Raissa Rachel Salustriano da Silva-Matos
Nitalo André Farias Machado
Hosana Aguiar Freitas De Andrade
(Organizadores)

As Ciências Exatas e da Terra e a Interface com vários Saberes 2

Atena Editora
Ano 2020

Raissa Rachel Salustriano da Silva-Matos
Nitalo André Farias Machado
Hosana Aguiar Freitas De Andrade
(Organizadores)

As Ciências Exatas e da Terra e a Interface com vários Saberes 2

Atena Editora
Ano 2020

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Geraldo Alves
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

C569 As ciências exatas e da terra e a interface com vários saberes 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Raissa Rachel Salustriano da Silva-Matos, Nitalo André Farias Machado, Hosana Aguiar Freitas de Andrade. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2020. – (As Ciências Exatas e da Terra e a Interface com Vários Saberes; v. 2)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-908-0
DOI 10.22533/at.ed.080201301

1. Ciências exatas e da terra. 2. Engenharia. I. Silva-Matos, Raissa Rachel Salustriano da. II. Machado, Nítalo André Farias. III.Andrade, Hosana Aguiar Freitas de. IV. Série.

CDD 507

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2020

APRESENTAÇÃO

Os grandes avanços tecnológicos e o desenvolvimento no campo das Ciências Exatas e da Terra fizeram com que essa grande área do conhecimento ganhasse uma forte interface com diferentes áreas dos saberes, da agricultura à pedagogia, completando o aspecto da didática-aprendizagem, recursos ambientais e saúde.

O leitor de “As Ciências Exatas e da Terra e a Interface com Vários Saberes 2” terá oportunidade de conhecer as discussões atuais sobre e profundas relações das Ciências Exatas e da Terra permeando com outras áreas do conhecimento, pois esta obra apresenta uma refinada coletânea de trabalhos científicos relacionados a essa temática.

Portanto, esta obra é direcionada a todos os técnicos, acadêmicos e profissionais das áreas das Ciências Exatas e da Terra e das demais áreas que, por ventura, tenham interesse em comtemplar as relações e interface das Ciências Exatas e da Terra. Nesse sentido, ressaltamos a importância desta leitura de forma a incrementar o conhecimento dos nossos leitores.

Desejamos uma ótima leitura.

Raissa Rachel Salustriano da Silva-Matos

Nítalo André Farias Machado

Hosana Aguiar Freitas de Andrade

SUMÁRIO

CAPÍTULO 19

USO DO MIRITI COMO RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO DE ANÁILISE COMBINATÓRIA

Data de aceite: 10/12/2019

Anildo das Chagas Dias
Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais- Campus Abaetetuba-Pa

Jociléa Rodrigues Cardoso
Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais-Campus Abaetetuba-Pa
http://lattes.cnpq.br/9702082117284782

José Francisco da Silva Costa
Universidade Federal do Pará. Faculdade de Formação e Desenvolvimento do Campo – FADECAM. Abaetetuba - Pa
http://lattes.cnpq.br/9492719731740641

Nayara dos Santos Rodrigues
Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais- Campus Abaetetuba-Pa
http:/lattes.cnpq.br/7315572003866689

Raimundo das Graças Carvalho de Almeida
Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais- Campus Abaetetuba-Pa
http://lattes.cnpq.br/8447434150719179

Reginaldo Barros
Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais- Campus Abaetetuba-Pa
http://lattes.cnpq.br/9658271624403087

Genivaldo Passos Correa
Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais- Campus Abaetetuba-Pa
http://lattes.cnpq.br/6321452953013620

RESUMO: Este artigo estuda a relevância da experimentação no ensino da análise combinatória levando em conta o miriti como um recurso no processo de ensino e aprendizagem o que pode descomplicar o conteúdo, causando motivação e interesse nos alunos pelo conteúdo. O recurso do miriti pode proporcionar um melhor ensino de análise. A relevância do artigo está no fato de considerar que por meio das experimentações nas aulas de matemática, especialmente de análise combinatória, o aluno passa a entender o conteúdo sob outra ótica, o que proporciona um significado maior na aprendizagem. Acredita-se, portanto, que a experimentação tendo como recurso o miriti confeccionado com materiais para o ensino de análise combinatória, proporciona que o aluno consiga aprofundar o conhecimento, pois está diante de situações problemas voltados para o cotidiano. Assim sendo, o trabalho se restringe na metodologia de característica qualitativa, que por meio de pesquisas bibliográficas, de consultas a trabalhos relacionados a temática, serviram de referência para o desenvolvimento do estudo. A forma de ensinar a análise

combinatória sobre o aspecto da experimentação tendo como recurso o miriti, pode ser utilizada em escola pública ou particular e que possa abordar sobre essa ótica o estudo de análise combinatória. Dessa maneira, o trabalho dispõe de proposta de experimentações que o professor pode realizar, possibilitando que o aluno perceba que a importância de que as práticas comuns do cotidiano pode ampliar a visão da aplicabilidade da matemática.
PALAVRAS-CHAVE: Matemática. Análise Combinatória. Experimentação

ABSTRACT: This article studies the relevance of experimentation in the teaching of combinatorial analysis considering miriti as a resource in the teaching and learning process which can complicate the content, causing motivation and interest in the students for the content. The miriti resource can provide better teaching of analysis. The relevance of the article lies in the fact that through experiments in math classes, especially combinatorial analysis, the student comes to understand the content from another perspective, which provides greater meaning in learning. Therefore, it is believed that experimentation using the Miriti made with materials for the teaching of combinatorial analysis, allows the student to deepen the knowledge, because it is facing problems situations turned to daily life. Thus, the work is restricted to the methodology of qualitative characteristic, which through bibliographic research, consultations to works related to the theme, served as a reference for the development of the study. The method of teaching combinatorial analysis on the aspect of experimentation using miriti can be used in a public or private school that can address the study of combinatorial analysis. Thus, the work has a proposal of experiments that the teacher can perform, enabling the student to realize that the importance of common everyday practices can broaden the view of the applicability of mathematics.
KEYWORDS: Mathematics. Combinatorial analysis. Experimentation

1 I INTRODUÇÃO

Em termos históricos a Análise Combinatória surgiu no século XVII, com a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes de resultados dos jogos de azar, e isso foi o que incentivou o estudo dos métodos de contagem (BOYER, 2001). Por solucionarem problemas de jogos de azar, Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) impulsionaram essa área. Pascal escreveu, em 1654, o Tratado do Triângulo Aritmético, uma exposição das propriedades dos coeficientes binomiais e das relações entre eles.

