binom{n}{0}x^n+a\binom{n}{1}x^{n-1}.iy+\binom{n-1}{0}bx^{n-1}(iy)^0+\cdots+P$$

$$=ax^n+a\binom{n}{1}iyx^{n-1}+b.\binom{n-1}{0}x^{n-1}+\binom{n-1}{1}x^{n-2}.iy+\cdots+P$$

$$=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+P+iy\left[a\binom{n}{1}x^{n-1}+b\binom{n-1}{1}x^{n-2}+\cdots\right]$$

$$=f(x)+iy\left[a\binom{n}{1}x^{n-1}+b\binom{n-1}{1}x^{n-2}+\cdots\right]$$

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{(n-1)!\,1!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n$$

$$\binom{n-1}{1}=\frac{(n-1)!}{(n-2)!\,1!}=\frac{(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=n-1$$

$$\rightarrow f(x+iy)=f(x)+iy[nax^{n-1}+b(n-1)x^{n-2}+\cdots]$$

No entanto, temos que:

$$f'(x)=na.x^{n-1}+b(n-1)x^{n-2}+\cdots$$

São as derivadas dos termos da função

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+P$$

Logo, temos que:

$$f(x+iy) = f(x) + iyf'(x)$$

O que completa o teorema

2.2.1 A derivada do quociente

Vimos que de acordo com o cálculo que a derivada do quociente de uma função usando o método da derivada de Newton, a derivada do quociente, obedece a expressão**:**

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - h'(x)g(x)}{h^2(x)}$$

Vamos aplicar o teorema dado acima pela expressão 2°

$$f(x+iy) = f(x) + iyf'(x)$$
$$f(x+iy) = \frac{g(x+iy)}{h(x+iy)}$$

e

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Logo,

$$\frac{g(x+iy)}{h(x+iy)} = \frac{g(x)}{h(x)} + iyf'(x)$$

Mas,

$$g(x+iy) = g(x) + iyg'(x)$$

e

$$h(x+iy) = h(x) + iyh'(x)$$

Assim, temos que:

$$\frac{g(x) + iyg'(x)}{h(x) + iyh'(x)} = \frac{g(x)}{h(x)} + iyf'(x)$$

$$\frac{g(x)+iyg'(x)}{h(x)+iyh'(x)}=\frac{g(x)+iyh(x)f'(x)}{h(x)}$$

$$[g(x)+iyg'(x)].h(x)=[h(x)+iyh'(x)][g(x)+iyh(x)f'(x)]$$

$$g(x)h(x)+iyg'(x).h(x) \\ = g(x)\,h(x)+iyh^2(x)f'(x)+g(x)iyh'(x)+iyiyh'(x)h(x)f'(x)$$

$$iyg'(x).h(x)=+iyh^2(x)f'(x)+g(x)iyh'(x)+(iy)^2h'(x)h(x)f'(x)$$

$$iyg'(x).h(x)-iyh'(x)g(x)=iyh^2(x)f'(x)++(iy)^2h'h'(x)h(x)f'(x)$$

$$[g'(x).h(x)-h'(x)g(x)]iy=iyh^2(x)f'(x)+(iy)^2h'h'(x)h(x)f'(x)$$

Desprezando o termo que contém $(iy)^2$, obtemos que:

$$[g'(x).h(x)-h'(x)g(x)]iy=iyh^2(x)f'(x)$$

$$f'(x)=\frac{[g'(x).h(x)-h'(x)g(x)]iy}{iyh^2(x)}$$

Assim a derivada da função, será.

