



**Raissa Rachel Salustriano da Silva-Matos
Nitalo André Farias Machado
Hosana Aguiar Freitas De Andrade
(Organizadores)**

As Ciências Exatas e da Terra e a Interface com vários Saberes 2



**Raissa Rachel Salustriano da Silva-Matos
Nitalo André Farias Machado
Hosana Aguiar Freitas De Andrade
(Organizadores)**

As Ciências Exatas e da Terra e a Interface com vários Saberes 2

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Diagramação: Geraldo Alves

Edição de Arte: Lorena Prestes

Revisão: Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie di Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná

Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Msc. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adailson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Msc. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Msc. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Msc. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
 Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
 Prof. Msc. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
 Prof. Msc. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
 Prof^a Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
 Prof. Msc. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
 Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
 Prof^a Msc. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
 Prof^a Msc. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
 Prof^a Dr^a Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
 Prof. Msc. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
 Prof. Msc. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual de Maringá
 Prof. Msc. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
 Prof^a Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
 Prof^a Msc. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
 Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
 (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)**

C569 As ciências exatas e da terra e a interface com vários saberes 2
 [recurso eletrônico] / Organizadores Raissa Rachel Salustriano
 da Silva-Matos, Nitalo André Farias Machado, Hosana Aguiar
 Freitas de Andrade. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2020. –
 (As Ciências Exatas e da Terra e a Interface com Vários
 Saberes; v. 2)

Formato: PDF
 Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
 Modo de acesso: World Wide Web
 Inclui bibliografia
 ISBN 978-85-7247-908-0
 DOI 10.22533/at.ed.080201301

1. Ciências exatas e da terra. 2. Engenharia. I. Silva-Matos,
 Raissa Rachel Salustriano da. II. Machado, Nitalo André Farias.
 III. Andrade, Hosana Aguiar Freitas de. IV. Série.

CDD 507

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
 Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

Os grandes avanços tecnológicos e o desenvolvimento no campo das Ciências Exatas e da Terra fizeram com que essa grande área do conhecimento ganhasse uma forte interface com diferentes áreas dos saberes, da agricultura à pedagogia, completando o aspecto da didática-aprendizagem, recursos ambientais e saúde.

O leitor de “As Ciências Exatas e da Terra e a Interface com Vários Saberes 2” terá oportunidade de conhecer as discussões atuais sobre e profundas relações das Ciências Exatas e da Terra permeando com outras áreas do conhecimento, pois esta obra apresenta uma refinada coletânea de trabalhos científicos relacionados a essa temática.

Portanto, esta obra é direcionada a todos os técnicos, acadêmicos e profissionais das áreas das Ciências Exatas e da Terra e das demais áreas que, por ventura, tenham interesse em contemplar as relações e interface das Ciências Exatas e da Terra. Nesse sentido, ressaltamos a importância desta leitura de forma a incrementar o conhecimento dos nossos leitores.

Desejamos uma ótima leitura.

Raissa Rachel Salustriano da Silva-Matos

Nítalo André Farias Machado

Hosana Aguiar Freitas de Andrade

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
A IMPORTÂNCIA DA VERTENTE FRANCESA DIDÁTICA PROFISSIONAL NO CENÁRIO EDUCACIONAL BRASILEIRO	
Georgyana Gomes Cidrão Italândia Ferreira de Azevedo Francisco Régis Vieira Alves Maria Cleide da Silva Barroso	
DOI 10.22533/at.ed.0802013011	
CAPÍTULO 2	10
ALTERAÇÕES ESPAÇO-TEMPORAIS NA PLANÍCIE FLÚVIO-MARINHA DO RIO ACARAÚ ENTRE OS ANOS 1993 E 2016	
Francisco Oricélio da Silva Brindeiro Antônio Rodrigues Ximenes Neto Brígida Miola Rocha Francisco José Maciel de Moura Jader Onofre de Moraes	
DOI 10.22533/at.ed.0802013012	
CAPÍTULO 3	16
APLICAÇÃO DE CONTORNOS ATIVOS NA EXTRAÇÃO DE FEIÇÕES EM IMAGENS LANDSAT 8 E CBERS 4	
Cleberton Reiz Rodrigo Bruno Zanin Erico Fernando de Oliveira Martins Jordan Luiz Dourado Filgueiras Jader Willian Evaristo	
DOI 10.22533/at.ed.0802013013	
CAPÍTULO 4	22
AVANÇOS RECENTES NA OXIDAÇÃO DE ÁLCOOL BENZÍLICO SOBRE CATALISADORES DE OURO E PALÁDIO	
Wiury Chaves de Abreu Jean Claudio Santos Costa Carla Verônica Rodarte de Moura Edmilson Miranda de Moura	
DOI 10.22533/at.ed.0802013014	
CAPÍTULO 5	37
DESENVOLVIMENTO DE UM APLICATIVO PARA PROFISSIONAIS DE FÍSICA MÉDICA	
Eduardo Rossato Alessio Mateus Padoin Brutti Francine Kohls Schumacker Gustavo Stangherlin Cantarelli Ana Paula Schwarz	
DOI 10.22533/at.ed.0802013015	

CAPÍTULO 6	46
ELETRODEPOSIÇÃO DE FILMES DE POLIANILINA EM METAIS OXIDÁVEIS A PARTIR DE MEIO AQUOSO CONTENDO ÁCIDO METANOSULFÔNICO	
David Alexandro Graves Andrea Santos Liu Liu Yao Cho	
DOI 10.22533/at.ed.0802013016	
CAPÍTULO 7	58
ENSINO DAS GEOCIÊNCIAS NO LABORATÓRIO DE PEDOLOGIA E GEOLOGIA DA UNIOESTE, <i>CAMPUS</i> DE MARECHAL CÂNDIDO RONDON	
Oscar Vicente Quinonez Fernandez	
DOI 10.22533/at.ed.0802013017	
CAPÍTULO 8	70
ENSINO DE ASTRONOMIA E TEORIA QUÂNTICA USANDO O FUNCIONAMENTO DE UMA LÂMPADA FLUORESCENTE	
Márcio Francisco dos Santos Carolina Marla Rodrigues Vanessa Aparecida Ferreira	
DOI 10.22533/at.ed.0802013018	
CAPÍTULO 9	82
ESTUDO DA SÉRIE DE TAYLOR E APLICAÇÃO	
Jociléa Rodrigues Cardoso José Francisco da Silva Costa Anildo das Chagas Dias Nayara dos Santos Rodrigues Raimundo das Graças Carvalho de Almeida Reginaldo Barros Genivaldo Passos Correa	
DOI 10.22533/at.ed.0802013019	
CAPÍTULO 10	108
ESTUDO DO MÉTODO DE EXTRAÇÃO DE PROTEÍNAS DE CARNE BOVINA (<i>BOS TAURUS</i>), UTILIZANDO PLANEJAMENTO FATORIAL E METODOLOGIA DE SUPERFÍCIE DE RESPOSTA	
Jane Kelly Sousa de Brito Tiago Linus Silva Coelho Darlisson Slag Neri Silva Jardes Figueredo Rego Naise Mary Caldas Silva	
DOI 10.22533/at.ed.08020130110	
CAPÍTULO 11	121
FERRAMENTA DE REALIDADE AUMENTADA UTILIZANDO KINECT PARA ESTUDOS TOPOGRÁFICOS	
Bruno dos Santos Belaguarda Alessandro André Mainardi de Oliveira Gustavo Stangherlin Cantarelli Guilherme Chagas Kurtz	

DOI 10.22533/at.ed.08020130111

CAPÍTULO 12 135

FITÓLITOS DE PLANTAS E SOLOS DA MATA ATLÂNTICA NA ILHA GRANDE, RIO DE JANEIRO

Heloisa Helena Gomes Coe
Yame Bronze Medina Ramos
André Luiz Carvalho da Silva
Emily Gomes
Leandro de Oliveira Furtado de Sousa
Kita Damasio Macario
Raphaella Rodrigues Dias