Assim a Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados conforme algumas condições. Por sua vez, pode-se dizer que a teoria das probabilidades decorre da necessidade de avaliar hipóteses e de tomar decisões. A primeira vista pode parecer desnecessária a existência destes métodos, isto de fato é verdade, se o número de elementos que se quer contar for pequeno. Entretanto, se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho, torna-se quase que impossível, sem o uso de métodos especiais. Tais métodos são as combinações, arranjos e permutações.

A Análise Combinatória é um tema de fundamental importância para o ensino médio e o professor pode utilizar de recursos, como por exemplo o miriti como estratégia metodológica para realizar uma abordagem capaz de aguçar, motivar e causar um maior interesse nos alunos. Para alcançar essa motivação, é preciso que ele construa uma relação entre o conteúdo de analise combinatório com situações problemas vivenciado pelos alunos. De que forma seria capaz de aprimorar esse estudo fazendo essa correspondência biunívoca?

Para responder essa pergunta, segundo os autores, D'Ambrósio (2010) e Ogliari (2008) consideram que a Matemática ganha destaque, quando o assunto é a necessidade de mudança no modelo de ensino adotado. Nessa questão vale ressaltar que por modelo de ensino se pode referir a necessidade de mudança na forma de como o professor pode desenvolver o trabalho pedagógico sobre determinado tema da matemática. È importante que ele possa construir uma metodologia que venha aflorar a experiemnetação onde consiga mostrar a aplicabilidade do conteudo com o cotidiano do aluno.

Isto é aquilo que pode chamar atenção dele sobre o tema que o professor aborda, teroricamente em sala. Assim sendo, os autores consideram que se o professor não ministrar um conteudo ligado com a experiemntação e outros recuros que podem facilitar, os alunos podem apresentar dificuldade de aprendizagem.

Nesse sentido o professor pode fazer que os alunos aprendem melhor o conteúdo de analise combinatório, buscando melhorar o processo de ensino a paritr de usos de recursos que podem auxiliar a aprendizagem. Para o autor Lorenzato (2006), o professor tem um papel relevante no sucesso ou fracasso do aluno, pois depende da metodologia que desenvolve. Para Lorenzato (2006).não basta o professor dispor de um bom material didático para que se tenha a garantia de uma aprendizagem significativa é preciso saber utilizar estes materiais.

O que o autor procura mostrar é que o professor deve saber manipular os diferentes recursos para saber utilizar nos conteúdos ministrados. È preciso ter conhecimento, por exemplo, se for utilizar um recurso computacional, é necessário conhecer os aplicativos para que consiga construir uma metodologia que venha auxiliar e ensinar também os alunos. Nesse aspecto, a experiência ou a prática docente é importante para que o conteúdo cause motivação e interesse no alunado ao ponto de conseguir uma melhor aprendizagem. .

Levando em conta esse contexto, tem-se como objetivo geral: verificar que o uso do miriti como recurso didático para as aulas de estudo de análise combinatória pode auxiliar que o aluno adquire uma aprendizagem muito mais prazerosa a partir de situações problemas que estejam ligados com a vivencia ou com a aprendizagem significativa. Nesse sentido, procura-se mostrar como requisito crucial para o desenvolvimento desse trabalho uma proposta de experimentação para melhorar a compreensão do conteúdo ministrado e considerando o miriti como um recurso capaz de auxiliar o aluno para o desenvolvimento de competências, na organização do pensamento e do raciocínio dedutivo e dessa maneira será possível com base na proposta de experimentação, compreender e avaliar a escolha da contagem dos elementos de um conjunto considerando o miriti como um recurso didático como um auxiliador para interpretação e compreensão dos problemas a serem tratados nesse trabalho.

A partir dessa proposta para o estudo do tema a que propõe esse trabalho, o desenvolvimento de capacidades cognitivas, como: analisar, investigar, refletir, levantar hipóteses, testar, argumentar, generalizar serão possíveis pelo fato de que a proposta experimental é capaz de preencher a lacuna para uma melhor compreensão da contagem, tomando o miriti como uma maneira de mostrar problemas que estarão ligados com o cotidiano do aluno, como por exemplo, as diferentes maneiras de se vestir, de comer uma sala de frutas ou até mesmo de escolher um determinado caminho entre duas ou mais cidades e de dispor os livros numa instante.

Assim, a Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados conforme algumas condições. Por sua vez, pode-se dizer que a teoria das probabilidades decorre da necessidade de avaliar hipóteses e de tomar decisões. As aplicações são diversas e ela tem tido um crescimento muito grande nas últimas décadas, devido sua utilização em teoria dos grafos, em análise de algoritmos, etc. muitos problemas importantes podem ser modelados, matematicamente, como problemas de teoria dos grafos. (problemas de pesquisas operacional, de armazenamento de informações em bancos de dados nos computadores, e também problemas de matemática pura, como o famoso problema das 4 cores).