$$f'(x)=\frac{g'(x).h(x)-h'(x)g(x)}{h^2(x)}$$

2.2.2 A derivada do Produto

Seja a função dada por

$$f(x)=g(x)h(x)$$

Sendo

$$f(x+iy)=f(x)+iyf'(x)$$

Temos que:

$$f(x+iy)=g(x+iy)h(x+iy)$$

Onde

$$g(x+iy)=g(x)+iyg'(x)$$

e

$$h(x+iy)=h(x)+iyh'(x)$$

Logo:

$$g(x+iy)h(x+iy)=g(x)h(x)+iyf'(x)$$

Portanto,

$$[g(x) + iyg'(x)].[h(x) + iyh'(x)] = g(x)h(x) + iyf'(x)$$

$$[g(x)h(x) + iyg'(x)h(x)] + [iyg(x)h'(x) + (iy)^2 g'(x)h'(x)] = g(x)h(x) + iyf'(x)$$

$$[iyg'(x)h(x)] + [iyg(x)h'(x) + (iy)^2 g'(x)h'(x)] = iyf'(x)$$

Desprezando o termo que contém $(iy)^2$,temos que:

$$iy[g(x)h'(x) + g'(x)h(x)] = iyf'(x)$$

Assim, vem que.

$$f'(x) = g(x)h'(x) + g'(x)h(x)$$

2.2.3 A derivada da soma e subtração

Seja a função

$$f(x + iy) = f(x) + iyf'(x)$$

Considerando

$$f(x) = g(x) \pm h(x)$$

Temos que

$$f(x + iy) = g(x + iy) \pm h(x + iy)$$

Obtemos, de acordo com o teorema (1),

$$g(x + iy) = g(x) + iyg'(x)$$

e

$$h(x + iy) = h(x) + iyh'(x)$$

Portanto, levando em $f(x + iy)$ tem-se, que:

$$f(x + iy) = g(x + iy) \pm h(x + iy)$$

$$f(x + iy) = g(x) + iyg'(x) \pm [h(x) + iyh'(x)]$$

Reagrupando esses se tem, vem que:

$$f(x + iy) = g(x) \pm h(x) + iy[g'(x) \pm h'(x)]$$

Portanto, vem que:

$$f(x) = g(x) \pm h(x),$$

e

$$f'(x) = [g'(x) \pm h'(x)]$$

o que mostra que são válidas as operações com derivadas.

APLICAÇÃO 1

Exemplo 1

Calcule a derivada da seguinte função:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$$

De acordo como cálculo diferencial a derivada pode ser calculada usando a notação

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - h'(x)g(x)}{h^2(x)} \rightarrow$$

Sendo

$$g(x) = x + 3 \rightarrow g'(x) = 1$$

$$h(x) = x^2 + 1 \rightarrow h'(x) = 2x$$

Logo:

$$f'(x) = \frac{1.(x^2+1) - 2x.(x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2 - 6x}{(x^2+1)^2}$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{1 - x^2 - 6x}{(x^2+1)^2}$$

Que representa a derivada da função procurada.

Aplicando a expressão (2ª), podemos obter esse mesmo resultado, considerando na variável na forma algébrica do número complexo $z = x + iy$ Isto é, seja a expressão,

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$$

Logo,

$$f(x+iy) = \frac{x+iy+3}{(x+iy)^2+1} = \frac{x+iy+3}{(x^2+2xiy-y^2)+1}$$

$$= \frac{(x+3)+iy}{(x^2+1)+2xiy+i^2y^2}$$

Vamos desprezar o termo i^2y^2 logo:

$$f(x) = \frac{(x+3)+iy}{(x^2+1)+2xiy}$$

Fazendo o conjugado, obtemos:

$$f(x) = \frac{[(x+3)+iy].[(x^2+1)-2xiy]}{(x^2+1)^2+4x^2y^2}$$

Vamos, novamente, desprezar o termo :

$$f(x) = \frac{[(x+3)+iy].[(x^2+1)-2xiy]}{(x^2+1)^2} \rightarrow$$

Fazendo a distribuição no numerador, obtemos:

$$\frac{(x+3)(x^2+1)-2xiy(x+3)+(x^2+1)iy-2xi^2y^2}{(x^2+1)^2} \rightarrow$$

$$\frac{(x+3)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\frac{[-2x(x+3)+x^2+1]iy}{(x^2+1)^2}-2xi^2y^2$$