DOI 10.22533/at.ed.08020130112

CAPÍTULO 13 149

MANUAL DE PROTEÇÕES SOLARES: AUXILIO NO ENSINO DE CONFORTO AMBIENTAL

Yuri Viana Loiola
Flora Mendes Araújo Lima

DOI 10.22533/at.ed.08020130113

CAPÍTULO 14 155

MODELAGEM FENOMENOLÓGICA E OTIMIZAÇÃO DE UM SECADOR DE CAFÉ ROTATIVO

Uilla Fava Pimentel
Gildeir Lima Rabello
Willian Melo Poubel

DOI 10.22533/at.ed.08020130114

CAPÍTULO 15 162

PRAIAS ABRIGADAS NO LITORAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Ana Beatriz Pinheiro
André Luiz Carvalho da Silva
Maria Augusta Martins da Silva
José Antonio Baptista Neto
Carolina Pereira Silvestre
Jessyca dos Santos Araújo
Valéria Cristina Silva Pinto

DOI 10.22533/at.ed.08020130115

CAPÍTULO 16 176

PROCESSO DE MODELAGEM PARA FORMAÇÃO DA BASE DE DADOS ACÚSTICOS PARA O MAPEAMENTO DE RUÍDO DE SINOP-MT

Priscila Maria Gonçalves Guilherme
Cristiane Rossatto Candido
Emília Garcez da Luz
Érika Fernanda Toledo Borges Leão

DOI 10.22533/at.ed.08020130116

CAPÍTULO 17	190
PROTEÇÃO DA LIGA DE ALUMÍNIO 2024 CONTRA CORROSÃO POR FILMES DE POLIPIRROL ELETRODEPOSITADOS EM MEIO DE LÍQUIDO IÔNICO	
Julio Cesar Verli Chagas Andrea Santos Liu	
DOI 10.22533/at.ed.08020130117	
CAPÍTULO 18	194
REFLEXÕES PROJETUAIS: O CASO DA DISCIPLINA DE CONFORTO AMBIENTAL	
Yuri Viana Loiola Thais Carvalho Cardoso Ana Paula Nogueira Vidal Menezes Ana Caroline de Carvalho Lopes Dantas Dias	
DOI 10.22533/at.ed.08020130118	
CAPÍTULO 19	198
USO DO MIRITI COMO RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA	
Anildo das Chagas Dias Jociléa Rodrigues Cardoso José Francisco da Silva Costa Nayara dos Santos Rodrigues Raimundo das Graças Carvalho de Almeida Reginaldo Barros Genivaldo Passos Correa	
DOI 10.22533/at.ed.08020130119	
CAPÍTULO 20	219
VARIABILIDADE MULTITEMPORAL DA LINHA DE COSTA DA PRAIA DO BALBINO, CASCAVEL – CEARÁ	
Francisco Oricélio da Silva Brindeiro Filipe Maciel de Moura Francisco José Maciel de Moura Jader Onofre de Moraes	
DOI 10.22533/at.ed.08020130120	
SOBRE OS ORGANIZADORES	227
ÍNDICE REMISSIVO	228

ESTUDO DA SÉRIE DE TAYLOR E APLICAÇÃO

Data de aceite: 10/12/2019

Jociléa Rodrigues Cardoso

Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais-Campus Abaetetuba-Pa

José Francisco da Silva Costa

Universidade Federal do Pará. Faculdade de Formação e Desenvolvimento do Campo – FADECAM. Abaetetuba - Pa
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9492719731740641>

Anildo das Chagas Dias

Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais- Campus Abaetetuba-Pa

Nayara dos Santos Rodrigues

Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais- Campus Abaetetuba-Pa
<http://lattes.cnpq.br/7315572003866689>

Raimundo das Graças Carvalho de Almeida

Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais- Campus Abaetetuba-Pa
<http://lattes.cnpq.br/8447434150719179>

Reginaldo Barros

Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais- Campus Abaetetuba-Pa
<http://lattes.cnpq.br/9658271624403087>

Genivaldo Passos Correa

Universidade Federal do Pará. Faculdade Ciências Exatas e Naturais- Campus Abaetetuba-Pa
<http://lattes.cnpq.br/6321452953013620>

RESUMO: O presente trabalho procura apresentar os conceitos e aplicabilidade da série de Taylor na forma exponencial complexa e não complexa, mostrando do ponto de vista gráfico que a função continua considerada e a expansão dela em série, podem ser compreendidas no plano cartesiano como uma convergência de várias funções à medida que são representadas pelos termos da série, convergindo para o gráfico da função original. Para uma melhor compreensão dessa convergência, utilizam-se a função exponencial, cosseno e seno levando em conta a tração delas com os traçados dos gráficos das funções representadas pelos termos da série. Aplica-se a série de Taylor em dois importantes problemas físicos relacionados com movimentos de corpos em meios fluidos para um pequeno valor de coeficiente de atrito para mostrar a importância da série de Taylor nessa área de conhecimento. A aplicabilidade dessas representações surge devido algumas dificuldades, como aproximar o valor numérico de funções na vizinhança de um ponto específico ou encontrar máximos e mínimos, que de modo direto não apresenta

tanta precisão e por isso se torna mais conveniente representar tais funções por séries. Desse modo, utilizando à pesquisa qualitativa, especificamente de revisão bibliográfica, a metodologia desenvolvida foi capaz de apresentar de modo satisfatório a relevância das séries de Taylor no das aproximações numéricas das funções.

PALAVRAS-CHAVE: Série de Taylor. Função exponencial. Aplicações.

ABSTRACT: The present work seeks to present the concepts and applicability of the Taylor series in a complex and non-complex exponential form, showing graphically that the function continues to be considered and its expansion in series can be understood in the Cartesian plane as a convergence of several functions as they are represented by the terms of the series, converging on the graph of the original function. For a better understanding of this convergence, we use the exponential, cosine and sine function taking into account their traction with the graphs of the functions represented by the terms of the series. The Taylor series is applied to two major physical problems related to fluid movement of bodies for a small friction coefficient value to show the importance of the Taylor series in this area of knowledge. The applicability of these representations arises due to some difficulties, such as approximating the numerical value of functions in the vicinity of a specific point or finding maximums and minima, which directly does not present such precision and therefore it is more convenient to represent such functions by series. Thus, using the qualitative research, specifically literature review, the developed methodology was able to satisfactorily present the relevance of the Taylor series in the numerical approximations of functions.

KEYWORDS: Taylor series. Exponential Function Applications.

1 | INTRODUÇÃO

O presente artigo procura abordar um estudo sobre a série de Taylor enfatizando importantes aplicabilidade nas áreas da Matemática e da Física para que seja possível mostrar o quanto é útil conhecer a série de Taylor para interpretar e resolver problemas que exigem aproximações para pequenos intervalos da variável x ou de um outro parâmetro. O tema se justifica considerando que, por meio desse trabalho, o texto apresentado permite que na área de matemática seja possível compreender que a série de Taylor possui muitas aplicabilidade, como por exemplo no desenvolvimento da trigonometria com o auxílio da fórmula de Euler, nas determinações das tábuas trigonométricas, logarítmicas e de raízes quadradas, cúbicas e etc.

Dessa forma, o estudo permite que as teorias desenvolvidas possa estimular o leitor, buscando o interesse na compreensão de terçados de gráficos a partir dos termos da série, levando a uma comparação com a função originária da série. No estudo de alguns problemas físicos, como lançamento de corpos com resistência do ar, a série pode ser útil para verificar as funções horárias da posição, velocidade e aceleração do corpo por aproximações, recaindo no caso ideal. Para o movimento

harmônico simples, com a utilização da fórmula de Euler oriunda do conhecimento das expansões em série da exponencial, cossenoide e senoide, tornou-se possível realizar aplicabilidade para determinação da função horário de um corpo que realiza um MHS (movimento harmônico simples)

Por isso, este trabalho tem como objetivo apresentar os conceitos e as aplicabilidades da série de Taylor, abordando a conceituação e algumas relevantes aplicabilidades. Para tanto, os procedimentos técnicos a serem utilizados é de pesquisas bibliográficas sendo elaboradas por meio de materiais em sites como livros e artigos relacionados com o tema, fornecendo conceitos, teoremas, demonstrações, evidenciando a relevância desse assunto para a matemática.