No contexto de sala de aula é visível a existência de uma problemática que são evidenciadas informalmente por meio de trocas de experiências docentes e formalmente através dos resultados das avaliações. De maneira simples, este trabalho é direcionado como objetivos específicos, oferecer propostas de experimentação com a utilização de miriti como um recurso didático para auxiliar na contagem de elementos relacionados a permutação, arranjo e combinações; compreender a partir desse recurso didático um melhor processo de ensino aprendizagem de modo a superar dificuldades no repasse dos conceitos de Análise Combinatória em sala de aula; mostrar que a contextualização no estudo de análise combinatória levando em conta a aprendizagem significativa do cotidiano do aluno pode enriquecer o conhecimento sobre o tema proposto.

Dessa maneira, a proposta é destacada como experimentação que pode ser capaz de responder a problemática vivenciada pelos alunos quando sentem dificuldades de aprenderem o conteúdo longe da realidade das vivencias e da aprendizagem significativa. Nesse sentido, torna-se indispensável que a experimentação esteja sempre presente ao longo de todo o processo de desenvolvimento das competências em matemática, privilegiando-se o fazer, manusear, operar, agir, em diferentes formas e níveis. É dessa forma que se pode garantir a construção do conhecimento pelo próprio aluno, desenvolvendo sua curiosidade e o hábito de sempre indagar, evitando a aquisição do conhecimento científico como uma verdade estabelecida e inquestionável.

Por meio da experimentação o conhecimento é levado juntamente com a motivação para o aluno, pois deste modo àquele que não conseguiu entender um determinado conteúdo abstratamente, tem ainda a chance de experimentá-lo, visualizando ou tocando objetos relacionados a um determinado conteúdo de modo a facilitar a aprendizagem. Os experimentos matemáticos além de sua importância teórica possuem o papel de conseguir esta aproximação, pois quando o aluno consegue compreender que o assunto estudado está sendo experimentado, inclusive com a possibilidade de manipulação de objetos concretos, acaba por perceber a utilidade daquele conhecimento, tornando o estudo efetivamente significativo.

O trabalho, em termos metodológicos, é qualitativo que seguiu as seguintes etapas. De princípio, foi realizado levantamentos bibliográficos, cuja preocupação é extrair elementos capazes de fundamentar a compreensão do tema proposto, partindo para a sistematização e exposição das propostas de experiências que poderão ser utilizadas.

2 I TEORIA, CONCEITOS E DEFINIÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nesse tópico será abordado métodos utilizados para resolver problemas de análise combinatória, O Princípio Fundamental da Contagem, Arranjos, Permutação e Combinações Simples. Essa abordagem tem como princípio mostrar conceitos, definições e formulações matemáticas para consolidar o estudo com futuras aplicações.

2.1 Fatorial

Antes de iniciar o conceito de fatorial do ponto de vista matemático é importante para aplicar a utilidade do ponto de vista cotidiano. Assim sendo, o uso do fatorial envolve muitas situações práticas e para introduzir os conceitos de permutações e combinações são necessários compreender o conceito de fatorial onde tanto a permutação quanto a combinação dependem do fatorial, como será observado.

Antes de verificar exemplos de aplicação de fatorial, combinação e permutação é importante compreender o que significa, matematicamente, o conceito de fatorial. Assim sendo, dado um número natural qualquer n, sendo $n > 1$ define-se o fatorial de *n*, o que denotamos por *n*!, o produto decrescente de *n* até 1(IEZZI,2000, p-19)

$$n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$$

Nos casos particulares $n = 1$ e $n = 0$ define-se:

$$1! = 1$$

E

$$0! = 1$$

Note que:

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 2.1 = 2$$
$$3! = 3.2.1 = 6$$

2.2 Princípio fundamental da contagem

Se um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª. Etapa é *m* e o número de possibilidades na 2ª. Etapa é *n*, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado por *m.n*.(IEZZI, 2000,p-2)

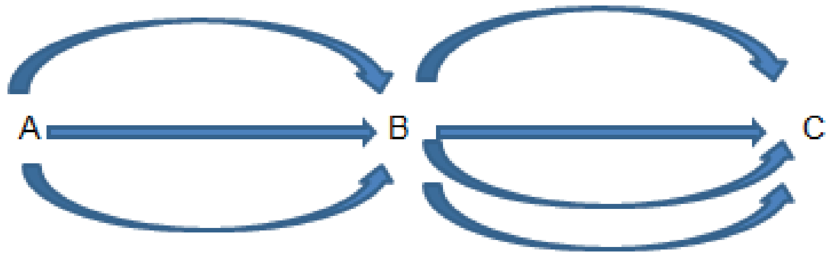
Pode-se generalizar este resultado para qualquer número finito de etapas: Se a 1ª. Etapa ocorre de p_1 possibilidades, a 2ª. Etapa de p_2 possibilidades e assim até a n-ésima etapa de p_n possibilidades, o número total de possibilidades é dada por:

$$p_1 . p_2 . p_3 \dots p_n$$

A questão nesse ponto é de indagar qual a importância de aprender sobre o principio fundamental da contagem?

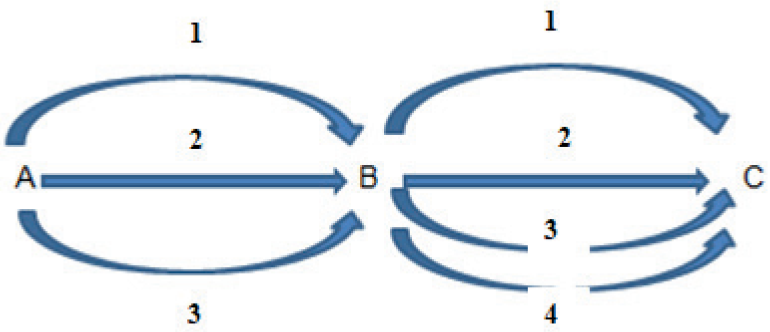
Para responder a essa pergunta, considere que se Deseja sair de uma cidade de *A* e chegar à cidade *C*, passando, necessariamente, por uma cidade *B*, onde de *A* até *B*, tem-se 3 caminhos possíveis para seguir e de *B* para *C* temos 4 caminhos possíveis para seguir. De quantas são as maneiras de partir da cidade A e chegar a cidade C, passando, necessariamente, por B?