Desprezando o termo em i^2y^2 obtemos:

$$f(x) = \frac{(x+3)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\frac{[-2x^2-6x+x^2+1]iy}{(x^2+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{(x+3)}{(x^2-1)}+\frac{(1-x^2-6x)}{(x^2+1)^2}iy$$

De acordo com o teorema, concluir que:

$$f_1(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$$

Representa a primitiva da função dada e

$$f_2(x) = \frac{(1-x^2-6x)}{(x^2+1)^2}$$

Representa a derivada da função procurada. Portanto, para a função $f(x)$ contínua sempre se pode obter a primitiva da função e sua derivada quando substituída x pelo complexo $z = x + iy$. O fato que nos leva a obtenção dessa derivada, está na questão de que quando se substitui $z = x + iy$. na função dada, obtem-se, justamente, a reta tangente à curva da função no ponto $x + iy$ desde que sejam desprezados os termos de ordens superiores a iy. O coeficiente de iy. é justamente a derivada, como demonstrado.

Exemplo 2

Obtenha a derivada da função

$$f(x) = (x^2-2).(2x+1)$$

Vamos fazer a notação $x + iy$.

Isto é:

$$f(x+iy) = [(x+iy)^2-2].[2(x+iy)+1]$$

$$= [(x^2 + 2xiy + i^2y^2) - 2][2x + 1 + 2iy]$$

Vamos desprezar o termo i^2y^2 logo:

$$[(x^2 + 2xiy - 2)(2x + 1) + 2iy]$$

$$(x^2 - 2).(2x + 1) + iy[2(x^2 - 2) + 2x(2x + 1) + 4i^2y^2]$$

Desprezando ainda o termo i^2y^2 obtemos:

$$f(x + iy) = (x^2 - 2)(2x + 1) + iy[2x^2 - 4 + 4x^2 + 2x] \rightarrow$$

$$f(x + iy) = (x^2 - 2)(2x + 1) + (6x^2 + 2x - 4)iy$$

De acordo com a expressão 2ª, vem que:

$$f_1(x) = (x^2 - 2)(2x + 1)$$

É a primitiva

e

$$f_2(x) = 6x^2 + 2x - 4$$

É a derivada procurada. Assim sendo a função $f(x)$ pode ser entendida como sendo a composição de duas outras funções, a 1ª como sendo a primitiva real e a 2ª, como sendo a derivada dessa primitiva. Isto é:

$$f(x + iy) = f(x) + f'(x)iy$$

2.3 Binômio de Newton utilizado para o cálculo de derivada.

Seja a função

$$f(x) = x^4$$

Encarando-se como uns números complexos têm que:

$$f(x) = (x + iy)^4$$

Cada termo dessa função polinomial deve ser dado por:

$$T_{P+1} = \binom{n}{P} x^{n-P}.(iy)^P$$

Sendo

$$\binom{n}{P} = \frac{n!}{(n-P)!\,P!} \rightarrow$$

$$T_{P+1} = \left[\frac{n!}{(n-P)!}\frac{1}{P!}\right] x^{n-P}.(iy)^{P} \rightarrow$$

$$T_{P+1} = \frac{n!}{(n-P)!} x^{4-P} \frac{1}{P!} (iy)^{P}$$

Logo, podemos considerar que a expressão

$$f(x) = \frac{n!}{(n-P)!} x^{4-P}$$

Representa as derivadas da função $f(x) = x^{n}$. .