Quanto aos objetivos específicos, enfatizar um estudo sobre as séries com aplicação no teste da razão e da raiz para identificar a convergência e e divergência; Compreender alguns importantes conceitos dos números complexos relacionados com a forma polar e formulas de Moivre, tendo em vista que a fórmula de Euler é uma representação desses números; Mostrar um desenvolvimento em série de Taylor e aplicabilidade em diferentes problemas nas áreas da Matemática e da Física assim como traçados de gráficos para melhor entender os extremantes da função (máximo e mínimo).

2 | HISTÓRICO DA SÉRIE, MÁXIMO E MÍNIMO E APLICAÇÕES

Nesse tópico são definidas e desenvolvidas as séries numéricas e suas propriedades e Algumas vezes se necessário representar funções por séries, mais especificamente série de potências. Entretanto, é preciso definir série de potência, estudar as principais propriedades e, além disso, verificar que uma classe restrita de funções é representada através da mesma.

2.1 Histórico Sobre As Séries

A fim de obter a área de um segmento parabólico, Arquimedes (≅ 250 a.C.) necessitou calcular a soma da progressão

$$1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots = \frac{4}{3}$$

Que em outras palavras representa uma PG de razão $q = 1/4$.

Nesse caso se considerar que a sequencia conduz termo para o infinito, pode-se usar a notação de uma PG infinita. Isto é,

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Sendo $a_1 = 1$, obtém-se para essa soma,

$$S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

O que mostra que a soma de todos os termos é dada por 4/3.

Embora o cálculo não tenha sido feito por processos infinitos, que eram mal vistos naquele tempo, este foi um dos primeiros cálculos de somas infinitas. Por volta de 1350, utilizando “processos infinitos”, R. Suiseth (mais conhecido como Calculator) resolveu um problema sobre latitude de formas, equivalente ao cálculo da soma

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots = 2$$

Se for realizado nessa série o teste da razão. Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k$$

Vem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{2^{n+1}} / \frac{n}{2^n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \right) = 1/2$$

O que mostra ser a série convergente pelo teste da razão.

(Calculator deu uma longa prova verbal, pois não conhecia representação gráfica).

Outros avanços relacionados com séries foram obtidos (em 1668) por J. Gregory e N. Mercator, que trabalharam as chamadas “séries de potências de x”. Estas séries foram usadas para exprimirem funções conhecidas, como $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc. Gregory utilizou que a área sob a curva da função (**Gráfico 1**)

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

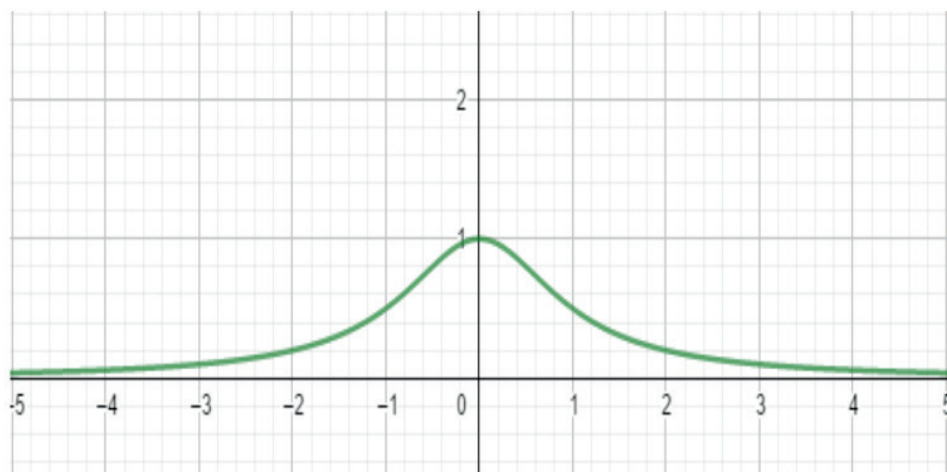


Gráfico 1: Representação gráfica da função y estudado por Gregory.

Fonte: Acervo dos autores

é obtida através da função $\arctg x$ (**Gráfico 2**). Desse fato, concluiu que

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

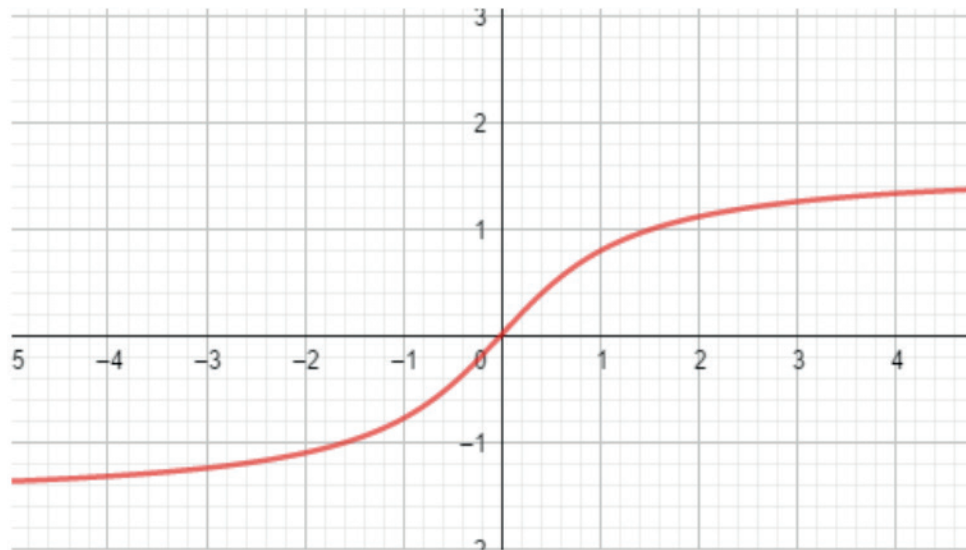


Gráfico 2: Esboço do gráfico do $\arctg x$

Fonte: Acervo da autora (JOCILEA , 2019)

Este resultado é conhecido como “série de Gregory”.(**Gráfico 3**)

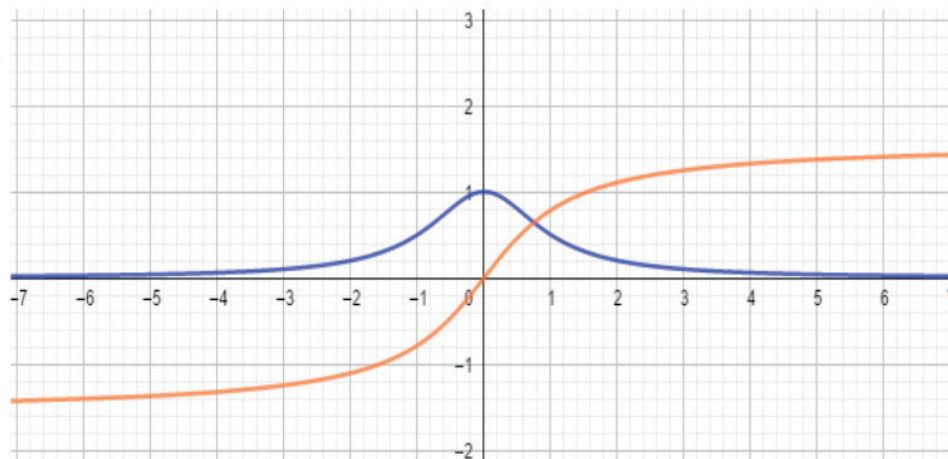


Gráfico 3: Representação gráfica das funções $y=1/(1+x^2)$ (cor laranja) e $y=\arctg x$ (cor azul)

Fonte: Acervo dos autores

Por sua vez, Mercator usou que a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{1+x}$ (**Gráfico 4**) entre 0 e x é $\ln(1+x)$ (**no mesmo gráfico 4**) para chegar à expressão (C. Boyer, pgs. 265, 266)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots ,$$

chamada hoje de “série de Mercator” .