Para responder a essa questão, considere o seguinte diagrama:



Fonte: Acervo do autor(ANILDO< 2019)

Observando a figura, pode-se considerar que uma pessoa pode tomar o caminho 1 de A a B e escolher quaisquer um dos quatro caminhos que vai de B para C. Em seguida, pode escolher o segundo caminho de A a B e optar, novamente, pelos quatro quais quer dos caminhos de B a C e por fim, poderá ir pelo caminho 3 (A a B) e escolher os outros quaisquer dos quatro caminhos de B a C. Observe o diagrama a seguir,



Ou seja, o numero de pares ordenados serão,

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)

(2,1) (2,2), (2,3), (2,4)

(3,1) (3,2), (3,3), (3,4)

Verifica-se, portanto que há 12 possibilidades de escolhas.

então pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem 12 caminhos possíveis para sair da cidade *A* e chegar à cidade *C*, pois 3.4 = 12.

2.3 Permutações Simples

Denomina-se permutações simples de *n* elementos distintos dados a toda sucessão de *n* termos formada com esses *n* elementos distintos. Tal permutação é obtida fazendo (IEZZI, 2000,p-18) :

$$P_n = n!$$

Os exemplos 1 e 2 que ilustram algumas aplicações envolvendo as permutações simples, uma bem direta e outra que requer um pouco mais de raciocínio, além da utilização da fórmula da permutação simples.

Exemplo 1**:** Quantos anagramas[1] pode-se formar com a palavra AMOR.

Solução:

Como a palavra AMOR é formada por quatro letras distintas, logo:

$$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Assim pode-se formar 24 anagramas distintos com a palavra AMOR.

Exemplo 2: De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

Solução:

O número total de modos de sentar 7 pessoas em 7 cadeiras é o número de modos de arrumar 7 pessoas em fila, ou seja, 7!. Só que o problema quer que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas, logo do total de 7!, temos que retirar a possibildade de duas pessoas A e B (AB ou BA), estejam juntas. Assim estando A e B (AB ou BA), não têm 7 pessoas e sim 6 e como pode ser AB ou BA, logo faz-se 2.6! = 1.400. Desta forma a solução do problema é dada por:

$$7! - 2.6! = 5.040 - 1.440 = 3.600 \text{ modos.}$$

2.4 Permutações circulares

De quantas maneiras distintas pode-se formar uma ciranda (um círculo formado de objetos, pessoas, etc.)?

Suponhamos que se queira formar uma ciranda com três pessoas, por exemplo, com Antônio, Beatriz e Fernando, logo pode-se pensar na ciranda conforme ilustra a Figura

Três posições, três pessoas então pelo princípio Fundamental da Contagem existem 3!, ou melhor, quando girar a ciranda da figura 3, ter-se-á a ciranda distribuída conforme a figura 4.

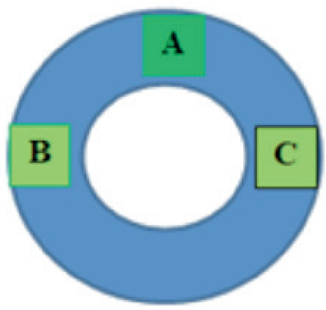
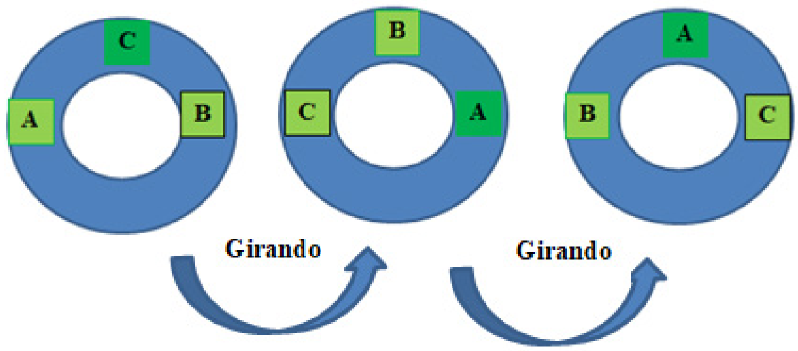


Figura 4- Ciranda da figura

Fonte: Acervo do autores

1 Os anagramas são alterações da sequência das letras de uma palavra.



Fonte: Acervo do autores

Pela Figura 4 pode-se perceber que ao girar a ciranda ela não deixa de ser a ciranda original.

Formada então uma disposição inicial, qualquer outra disposição que gire a ciranda, sempre consegue voltar à disposição inicial na verdade é a mesma roda formada pela disposição inicial!. A figura 5, apresenta a posição inicial da ciranda diferente da disposta na figura 3.

Note que a Figura 5 é totalmente diferente da figura 4, não importa o quanto a ciranda gire.

Pode-se ver então que cada roda formada conta como 3 no número total apresentado pelo princípio da contagem (que contou todas as possíveis maneiras de se montar uma roda com 3 pessoas).

Suponha uma ciranda formada por quatro pessoas, por exemplo, Angélica, Felipe, Bernardo e Cleide. Pode-se pensar na ciranda conforme a Figura 6.