Exemplo 1

Dada à função $y = (x^3 + 1)^4$

Calcule a 1ª derivada da função usando o binômio de Newton

Dado

$$f(x) = \frac{n!}{(n-P)!} x^{4-P}$$

Vem que $P = 1$ e $n = 4$

Vamos escrever em $x, x + iy$ logo:

$$y = [(x+iy)^3 + 1]^4 = (x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 + i^3y^3 + 1)^4$$

Devemos desprezar os termos superiores a i, assim:

$$y(x) = [(x^3 + 1) + 3x^2iy]^4 \rightarrow$$

Como

$$f'(x) = \frac{n!}{(n-P)!} x^{4-P}$$

Temos que

$$y'(x) = \frac{n!}{(n-P)!}(x^3+1)^{4-1}.(3x^2)^1$$

$$y'(x) = \frac{4!}{(4-1)!}(x^3+1)^3.3x^2$$

$$y'(x) = \frac{4!}{3!}3x^2(x^3+1)^3$$

$$y'(x) = 4.3x^2(x^3+1^3) \rightarrow$$

$$y'(x) = 12x^2(x^2+1)^3$$

Que representa a derivada processada.

3 I DERIVADAS DE FUNÇÕES QUE APRESENTAM RADICAIS.

Nessa parte, considera-se que as funções que apresentam radicais, podemos obter a derivada considerando como teorema a seguinte expressão,

$$f(x+iy) = f(x) + \frac{n}{2P}iyf'(x) \qquad (4^o)$$

A demonstração desse teorema pode ser obtida a partir do principio da indução. Vamos considerar que a função apresenta sob o sinal do radical um polinômio do primeiro grau em x. Isto é seja a função

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Logo, temos que.

$$f(x+iy) = \sqrt{x+iy}$$

Utilizando o teorema (1), vem que.

$$\sqrt{x+iy} = \sqrt{x} + iyf'(x) \rightarrow$$

$$iyf'(x) = \sqrt{x+iy} - \sqrt{x}$$

Realizando o conjugado dessa expressão, obtemos.

$$iyf'(x) = \frac{\left(\sqrt{x+iy}-\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x+iy}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+iy}+\sqrt{x}\right)} \rightarrow$$

$$iyf'(x) = \frac{x+iy-x}{\sqrt{x+iy}+\sqrt{x}} = \frac{iy}{\sqrt{x+iy}+\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{x+iy-x}{\sqrt{x+iy}+\sqrt{x}} = \frac{iy}{iy(\sqrt{x+iy}+\sqrt{x})}$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{x+iy-x}{\sqrt{x+iy}+\sqrt{x}} = \frac{1}{(\sqrt{x+iy}+\sqrt{x})}$$

Fazendo o limite, isto é,

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+iy)-f(x)}{iy} = f'(x)$$

Obtém-se

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ou seja, $f'(x)$ representa a derivada da função $\sqrt{x}$..
De modo geral, a função que apresenta a notação.

$$y = \sqrt[n]{x},$$

A derivada pode ser obtida usando a notação

$$f(x+iy) = f(x) + \frac{n}{2}iyf'(x)$$

Observe o seguinte exemplo, Seja a função $f(x) = \sqrt[6]{x}$
Usando o teorema (1),

$$\sqrt[6]{x+iy} = \sqrt[6]{x} + \frac{6}{2} iyf'(x)$$

$$\rightarrow \sqrt[6]{x+iy} - \sqrt[6]{x} = 3iyf'(x) \rightarrow$$

$$3iyf'(x) = \frac{\left(\sqrt[6]{x+iy} - \sqrt[6]{x}\right)\left(\sqrt[6]{(x+iy)^5} + \sqrt[6]{x^5}\right)}{\left(\sqrt[6]{(x+iy)^5} + \sqrt[6]{x^5}\right)} \rightarrow$$

$$3iyf'(x) = \frac{x+iy-x}{\sqrt[6]{x(+iy)^5} + \sqrt[6]{x^5}} =$$

$$3iyf'(x) = \frac{iy}{\sqrt[6]{x(+iy)^5} + \sqrt[6]{x^5}}$$

$$3f'(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{(x+iy)^5} + \sqrt[6]{x^5}}$$

Fazendo o limite, isto é,

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+iy) - f(x)}{iy} = f'(x)$$

Obtemos que,

$$f'(x) = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

O que está de pleno acordo com a derivada da função $f(x) = \sqrt[6]{x}$ quando se usa do método de derivação normal.