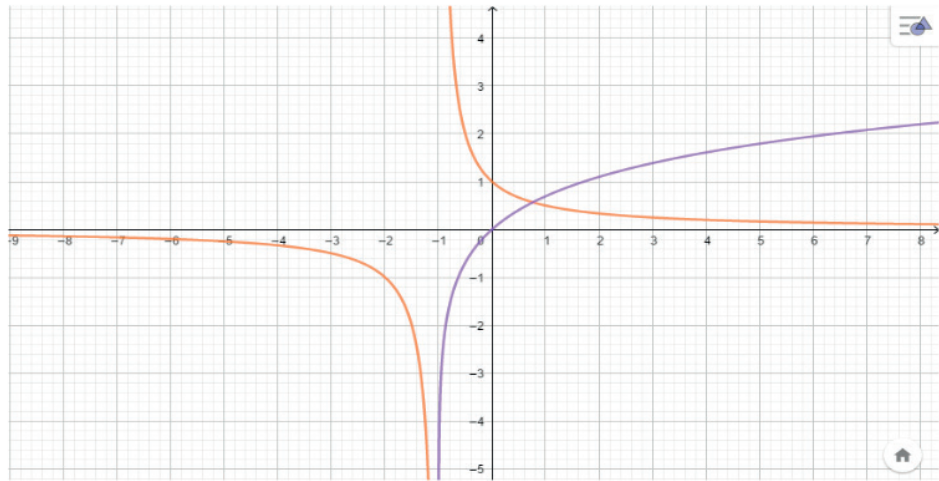


Gráfico 4: Esboço do gráfico da função $y=1/(1+x)$ (em laranja) e da função $y = \ln(1+x)$

Fonte: Acervo dos autores

È obvio que esses matemáticos deveriam chegar a mesma área, pois tendo em vista que

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x)$$

E que

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{artg} x$$

A menos da constante de integração.

Em 1748, L. Euler publicou o texto *Introductio in analysin infinitorum*, em dois volumes. O primeiro deles versava sobre processos infinitos, entre os quais séries infinitas. Euler era pouco cuidadoso no uso de tais séries, e as manipulava arriscadamente. Usando a série da função

$$\operatorname{sen} z = z - z^3/3! + z^5/5! - \dots$$

e de artifícios engenhosos, Euler conseguiu resolver uma difícil questão que J. Bernoulli não tivera sucesso, a de obter a soma dos recíprocos dos quadrados perfeitos. Após alguns cálculos, Euler obteve que (C.Boyer pg 307).

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \frac{1}{(4\pi)^2} + \dots = \frac{1}{6} ,$$

Ou

$$\frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{6}$$

e se conclui que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Outros nomes ilustres no Sec. XIX compõem o cenário que trata da convergência das séries numéricas e das séries de funções, como Lagrange, Laplace, Dirichlet, Fourier, Cauchy, Bolzano e Weierstrass.

2.2 Análise de máximo e mínimo com ênfase na série de Taylor

Considere os intervalos $(a - h, a)$ e $(a, a + h)$

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo dado. Suponha que $f(x)$ seja uma máxima em a . Nesse caso, se $f(a)$ é um máximo pode-se concluir que $f(a) > f(a - h)$, ou seja, a função é crescente no intervalo $(a - h, a)$ e como $f(a) > f(a + h)$ e, portanto, decrescente no intervalo $(a, a + h)$. Nesse caso, tem-se que $f(a) < f(a - h)$ e $f(a + h) > f(a)$. Isto é, a função é decrescente no intervalo $(a - h, a)$ e crescente em $(a, a + h)$.

Observa-se ainda do ponto de vista geométrico que $f'(a) = 0$.

Pode-se usar a fórmula de Taylor para observar esse caso com mais detalhes e do ponto de vista puramente analítico.

Expondo-se $f(a - h)$ em série de Taylor, vem que,

$$f(a - h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) - \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}(a) + \dots$$

E de modo análogo para , vem que,

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}(a) + \dots$$

Vamos considerar apenas os três primeiros termos da série. Isto é,

$$f(a - h) - f(a) = -f'(a)h + \frac{h^2}{2!} f''(a)$$

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + \frac{h^2}{2!} f''(a)$$

Como se pode considerar que $f'(a) = 0$

Vem que,

$$f(a - h) - f(a) = \frac{h^2}{2!} f''(a)$$

$$f(a + h) - f(a) = \frac{h^2}{2!} f''(a)$$

Ou se a função apresenta um mínimo, vem que, $f(a - h) - f(a) > 0$, logo,

$$f''(a) > 0$$

e

$$f(a + h) - f(a) > 0$$

Logo, $f''(a) > 0$.

Isso mostra que se a função possui uma 2ª derivada positiva a função apresenta um mínimo em $f(a)$.

Para o caso de um ponto ser máximo, vem que,

$$f(a - h) - f(a) = \frac{h^2}{2!} f''(a)$$

$$f(a + h) - f(a) = \frac{h^2}{2!} f''(a)$$

Se a função apresenta um máximo, vem que,

$$f(a - h) - f(a) < 0 \quad \text{ou} \quad f(a) > f(a - h)$$

$$f(a + h) - f(a) < 0 \quad \text{ou} \quad f(a) > f(a + h)$$

Nesse caso, tem-se que $f''(a) < 0$.

Vamos supor que $f''(a) = 0 \rightarrow$

$$f(a - h) - f(a) = -f'''(a) \frac{h^3}{3!} + f^{IV}(a) \frac{h^4}{4!}$$

$$f(a + h) - f(a) = f'''(a) \frac{h^3}{3!} + f^{IV}(a) \frac{h^4}{4!}$$

Se $f'''(0) = 0 \rightarrow$

$$f(a - h) - f(a) = f^{IV}(a) \frac{h^4}{4!}$$

$$f(a + h) - f(a) = f^{IV}(a) \frac{h^4}{4!}$$

$$\text{Se } f(a - h) - f(a) < 0 \rightarrow f(a) > f(a - h)$$

$$f(a + h) - f(a) < 0 \rightarrow$$

Logo, a função passa por máximo.

$$\text{Se } f(a - h) - f(a) > 0 \rightarrow f(a) < f(a - h)$$

$$f(a + h) - f(a) < 0 \rightarrow f(a) < f(a + h)$$

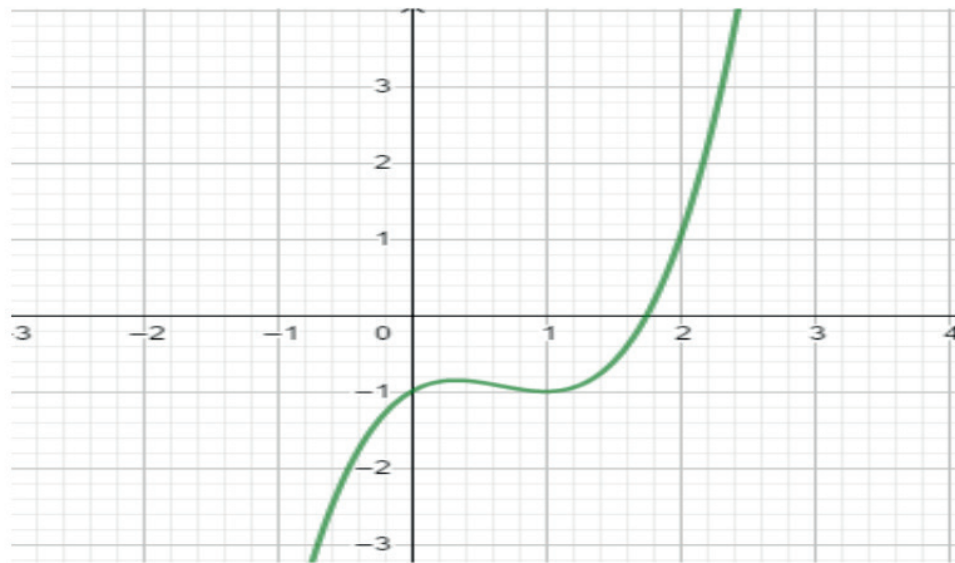
Em ambos os casos, tem-se que $f^{IV}(a) > 0$

A função possui um ponto de mínimo.