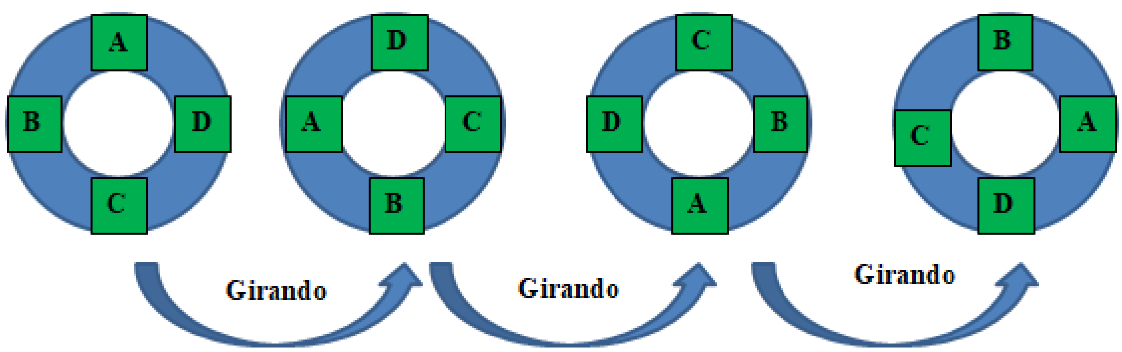


Figura 6: Ciranda rotacionada 3

Fonte: Acervo dos autores.

Pode-se perceber que com 3 elementos, tem-se 3 rodas iguais, para 4 elementos 4 rodas iguais, continuando desta maneira, tem-se *n* para pessoas brincando de roda uma quantidade de *n* rodas iguais a inicial.

Como fazer então para saber a quantidade total de rodas distintas possíveis?

Solução:

Analisando a situação, para o caso de 3 elementos compondo a ciranda, tem-se a seguinte regra de três simples:

Rodas distintas	Rodas iguais
1	3
x	$3!$

$$x = \frac{3!}{3} = \frac{3.2!}{3} = 2!$$

Analisando a situação, para o caso de 4 elementos compondo a ciranda, tem-se a seguinte regra de três simples:

Rodas distintas	Rodas iguais
1	4
x	$4!$

$$x = \frac{4!}{4} = \frac{4.3!}{4} = 3!.$$

Assim por diante, analisando a situação, para o caso de n elementos compondo a ciranda, tem-se a seguinte regra de três simples:

Rodas distintas	Rodas iguais
1	n
x	$n!$

$$x = \frac{n!}{n}$$

$$= \frac{n.(n-1)!}{n}$$

$$= (n-1)!.$$

Conclusão: Uma permutação circular com elementos é obtida fazendo:

$$(PC)_n = (n-1)!$$

Considere os exemplos 3 e 4 como aplicações da expressão de $(PC)_n$.

Exemplo

De quantos modos *n* casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher e que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

Solução:

Há

$$(PC)_n = (n-1)!$$

modos distintos de formar uma roda com as *n* mulheres. Depois disso, há dois modos de pôr os maridos na roda: à direita ou à esquerda de suas mulheres.

Portanto existem $2 \cdot (n-1)!$ modos distintos de formar à roda de ciranda.

2.5 Permutação de Elementos Nem Todos Distintos

Conforme foi estudado no item 2.3.1, o número de anagramas da palavra PRATICO é dado por: 7!, que a palavra PRATICO é formada por 7 letras todas distintas, mas como calcular o número de anagrama da palavra ANA?

Resposta:

Como ANA é uma palavra pequena, ela pode ser escrita com todas suas possibilidades do anagrama. Assim:

AAN, ANA, NAA.

Ou seja, o número de anagramas da palavra ANA são 3.

Note que ao utilizar a fórmula da permutação simples tem-se:

$$3! = 6 \neq 3.$$

E se fosse o da palavra ARARA?

Resposta:

Escrevendo todas as possibilidades do seu anagrama, temos:

AAARR, AARAR, AARRA, ARARA, ARRAA, RARAA, RRAAA, ARAAR, RAARA, RAAAR.

Ou seja, o número de anagramas da palavra ARARA são 10.

Pela fórmula de Permutação Simples teríamos:

$$5! = 120 \neq 10.$$

O que está acontecendo?

Note que supondo que podemos enumerar as letras iguais $A1, A2, A3$,R_1,R_2. Quando utilizamos o princípio da multiplicação contamos para

$A_1A_2A_3R_1R_2$, $A_1A_3A_2R_1R_2$, $A_2A_1A_3R_1R_2$, $A_2A_3A_1R_1R_2$, $A_3A_1A_2R_1R_2$, $A_2A_3A_1R_1R_2$,
$A_1A_2A_3R_2R_1$, $A_1A_3A_2R_2R_1$, $A_2A_1A_3R_2R_1$, $A_2A_3A_1R_2R_1$, $A_3A_1A_2R_2R_1$, $A_2A_3A_1R_2R_1$

Como sendo todas diferentes, quando na verdade são todas iguais ao anagrama AAARR.

No total conta-se 3!.2! quando na verdade deveria ter contado apenas 1.

Logo, o total de anagramas da palavra ARARA é $\frac{5!}{3!2!} = 10$.

Para a palavra ANA tem-se:

$$\frac{3!}{2!.1!} = 3.$$

Ou seja, de modo geral se existe uma palavra com n letras onde destas n tem-se $n_1, n_2, ..., n_p$ iguais de modo que $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$ então o número de anagramas diferentes com estas letras é

$$\frac{n!}{n_1!\ldots n_p!}$$

e denota-se este tipo quociente por

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_p}.$$

Abaixo são apresentados alguns exemplos de aplicações da fórmula da permutação com alguns elementos repetidos

Exemplo 5: Quantos números com 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos 1,1,1,1,2 e 3?

Solução:

Tem-se 1, 1, 1, 1 e 2 onde

$$P_5^{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5 \text{ números}.$$

Usando 1, 1, 1,1 e 3 onde há outros 5 números, pois, 1, 1, 1, 2 e 3 há

$$P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!1!1!} = 20 \text{ números}.$$

Assim; $5 + 5 + 20 = 30.$.