3.1 Funções sob sinal de radical de monômios do 2° grau.

Funções que apresentam $\sqrt[n]{x^2}$ as derivadas são obtidas usando a expressão:

$$f(x+iy) = f(x) + \frac{n}{4} iyf'(x)$$

Seja a função

$$f(x) = \sqrt[7]{x^2}$$

Considerando

$$f(x+iy) = f(x) + \frac{n}{4} iyf'(x)$$

Com $n = 7$,

Temos que,

$$\sqrt[7]{(x+iy)^2} = \sqrt[7]{x^2} + \frac{7}{4} iyf'(x)$$

$$\sqrt[7]{(x+iy)^2} = \sqrt[7]{x^2} + \frac{7}{4} iyf(x) \rightarrow$$

$$\frac{\left(\sqrt[7]{(x+iy)^2} - \sqrt[7]{x^2}\right)\left(\sqrt[7]{(x+iy)^5} + \sqrt[7]{x^5}\right)}{\left(\sqrt[7]{(x+iy)^5} + \sqrt[7]{x^5}\right)} = \frac{7}{4} iyf'(x) \rightarrow$$

$$\frac{x+iy-x}{\sqrt[7]{(x+iy)^5} + \sqrt[7]{x^5}} = \frac{7}{4} iyf'(x) \rightarrow$$

$$\frac{iy}{\sqrt[7]{(x+iy)^5} + \sqrt[7]{x^5}} = \frac{7}{4} iyf'(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{(x+iy)^5} + \sqrt[7]{x^5}} = \frac{7}{4} f'(x)$$

Levando ao limite,

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+iy) - f(x)}{iy} = f'(x)$$

Obtemos,

$$f'(x) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2\sqrt[7]{x^5}}$$

ou

$$f'(x) = \frac{2}{7} \frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}$$

Seja a função

$$f(x) = \sqrt[10]{x^2}$$

Temos que,

$$f(x+iy) = f(x) + iy\frac{n}{4} f''(x)$$

Logo,

$$\sqrt[10]{(x+iy)^2} - \sqrt[10]{x^2} = iy\frac{10}{4}f'(x)$$

$$\frac{\left(\sqrt[10]{(x+iy)^2} - \sqrt[10]{x^2}\right).\left(\sqrt[10]{(x+iy)^8} + \sqrt[10]{x^8}\right)}{\sqrt[10]{(x+iy)^8} + \sqrt[10]{x^8}} = \frac{5}{2}f'(x)iy$$

$$\frac{x+iy-x}{\sqrt[10]{(x+iy)^8} + \sqrt[10]{x^8}} = \frac{5}{2}f'(x)iy \rightarrow$$

$$\frac{iy}{\sqrt[10]{(x+iy)^8} + \sqrt[10]{x^8}} = \frac{5}{2}f'(x)iy$$

$$\frac{1}{\sqrt[10]{(x+iy)^8} + \sqrt[10]{x^8}} = \frac{5}{2}f'(x)$$

Levando ao limite, obtemos.

$$f'(x) = \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[10]{x^8}} \qquad \text{ou} \qquad f'^{(x)} = \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$$

3.2 Generalização

De um modo geral para

$$f(x) = \sqrt[n]{x^P},$$

obtém-se a derivada da função, usando a notação:

$$f(x+iy) = f(x) + \frac{n}{2P}iyf'(x) \qquad (4°)$$

A função permanece válida para $f_1(x) = \sqrt[n]{f(x)^P}$, onde $f(x)$ é uma função polinomial.