Assim sendo é possível construir a seguinte propriedade: todas as funções derivadas de ordem par representa um ponto de máximo ou mínimo na função. .

2.3 Aplicações da série de Taylor

1-Usando a primeira fórmula de Taylor, obtenha os valores dos pontos de máximo e mínimo da função $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$



2 - Dada a função $y = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x$

Obtenha os pontos de máximo e mínimo

Solução,

Derivando a função $y = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x$, tem-se que,
 $y'(x) = 5x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 8x + 1$

Observando que o valor 1 (um) é raiz da função e fazendo as manipulações matemática, obtém-se que,

$$y'(x) = (x - 1)(5x^3 - 11x^2 + 7x - 1)$$

Observando os termos entre parêntese, a função cúbica é ainda divisível por 1 (um). Logo,

$$y'(x) = (x - 1)(x - 1)(5x^2 - 6x + 1)$$

De modo análogo, a função quadrática apresenta como raízes os valores 1 e 1/5. Portanto,

$$y'(x) = (x - 1)(x - 1)(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)$$

Dessa maneira a função derivável apresenta tres raízes iguais e uma diferente.
As raízes são,

$$x = 1 \text{ e } x = 1/5$$

Deve-se investigar para que valores atribuídos a segunda derivada se tem um máximo ou um mínimo. Dada a função que representa a primeira derivada e derivando, obtém-se,

$$y'(x) = 5x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 8x + 1$$

$$y''(x) = 20x^3 - 48x^2 + 36x - 8$$

Levando o valor de $1/5$ em $y''(x)$, obtém-se que,

$$y''\left(\frac{1}{5}\right) = -2,6$$

Que representa um ponto de máximo.

De modo análogo, levando o segundo valor em $y''(x)$, vem que

$$y''(1) = 0$$

O que leva a calcular a terceira derivada. Assim sendo, para

$$y''(x) = 20x^3 - 48x^2 + 36x - 8$$

Derivando, obtém-se,

$$y'''(x) = 60x^2 - 96x + 36$$

Calculando as raízes dessa função, vem que,

$$x = 1 \text{ e } x = 3/5$$

Fazendo a quarta derivada, tem-se,

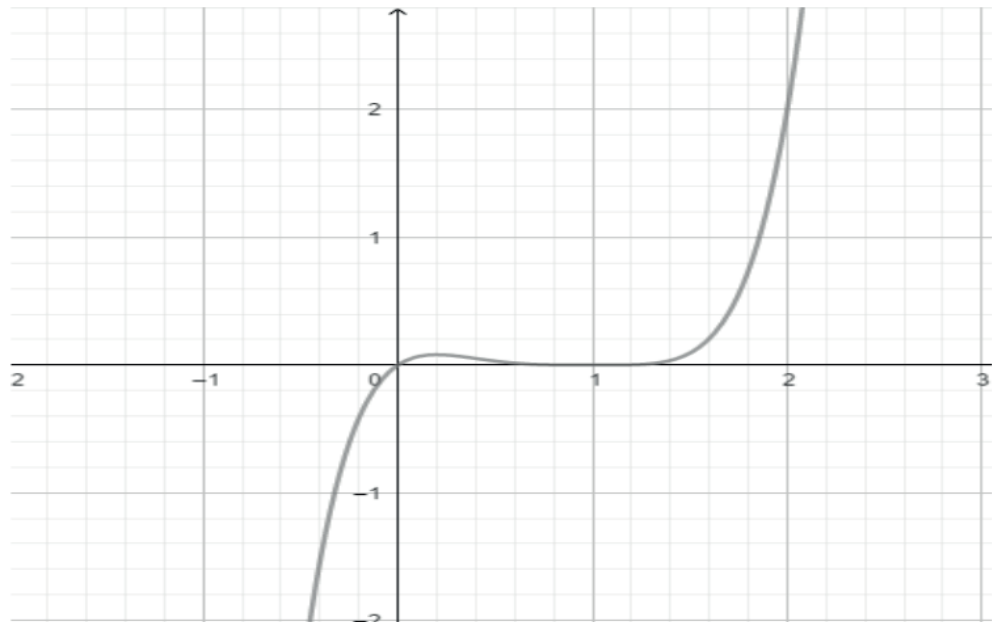
$$y^{iv}(x) = 120x - 96$$

Substituindo o valor de $x = 1$ vem que

$$y^{iv}(1) = 24$$

O que representa um valor mínimo.

Observe o traçado do gráfico



3 - Dada a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Calcule os pontos de máximo e mínimo da função.

Solução

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

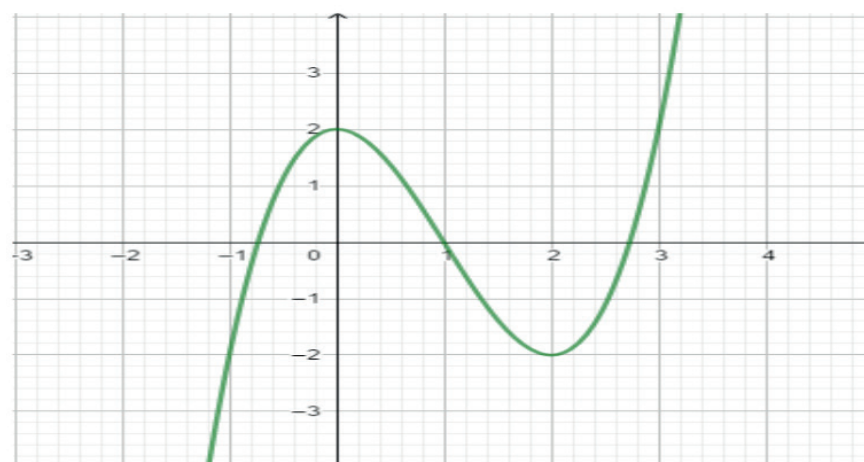
$$3x(x - 2) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(0) = -6 \quad (\text{ponto de máximo})$$

$$f''(2) = 6 \quad (\text{ponto de mínimo})$$

Traçado do gráfico



4 - dada a Função, $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$, Obtenha os pontos máximo e mínimo e faça um esboço do gráfico

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

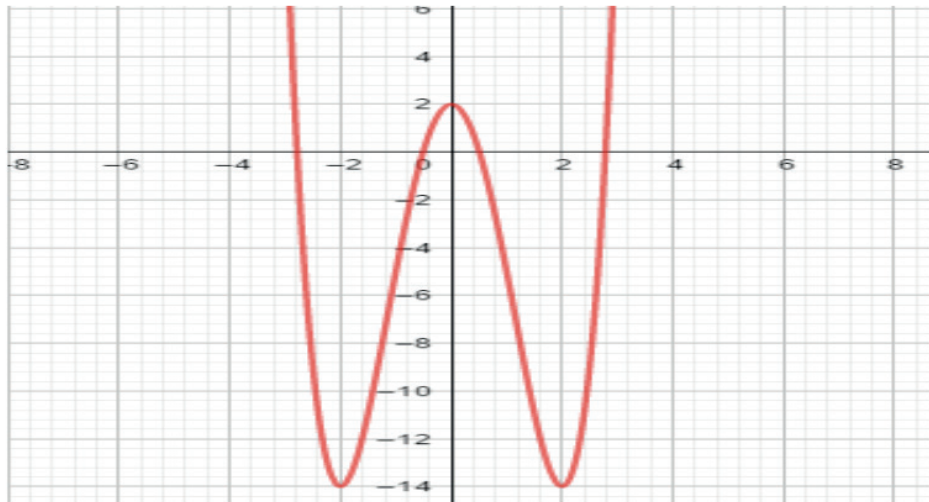
$$f'(x) = 4x(x^2 - 4)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(0) = -16 \quad (\text{ponto de máximo})$$

$$f''(-2) = f''(2) = 48 - 16 = 32 \quad (\text{ponto de mínimo})$$



2.4 Exponencial

Em série de Taylor, tem-se as seguintes expansões,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (17)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots; \quad (18)$$

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (19)$$

A constante de Euler e , que é um número irracional compreendido entre 2 e 3 ($e \approx 2,71828 \dots$), é dada pela série

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots,$$

que se obtém com $x = 1$.