2.6 Arranjos Simples

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo simples de taxa k, a todo agrupamento de k elementos distintos dispostos numa certa ordem. Dois arranjos diferem entre si, pela ordem de colocação dos elementos. Assim, no conjunto $E = \{a, b, c\}$, tem-se:

a) Arranjos de taxa 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb.

b) Arranjos de taxa 3: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Representa-se pelo símbolo $A_{n,k}$ o número de arranjos de *n* elementos distintos tomados *k* a *k* e calculamos usando a fórmula:

$$A_{n.k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ou

$$A_{n,k} = \underbrace{n.(n-1).(n-2)\ldots}_{k \text{ elementos}}$$

Note que $A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$.

Veja os exemplos 7 e 8 que são característicos de Arranjos Simples.

Exemplo 7: Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0,1,2,...,9. O segredo do cofre é marcado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quanta tentativa deverá fazer (no máximo) para conseguir abri-lo?

2.6.1 Arranjos com repetição

Define-se arranjo com repetição, de *n* elementos tomados *p* a *p*, a todo grupo ordenado de *p* elementos escolhidos entre os *n* elementos disponíveis. Para tais problemas tais elementos *p* a serem escolhidos podem ser repetidos.

Considere o conjunto *A* = {2,3,4,5}, pode-se escrever todos os números com 2 elementos escolhidos entre os 4 elementos de *A*.

São eles: 23, 24, 25, 32, 42, 52, 34, 43, 45, 54, 22, 33, 44, 55, 35, 53.

Neste caso, o número de arranjos é representado por $AR_{4,2} = 16$ e que pelo PFC, tem-se:

$$4.4 = 4^2.$$

Assim de maneira geral para um conjunto com *n* elementos tomados *p* a *p* seu arranjo com repetição é dado por:

$$AR_{n,p} = n^p.$$

Os exemplos 9 e 10 típicos de arranjos com repetição.

Exemplo : Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9?

Solução:

Como os algarismos não são distintos, isso possibilita que se usem as mesmas quantidades de números tanto para a 1º, 2º e 3º posição, assim tem-se; $AR_{9,3} = 9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$.

Exemplo 10: Qual é o número total de anagramas que pode ser formado juntando três letras quaisquer de um alfabeto de 23 letras?

Solução:

Neste caso o número de anagramas será calculado utilizando a fórmula

$$AR_{23,3} = 23^3 = 23 \times 23 \times 23 = 12167$$

anagramas formadas com 3 letras, começando por *AAA* e terminando com *ZZZ*.

2.7 Combinações Simples

Define-se combinações simples de *n* elementos distintos tomados *k* a *k* aos conjuntos formados de *k* elementos distintos escolhidos entre os *n* elementos dados.

Representa-se pelo símbolo

$$C_{n,k}$$
$$\text{ou}$$
$$C_n^k$$

o número de combinações de *n* elementos tomados *k* a *k* e calcula-se usando a fórmula:

$$C_{n,k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

ou

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k}.$$

A diferença do Arranjo Simples para a Combinação Simples é que para o Arranjo Simples a ordem dos elementos é importante, ou seja faz diferença, enquanto para a Combinação Simples a ordem dos elementos não é importante, ou seja, se trocar a ordem dos elementos o resultado é o mesmo. Os exemplo 11 e 12 envolvem combinações simples.

2.7.1 Combinações Completas ou Com Repetição

Para introduzir a ideia de combinações com repetições, é apresentado um exemplo: De quantos modos é possível comprar 3 sorvetes em uma sorveteria que os oferece em 5 sabores?

Normalmente utiliza-se a seguinte solução

$$C_{5,3} = 10.$$

Esta resposta não está correta. Ela estaria certa caso a pergunta fosse: De quantos modos podemos escolher 3 sorvetes diferentes, em uma sorveteria que os oferece em 5 sabores? Essas 10 possibilidades representam as combinações simples de 5 elementos, tomados 3 a 3.

Na questão apresentada, a resposta correta seria

$$CR_{5,3},$$

que são as combinações completas de 5 elementos, tomados 3 a 3, ou seja, nesse caso admitiríamos a hipótese da pessoa escolher sabores repetidos.

O cálculo das combinações completas, seguirá um raciocínio com as permutações com elementos repetidos.

Para que haja uma melhor compreensão do problema inicial, deve-se supor supor que a sorveteria oferecesse os sabores: manga, abacaxi, goiaba, cereja e limão. Nas combinações simples, desses 5 sabores, tomados 3 a 3, só existiria composições do tipo: manga, abacaxi, goiaba ou goiaba, cereja, limão ou abacaxi, goiaba, limão, etc...Como se pode perceber, essa opção das combinações completas dará um resultado maior que na primeira, que gerou 10 possibilidades de escolha.

Pode-se encarar a solução do problema das combinações completas da escolha de 3 sabores (distintos ou não), numa sorveteria que oferece 5 opções de escolha, como sendo as soluções inteiras e não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$$

Tem-se, portanto, 5 variáveis que representam a quantidade comprada, de cada um dos sabores oferecidos.

No exemplo da sorveteria:

$$CR_{5,3}$$
$$= P_7^{3,4}$$
$$= \frac{7!}{3!\,4!} = 35.$$

Pode-se então concluir, sobre as combinações completas de ***n*** elementos, ***p*** a ***p***.

$$CR_{n,p} = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!\,p!}.$$

Uma importante propriedade: As combinações com repetição podem também ser transformadas em combinações simples equivalentes de acordo com a relação:

$$CR_{n,p} = C_{n+p-1,p}$$

Os exemplos 13, 14 e 15 são de aplicações das Combinações Completas.

Exemplo: De quantos modos pode comprar 4 salgadinhos em uma lanchonete que oferece 7 opções de escolha de salgadinhos?