Exemplo 1

Dada a função $f(x) = \sqrt[4]{(x^2+3)^3}$, calcule a sua derivada

Solução

Usando a notação (4°).

$$f(x+iy) = \sqrt[4]{[(x+iy)^2+3]^3} \rightarrow$$

$$\sqrt[4]{[(x+iy)^2+3]^3} = \sqrt[4]{(x^2+3)^3} + \frac{4}{2.3}iyf'(x) \rightarrow$$

$$\frac{2}{3}iyf'(x) = \sqrt[4]{[x^2+2xiy+i^2y^2+3]^3} - \sqrt[4]{(x^2+3)^5} \rightarrow$$

$$\frac{2}{3}iyf'(x)=\frac{(x^2+2xiy+3)^3-(x^2+3)}{\sqrt[4]{x^2+3}+\sqrt[4]{x^2+3}}\rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}\frac{x}{\sqrt[4]{x^2+3}}$$

O que representa a derivada da função $f(x)=\sqrt[4]{(x^2+3)^3}$

4 I CONSIDERAÇÃO FINAL

De acordo com abordagem apresentada ao longo desse artigo, observou-se que o método alternativo e aplicabilidade em cálculo de derivadas de uma função a uma variável real em que se considera a forma algébrica dos números complexos $(x+iy)$ conduziu de modo análogo aos resultados com os incrementos desenvolvidos por Newton. No entanto, percebe-se que para o primeiro método exposto, o incremento imaginário denominado por iy, aparentemente, condiz com o incremento real Δx.

Numa avaliação entre os dois métodos utilizados, pode-se pensar na possibilidade de não haver vantagem em utilizar o método que contém o termo iy Todavia é importante salientar que o método alternativo abre uma relevante lacuna, pois de certa forma, mostra a aplicabilidade da teoria complexa para o cálculo das derivadas onde o acréscimo dada a função de uma variável real, representa a forma algébrica $x+iy$ e o incremento iy se tornou importante quando veio tratar de funções com radicais com a introdução de parâmetros N e P.

Outro fato que merece atenção nesse estudo é a enorme vantagem de considerar o cálculo de derivadas com aproximação apenas na primeira ordem, como foi o caso da demonstração do teorema de uma função polinomial. Considerar essa aproximação consiste justamente, na importância do método alternativo. Na verdade em quanto as derivadas de Newton leva a aproximações de primeira ordem num incremento real Δx, desprezando os termos posteriores e maiores com a possibilidade de os serem tão pequeno o quanto se queira.

O incremento do método proposto, também considera essa possiblidade, no entanto não o faz como Newton. Introduz nos cálculos um termo complexo, criando a possibilidade de perscrutar numa teoria muito mais interessante e profunda levando em conta estudos de funções transcendentes em que o incremento complexo é de fundamental relevância para o cálculo de funções logarítmicas, trigonométricas e de outras funções que não sejam as polinomiais.

Espera-se, entretanto, que a teoria apresentada nesse primeiro artigo, possa contribuir e mostrar técnica que apesar de apresentar certa semelhança com os cálculos de derivações rotineiras, pode possuir a vantagem de abrir novas lacunas para futuros caminhos e outros horizontes matemáticos.

REFERÊNCIAS

Guidorizzi, Hamilton, Um curso de Cálculo, Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos, 5a. edição, 2001.

Finney, Ross L., Weir, Maurice D., Giordano, Frank R. Cálculo de George B. Thomas Jr., Vol. 1, Pearson Education do Brasil, 2002.

Stewart, James, Cálculo, Vol. 1, Editora Pioneira, 4a. edição, 2001.

Munem, M.A..; Foulis, D.J. Cálculo - Rio de Janeiro - Guanabara Dois , 1982. v1.

Neto, J. Barcelos Cálculo para Entender e Usar. Ed. Livraria da Física, 2009.

Leithold, Louis. O Calculo com geometria analítica. 3a ed. São Paulo - Harbra, C1994. v1.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

Atena Editora
2020