Será tomado o desenvolvimento como base para definir e^z com z complexo.

Se e^z já tivesse significado para z complexo, e o desenvolvimento fosse válido neste caso, então se teria, com y real,

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \dots \quad (20)$$

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{y^2}{2!} + i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \frac{y^5}{5!} + \frac{y^6}{6!} + i \frac{y^7}{7!} + \dots \quad (21)$$

Admitindo ainda que seja possível rearranjar os termos desta série, alocando os termos reais e separando os termos imaginários, obteve-se:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right), \quad (22)$$

ou seja, em vista de,

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \quad (23)$$

Essas considerações, que puramente são formais, não estabelecem a relação, entretanto servem como motivação para se definir a função exponencial. Isto é feito tomando a relação como ponto de partida; ela aqui é utilizada para definir a exponencial no caso de expoente puramente imaginário iy . Por outro lado, a definição da exponencial no caso de um expoente qualquer $z = x + iy$ é feita de uma forma a manter a propriedade aditiva da exponencial real:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}. \quad (24)$$

Define-se, então, a exponencial e^z , para um número complexo qualquer $z = x + iy$, mediante a expressão

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (25)$$

2.5 A fórmula de Euler

Observou-se que,

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad (22)$$

Se for feito $x = -x$, tem-se que,

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x)$$

Como $\cos(-x) = \cos x$, uma função par e

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, uma função ímpar

Vem que,

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x \quad (23)$$

Somando as duas expressões (22) e (23), obtém-se,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (24)$$

Derivando a expressão (24),

$$-\operatorname{sen} x = \frac{ie^x - e^{-ix}}{2} \rightarrow$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{i(e^{-ix} - ie^{ix})}{2} \rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \frac{i^2}{2i} (e^{-ix} - e^{ix}) \rightarrow$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

Logo,

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (25)$$

As expressões dados por (24) e (25) podem ser úteis para o desenvolvimento da trigonometria

Exemplo 1

Usando a fórmula de Euler, mostre que $\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 1$

Solução:

Tomando (24) tem-se que:

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}}{2} \rightarrow$$

$$2 \cos \frac{x}{2} = e^{i\frac{x}{2}} + \frac{1}{e^{i\frac{x}{2}}} \rightarrow$$

$$2 \cos \frac{x}{2} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} \cdot e^{i\frac{x}{2}} + 1}{e^{i\frac{x}{2}}} \rightarrow$$

$$1 + \left(e^{x\frac{i}{2}}\right)^2 = 2 \cdot e^{i\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2}$$

Ou

$$\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} + 1 = 0 \quad (26)$$

A expressão dado por (26) representa uma função quadrática em $e^{i\frac{x}{2}}$. Denotando $e^{i\frac{x}{2}} = y$, vem que

$$y^2 - 2y \cos \frac{x}{2} + 1 = 0 \rightarrow$$

Logo,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 \cos^2 \frac{x}{2} - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\Delta = 4 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) \rightarrow$$

$$\sqrt{\Delta} = 2 \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} - 1}$$

Logo,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \cos \frac{x}{2} \pm 2 \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} - 1}}{2}$$

$$y = \cos \frac{x}{2} \pm \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} - 1}$$

Ou

$$y = \cos \frac{x}{2} \pm i \sqrt{1 - \cos^2 \frac{x}{2}}$$

Como

$$y = e^{i\frac{x}{2}} \rightarrow$$

$$e^{i\frac{x}{2}} = \cos \frac{x}{2} \pm i \sqrt{1 - \cos^2 \frac{x}{2}}$$

Ou

$$\cos \frac{x}{2} + i \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \pm i \sqrt{1 - \cos^2 \frac{x}{2}} \rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{x}{2}} \rightarrow$$

Elevando ao quadrado, obtém-se que,

$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos^2 \frac{x}{2} \rightarrow$$

$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$$

Exemplo 2

Sabe-se que o MHS a elongação ou posição de uma partícula pode ser expressa da seguinte maneira,

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Onde ω é a frequência de oscilação e φ é a fase inicial. Usando as forças atuantes na partícula e levando em conta a fórmula de Euler, obtenha a expressão x , v e a .

Solução

Como a partícula oscila e não considerando a atrito, a força restauradora $F = -KX$ (1) é igual a força resultante $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$, logo,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \rightarrow \quad (3)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$$

Ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \quad (4)$$

Supondo a priori, que

$$\sqrt{\frac{K}{m}} = \omega$$

É na verdade a frequência de oscilação, tem-se que,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (6)$$

Sendo, para as raízes de r , tem-se que,

$$r^2 + \omega^2 \cdot 1 = 0 \rightarrow r^2 = -\omega^2 \rightarrow$$
$$r_1 = \omega i \quad \text{e} \quad r_2 = -\omega i \quad (7)$$

Supondo que a solução da equação diferencial seja da forma

$$x = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad (8)$$

Vem que,

$$x = A_1 \cdot e^{\omega i t} + A_2 e^{-i \omega t} \quad (9)$$

Derivando até a 2ª ordem, obtém-se que:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A_1 e^{\omega i t} - \omega^2 A_2 e^{-\omega i t}$$

Ou

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 (A_1 e^{\omega i t} + A_2 e^{-\omega i t}) \quad (10)$$

Elevado (8) e (10) em (6), vem que:

$$-\omega^2 (A_1 e^{\omega i t} + A_2 e^{-\omega i t}) + \omega^2 (A_1 e^{\omega i t} + A_2 e^{-\omega i t}) = 0$$

O que mostra que (9) é a solução de (6).

Devemos agora mostrar que a solução é periódica. Assim sendo,

$$x = A_1 \cdot e^{\omega i t} + A_2 \cdot e^{-i \omega t}$$

Considerando que,

$$e^{\omega i t} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t \quad \text{e} \quad e^{-i \omega t} = \cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t$$

Vem que,

$$\begin{aligned} x &= A_1 (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + A_2 (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \\ x &= (A_1 + A_2) \cos \omega t + i(A_2 - A_1) \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

Como $w \neq 0$ e $\operatorname{sen} \omega t$, vem que tendo em vista que a solução deve ser real, $A_2 - A_1 = 0$ ou

$$A_2 = A_1 = A$$

Assim a solução será

$$\begin{aligned} x &= 2A \cos \omega t \quad \text{ou} \quad 2A = A_1 \\ &\rightarrow x = A_1 \cdot \cos \omega t \end{aligned}$$

Essa é uma solução particular em que a partícula inicia o movimento considerado uma fase inicial $\varphi_0 = 0$. Se a partícula iniciar o movimento com $\varphi_0 \neq 0$ Tem-se que a posição da partícula será

$$x = A \cos(\varphi_0 + \omega t)$$

Como era de se esperar.

Para o caso da velocidade da partícula, deriva-se a função x , logo,

$$\frac{dx}{dt} = V = -\omega A \text{sen}(\varphi_0 + \omega t)$$

E para a aceleração, deriva-se novamente, obtendo,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -\omega^2 A \text{cos}(\varphi_0 + \omega t)$$

Como $x = A \text{cos}(\varphi_0 + \omega t)$, vem que,

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

O que mostra a característica fundamental do MHS em que a aceleração é proporcional a elongação.

3 | COMPORTAMENTO GRÁFICO DAS FUNÇÕES E APROXIMAÇÕES POR SÉRIE DE TAYLOR

Nesse item é importante considerar que dada uma função continua num intervalo (a,b) , pode-se considerar o comportamento do gráfico das funções extraídas da série de Taylor em relação a função que gera tal série.