Solução:

Tem-se que em primeiro lugar determinar a quantidade de soluções inteiras positivas de uma equação do tipo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4.$$

Logo a solução será dada por;

$$CR_{7,4} = P_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!4!} = 210.$$

Exemplo 14: Podendo escolher entre 5 tipos de queijo e 4 marcas de vinho, de quantos modos é possível fazer um pedido num restaurante, com duas qualidades de queijo e 3 garrafas de vinho?

Solução:

Primeiramente escolhe-se os dois tipos de queijos entre os 5 disponíveis (distintos ou não), isto será igual a

$$CR_{5,2} = P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!2!} = 15,$$

depois se escolhe 3 garrafas entre os 4 vinhos disponíveis, ou seja,

$$CR_{4,3} = P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20,$$

assim o número de pedidos de queijos e vinhos, de acordo como proposto na questão, deverá ser dado por 15x 20 = 300

3 I PROPOSTAS DE EXPERIMENTAÇÃO PARA A ANÁLISE COMBINATÓRIA COM O AUXÍLIO DE MATERIAL CONFECCIONADO DE MIRITI

Nesse tópico é apresentado proposta de trabalho em sala de aula que podem ser utilizados pelos professores quando ministrarem análise combinatória. Deve-se atentar que é necessária a atenção do professor para as escolhas de cada experimentação, isso deve levar em consideração o contexto do aluno, o nível de entendimento e a disponibilidade de se trabalhar na sala ou no laboratório de matemática. Para esses problemas, utilizam plaquinhas de material concfeccionados de miriti como recurso na aplicabilidade e slução do problema proposto

ATIVIDADE	OBJETIVOS
Construção de Anagramas	Mostrar as diversas formas de se realizar a permutação dos nomes dos alunos com o uso de blocos de miriti
Números de vestimentas	De quantas maneiras o aluno pode se vestir se tiver calças, camisas e sapatos de cores diferentes
Permutação de livros	Permutar os livros de forma que cada coleção especifica não se misture

Tabela 1: Atividades de experimentação

Fonte: Acervo dos autores

3.1 A construção de anagramas com o recurso de blocos de miriti

3.1.1 Material utilizado

O material utilizado para a confecção desse experimento consiste em em considerar o alfabeto da língua portuguesa construído em quadrados de miriti (**Figura 1**)

2º PASSO cosntrução dos anagramas a partir dos seguintes nomes:

ALICE CARLOS MARIA ANA JOÃO VIVIANE

Nesse caso, o professor poderá mostrar por meio do uso do fatorial explicar o numero de anagramas que cada aluno pode ter. Observe o esquema a seguir

A
L L
I I I
C C C C
E E E E E
5 4 3 2 1

Ou seja, há 5 maneiras de escolher uma letra para a primeira posição, 4 para a segunda, 3 para a terceira, 2 para a quarta e 1 para a quinta.

Usando a notação fatorial, tem-se que

$$5! = 5.4.3.2.1 = 60$$

Quer dizer que com a palavra ALICE, existem 60 anagramas.

3.1.2 A construção de maneiras de se vestir de maneiras distintas

Masculino

Para n pequeno

Camisas **Calça** **sapatos**

Fonte: Acervo dos autores

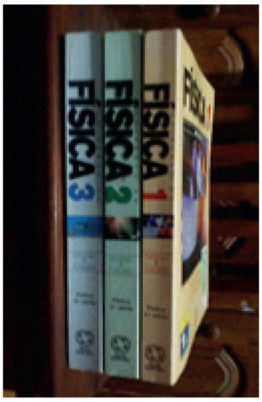
- Procedimento:

Primeiramente distribuem-se três casas sobre a mesa (A, Z e R), em seguida, coloca-se uma estrada entre A e Z e outra entre Z e R. Sucessivamente vai sendo colocadas mais estradas entre elas. O objetivo desta primeira etapa é que o sujeito compreenda a diferença entre “estradas” e “caminhos”, visto que ligando mais de uma estrada podemos obter um único caminho. Em sala de aula o professore poderá levar as plaquinhas de miriti e aplicar esse problema para os alunos, mostrando a importância do recurso para uma melhor compreensão do problema.

3.1.3 Permutação de livros de mesma coleção

Um dos problemas que o professor poderá utilizar em aulas experimentais, consiste em levar para a sala de aula plaquinhas de miriti com diferentes cores escritos em nomes de livros de Química, Física e Geografia . O objetivo desse problema consiste ensinar o aluno como deve permutar as coleções entre si sem no entanto, separá-las das coleções.

Química



Física

Geografia

A solução desse problema se baseia em determinar o número de possibilidades que se deve permutar cada coleção sem que os separe entre si.

Solução do problema.

Considere que cada coleção seja representada por quadrinhos (Figura 2)

Podem-se permutar essas coleções. Assim sendo, existem 3 possibilidade de escolher cada coleção. Suponha-se que a primeira coleção escolhida seja de Física. Logo, tem-se que há apenas duas restantes. Considere que a segunda possibilidade seja a de Química ou de Geografia e por fim há apenas uma possiblidade. Logo, pode-se concluir que as permautações das coleções dadas de Química, Física e Geografia seja de 3!.

Desse modo, pode-se considerar que o numero de possibilidade para as permutações das coleções, será

$$N = 6.$$

Deve-se considerar as permutações para cada coleção.

Para a coleção de Quimica, Tem-se que

COLEÇÃO DE QUÍMICA 1 | COLEÇÃO DE QUÍMICA 2 | COLEÇÃO DE QUÍMICA 3

Como as coleções devem ser permutadas entre si, pode-se considerar que. Existem três possibilidades de colocar na primeira posição qualquer um dos tres livros de química, duas possibilidade para a segunda posição e uma possibilidade para a terceira posição.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a abordagem do tema, por meio das revisões bibliográficas, a proposta de se trabalhar com a experimentação é muito válida e permite o aluno possa interagir com a construção da solução do problema estudado. A experimentação em sala de aula é útil porque o professor poderá realizar, considerando o conhecimento que o aluno possui e a partir disso organizar os planos de aula.

A experimentação por si não suficiente para que problemas de ensino e aprendizagem sejam solucionados de maneira rápida e efetiva. A experimentação é na verdade uma proposta direcionada ao professor, que por meio de suas análise de turma consegue criar em sala de aula um ambiente de participação de todos. Essa participação é inerente na experimentação, em que o aluno tem que interagir com a teoria, sabendo dos conceitos e definições para poder ter eficiência na prática de sala de aula.

Por meio do trabalho desenvolvido, tornou-se evidente que a experimentação nas aulas de matemática se torna um auxílio substancial para a ocorrência a aprendizagem significativa, melhorando o processo de ensino e aprendizagem em todos as etapas e anos de ensino.

Dada à importância do assunto, e a limitação do tema, torna-se necessário um aprofundamento nessa área de conhecimento que venha contribuir para que pesquisas nesse sentido sejam desenvolvidas de maneira significativa no ensino de matemática com ênfase na experimentação, considerando a aprendizagem significativa. Desse modo, a proposta aqui apresentada é uma parte de um todo que ainda está em desenvolvimento e precisa ser aprimorado, investigado de maneira sistemática para que outras propostas sejam apresentadas e que venham contribuir para o ensino de matemática de maneira significativa.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. L. de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática:** um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio. 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

ALMEIDA, A. L. de; FERREIRA, A. C. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática.** Ouro Preto: UFOP, 2010. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/livreto_Adriana_Luzie.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2019.

BARROSO, J. M. **Conexões com a matemática**: ensino médio. São Paulo: Moderna, 2010.v. 2, 440 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília, 2006. 137 p.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: **ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 1998. 58 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2019.

BRASIL. **PCN+ ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, 2010. 144 p.

CARNEIRO, M. J. D.; SPIRA, M.; SABATUCCI, J. Matemática: ensinos fundamental e médio. Belo Horizonte: Secretaria de Estado de educação de Minas Gerais, 2007. 80 p. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7B4DA513B4-3453-4B47-A322-13CD37811A9C%7D_Matem%C3%A1tica%20final.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2019.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, C. (Org.). Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 1998. 176 p.

DANTE, L. R. **Matemática: ensino médio**, volume único. São Paulo: Ática, 2005. 504 p.

DURO, Mariana Lima. **Análise Combinatória e Construção de Possibilidades**: O raciocínio formal no ensino médio. 2012.

HUANCA, R. R. H. **A resolução de problemas no processo ensino aprendizagem**: avaliação de matemática na e além da sala de aula. 2006. 247 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações, ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 2, 320 p.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

MORGADO, A. C. O. et al**. Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. 343 p. (Coleção do Professor de Matemática).

MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira, CARVALHO, João Bosco Pitombeira, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque. MALAGUTTI, Pedro Luiz Ap. artigo científico: **Atividades Experimentais de Análise Combinatória no Ensino Médio em uma Escola Estadual**. Disponível em: www.enrede.ufscar.br/participantes_arquivos/E5_Vazquez_TA.pdf. Acesso em: 20 de mar. 2019.

TADEU, Walter. Análise combinatória. Disponível em: http://professorwaltertadeu.mat.br/. Acesso em 15 de jun. 2019.

OGLIARI, L. N. A Matemática no Cotidiano e na Sociedade: perspectivas do aluno do ensino médio. 2008. 146 f. Dissertação de Mestrado. – Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

D'AMBROSIO, B. S. Como Ensinar Matemática Hoje? SBEM, Brasília, ano 2, n.2, p.15-19, 2010.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

SOBRE OS ORGANIZADORES

Raissa Rachel Salustriano da Silva-Matos: Graduada em Ciências Biológicas pela Universidade de Pernambuco - UPE (2009), Mestre em Agronomia - Solos e Nutrição de Plantas pela Universidade Federal do Piauí - UFPI (2012), com bolsa do CNPq. Doutora em Agronomia pela Universidade Federal da Paraíba - UFPI (2016), com bolsa da CAPES. Atualmente é professora adjunta do curso de Agronomia do Centro de Ciências Agrárias e Ambientais (CCAA) da Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Tem experiência na área de Agronomia, com ênfase em fitotecnia, fisiologia das plantas cultivadas, propagação vegetal, manejo de culturas, nutrição mineral de plantas, adubação, atuando principalmente com fruticultura e floricultura. E-mail para contato: raissasalustriano@yahoo.com.br; raissa.matos@ufma.br Lattes: http://lattes.cnpq.br/0720581765268326

Nitalo André Farias Machado: Possui graduação em Agronomia (2015) e mestrado em Ciência Animal (2018) pela Universidade Federal do Maranhão. Atualmente é aluno regular do doutorado em Engenharia Agrícola pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Possui experiência na área de Engenharia Agrícola, com ênfase em Ambiência e Bioclimatologia, atuando principalmente nos seguintes temas: biometeorologia, bem-estar animal, biotelemetria, morfometria computacional, modelagem computacional, transporte de animais, zootecnia de precisão, valorização de resíduos, análise de dados e experimentação agrícola. E-mail para contanto: nitalo-farias@hotmail.com. Lattes: http://lattes.cnpq.br/3622313041986385

Hosana Aguiar Freitas De Andrade: Graduada em Agronomia (2018) pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Atualmente é mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ciência do Solo pela Universidade Federal do Ceará (PPGCS/UFC) como bolsista CAPES. Possui experiência na área de fertilidade do solo, adubação e nutrição de plantas, com ênfase em aproveitamento de resíduos na agricultura, manejo de culturas, propagação vegetal, fisiologia de plantas cultivadas e emissão de gases do efeito estufa. E-mail para contato: hosana_f.andrade@hotmail.com. Lattes: http://lattes.cnpq.br/5602619125695519

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E