3.1 Função exponencial

Seja, por exemplo, a função dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots;$$

É preciso compreender o que acontece do ponto de vista gráfico quando se compara o comportamento do gráfico da função antes do primeiro membro com os outros termos do segundo membro. O gráfico (**Figura 1**) representa o gráfico da função

$$y = e^x$$

Se considerar agora as funções

$$y = 1 + x$$

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{4}{24}$$

Considerando essas funções como os termos da função em (18) e traçando os gráficos, tem-se que,

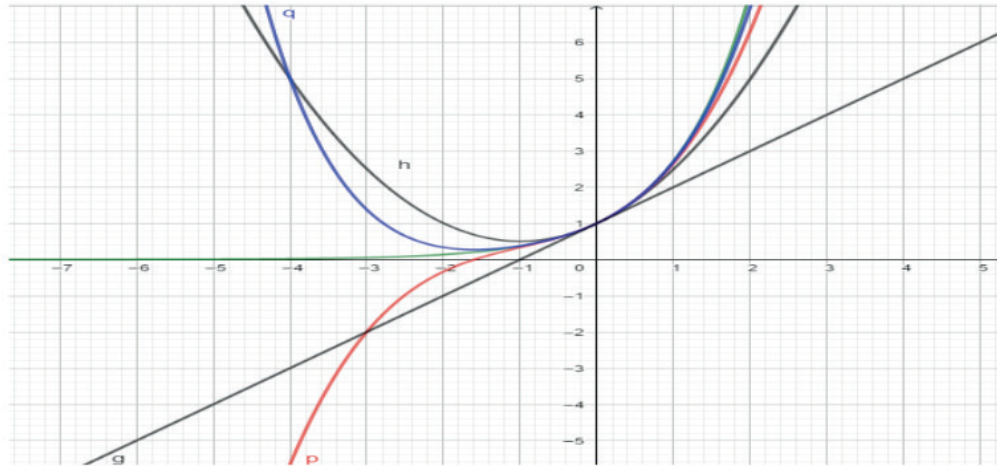


Gráfico :5 Traçado do gráfico da função exponencial e das funções oriundas da soma dos primeiros termos da série de Taylor.

Fonte: Acervo dos autores

A primeira função que é a linear é denotada por função f, a do segundo grau por função g, a do terceiro grau por função h e do quarto grau por função p. De acordo com o gráfico, observa-se que a medida que vai se tomando os termos da serie de Taylor, do ponto de vista gráfico, eles vão se confundindo até ficarem iguais. Esse comportamento pode ser observado quando se expande em serie uma detrmindada função continua num intervalo a e b.

3.2 Função cosseno

Considere a função,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots;$$

Pode-se usar o mesmo raciocínio anterior e chegar nos seguintes gráficos

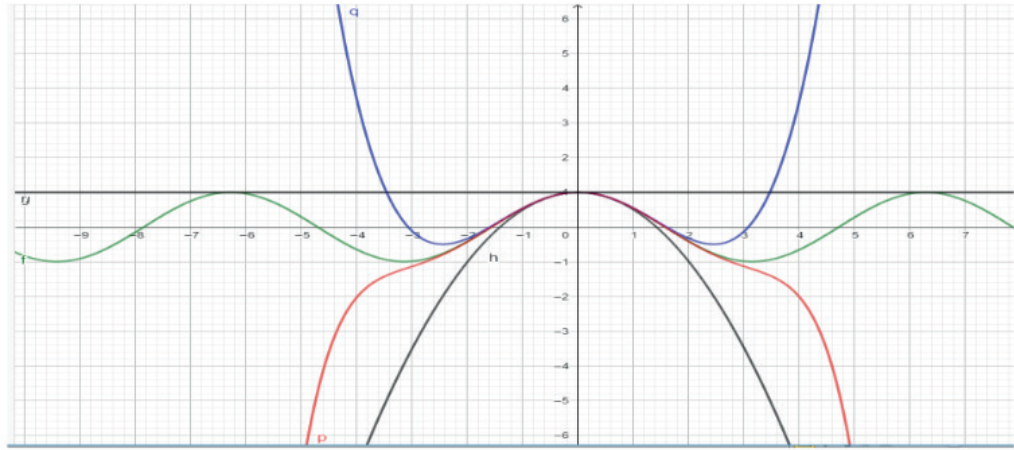


Gráfico 6: Traçado do gráfico da função cosseno e das funções oriundas da soma dos primeiros termos da série de Taylor.

Fonte: Acervo dos autores

Onde se observa que a função g representa a função constante do primeiro termo da série de Taylor, a função h , são os dois primeiros termos, a função q os três primeiros termos, a função e e a função p os quatro primeiros termos da série. Observe que à medida que se acrescentam os termos o traçado do gráfico vai tomando o comportamento da função $y = \cos x$ o que na verdade é o que se pode esperar.

3.3 Função seno

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (19)$$

Levando em conta os termos da série, tem-se que ,

$$\begin{aligned} & x - \frac{x^3}{6} \\ & x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \\ & x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5.040} + \end{aligned}$$

Essas três primeiras funções traçadas no plano cartesiano e comparando a função seno, observa-se que há uma convergência para função seno à medida que os valores de n aumento (**Figura 8**)

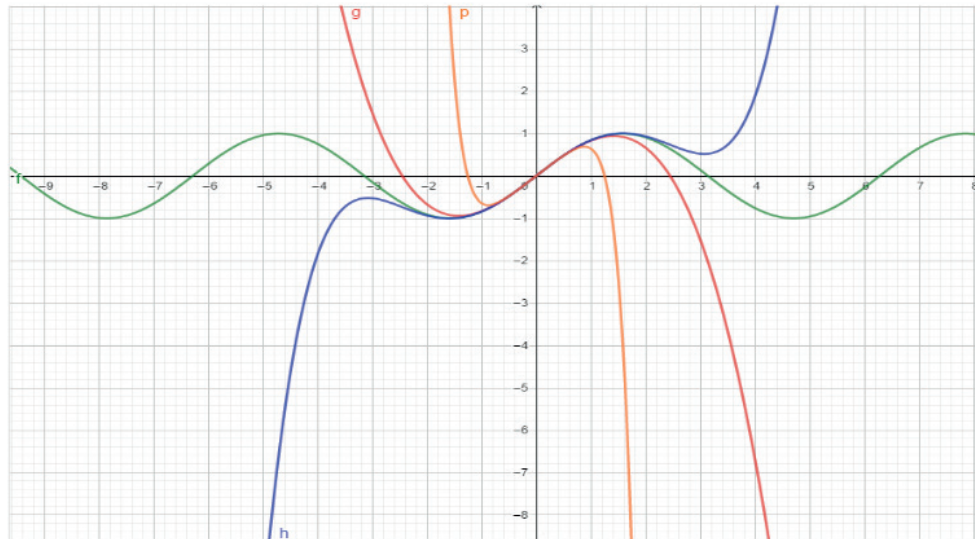


Gráfico 7: Traçado do gráfico da função seno e das funções oriundas da soma dos primeiros termos da série de Taylor.

Fonte: Acervo dos autores

Observa-se que desde que uma função seja contínua num intervalo $[a, b]$ pode ser expandida em série e que à medida que se consideram os termos da série cada gráfico da função considerada vai convergindo para a função contínua original. As aproximações de tais funções são muito utilizadas na área da matemática e da física quando se pode usar alguns termos da série de Taylor, como são os casos, por exemplo, de movimentos de corpos com resistência do ar, pêndulos simples e outros temas onde a série de Taylor é utilizada.

3.4 Utilização da série de Taylor nos movimentos de corpos com forças de atrito

Dessa maneira para o caso de força dependente da velocidade ou força de retardamento, pode-se usar a notação vetorial,

$$\vec{F} = |v|^n \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$

Verifica-se experimentalmente que para objetos relativamente pequenos movendo-se no ar, $\chi \approx 1$. Para velocidades menores que algo em torno de $24m/s$ Para velocidades entre este valor e a velocidade do som ($330m/s$) A força de resistência é melhor descrita por $n = 2$.

Nesse sentido, podemos usar a 2ª lei de Newton para obtenção da $v(t), x(t)$ e $v(x)$, de um objeto que se desloca onde há a força de resistência.

No caso de força aplicada que dependem da velocidade, a equação do movimento pode ser escrita como:

$$m \frac{dv}{dt} = F(v) \rightarrow m \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = F(v) \rightarrow mv \frac{dv}{dx} = F(v)$$

Desde que se conheça a forma funcional de $F(v)$, pode-se realizar integração de qualquer uma das duas formas da equação do movimento da equação acima.

$$\text{Sendo } m \frac{dv}{dt} = F(v) \rightarrow dv = \frac{1}{m} dt F(v) \rightarrow \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m} dt \rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \text{ ou } m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \int_{t_0}^t dt \rightarrow t = t_0 + m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)}$$

Conhecida a forma de como F varia com a velocidade, possível obter a função $x(t)$

Para obter a função $x(v)$, vamos considerar a expressão

$$mv \frac{dv}{dx} = F(v) \rightarrow m \frac{v dv}{F(v)} = dx \rightarrow x = x_0 + m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{F(v)}$$

Ao integrarmos esta equação, a sua forma funcional é que nos dirá se conseguiremos expressá-las em função do tempo. Se a força de atrito for muito pequeno, utiliza-se a série de Taylor para expressar as funções velocidade, aceleração e posição do corpo ou da partícula para uma melhor compreensão das grandezas físicas envolvidas.

Aplicação

Considere um barco navegando nas águas tranquilas de um lago, uma velocidade v_0 . No instante $t = 0$ desligam-se os motores do barco e considerando esta posição como o marco zero da posição, Determine as equações do movimento $v(t)$, $x(t)$ e $x(v)$

Considere que a força de atrito entre o barco e a água seja $F(v) = -mkv$

Solução

$$\text{Sendo } Fr = m \frac{dv}{dt} \rightarrow m \frac{dv}{dt} = -mkv \rightarrow \frac{dv}{v} = -k dt$$

→ Do enunciado do problema, temos que:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = - \int_0^t k dt = -kt \rightarrow \ln v - \ln v_0 = -kt \rightarrow \ln \left(\frac{v}{v_0} \right) = -kt \rightarrow v = v_0 \cdot e^{-kt}$$

De acordo com essa última expressão, para $t \rightarrow \infty$, o barco tem como velocidade $v = 0$. Isto é:

$$v = \lim_{t \rightarrow \infty} v_0 \cdot e^{-kt} = 0$$

*Cálculo de $x(t)$

Sendo

$$\frac{dx}{dt} = v \rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot e^{-kt} \rightarrow dx = v_0 \cdot e^{-kt} dt \rightarrow \int_{x_0=0}^x dt = \int_{t_0=0}^t v_0 \cdot e^{-kt} dt \rightarrow$$

$$x = v_0 \int_{t_0=0}^t e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} \cdot e^{-kt} \rightarrow x = -\frac{v_0}{k} (e^{-kt} - 1) \rightarrow$$

$$x = \frac{v_0}{k} (1 + e^{-kt})$$

O que mostra a função $x(t)$ como sendo uma função exponencial decrescente.

Para obter a distância percorrida pelo barco no $t_0 = 0$ a $t \rightarrow \infty$, devemos usar o seguinte limite:

$$x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k}$$

$$t \rightarrow \infty$$

*Cálculo de $x(v)$

$$m \frac{dv}{dt} = -mkv \rightarrow \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -kv \rightarrow \frac{dv}{dx} \cdot v = -kv$$

$$\frac{dv}{dx} = -k \rightarrow \int_{v_0}^v dv = - \int_0^x k dx = -kx \rightarrow$$

$$v = v_0 - kx$$

Para $t \rightarrow \infty$, temos que $x = v_0/k \rightarrow v = 0$

Para a utilização da série de Taylor, deve-se considerar o k como uma grandeza física muito pequena. Nesse caso, levando a série de Taylor dada pela expressão em (16). Isto é,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \frac{x^3}{3!} \cdot f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot f^n(0) + \dots$$

Supondo a expressão que corresponde da posição do barco e considerando que a água tem um coeficiente de arrastamento muito pequeno, pode-se *expandir em série a exponencial da seguinte expressão*,

$$x = \frac{v_0}{k} (1 + e^{-kt})$$

Seja a função

$$y = e^{-kt}$$

Considerando a série de Taylor. Isto é,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \frac{x^3}{3!} \cdot f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot f^n(0) + \dots \quad (16) \quad (16)$$

Pode-se obter a seguinte série exponencial,

E tendo em vista que a exponencial em série é dada pela expressão (17). Isto é,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots;$$

Logo,

$$e^{-kt} = 1 - kt + \frac{k^2 t^2}{2} - \frac{k^3 t^3}{6} + \dots;$$

Suponha que num determinado problema hipotético, o barco viaje numa água em que o coeficiente de atrito de arrastamento seja dado por $k = 1s^{-1}$

Nesse caso, levando os valores de K, tem-se que,

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \dots;$$

Seja a função que determina a posição do barco em cada instante t. Isto é,

$$x = \frac{v_0}{k} (1 + e^{-kt})$$

Considerando que o barco inicia o movimento com velocidade $v_0 = 2m/s$ e $k = 1s^{-1}$ dado

Levando os valores na expressão em x, vem que,

$$x = 2. (1 + e^{-t})$$

Substituindo a expressão dentro do parêntese de acordo com a expansão em série de Taylor, tem-se que,

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - 1 + t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \dots)$$

Ajustando os termos e substituindo os valores das grandezas k e obtém-se,

$$x = 2. (1 + 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \dots)$$

$$x = 4 - 2t + t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \dots)$$

Considerando para o traçado as novas funções representadas pelos primeiros termos da série de Taylor, tem-se que,

Primeira função dada pelos dois primeiros termos da série,

$$x = 4 - 2t$$

Segunda função dadas pelos três primeiros termos da série,

$$x = 4 - 2t + t^2$$

A terceira função dada pelos quatro primeiros termos da série,

$$x = 4 - 2t + t^2 - \frac{1}{3}t^3$$

A quarta função dada pelos cinco primeiros termos da série,

$$x = 4 - 2t + t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4$$

A figura abaixo mostra o comportamento dos gráficos das funções em relação ao gráfico da função exponencial. As funções consideradas para análise física do problema do barco mostram que como o problema é real (físico), os valores temporais devem ser positivos.



Gráfico 8: Traçado do gráfico da função exponencial e dos gráficos das funções oriundas da soma dos primeiros termos da série de Taylor.

Fonte: Acervo dos autores

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse artigo se propôs estudar o comportamento das funções dos primeiros termos da série da Taylor o possibilitou como aquelas funções se harmonizavam e assumindo a forma da função que originou a série.

Esse comportamento foi verificado em alguns problemas visto ao longo do texto desse trabalho. Outra questão é a verificação da tamanha importância de estudar e se dedicar no conhecimento da série de Taylor, tendo em vista as inúmeras aplicações nas áreas do conhecimento humano, principalmente, na Física e na própria Matemática.

Dessa maneira, observou-se ao longo do texto que as fórmulas de Euler

representa, a série de Taylor abrem muitos caminhos para interpretações e soluções para outros desenvolvimentos e formulações matemáticas, que sob certas particularidades, mostram-se úteis para explicar alguns fenômenos naturais, como foi o caso por exemplo, do MHS e do lançamento de um corpo com resistência do ar.

A série de Taylor foi usada para restringir a um caso ideal as funções horárias do corpo, recaindo na função linear para a velocidade e na função quadrática para a posição em função do tempo. Do ponto de vista gráfico, mostrou-se os intervalos em que os gráficos gerados pelos termos da série podem ser considerados para a descrição do movimento do corpo.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, Tom M. *Cálculo: Variáveis Úteis, com uma Introdução à Álgebra Linear*. 2 ed. Nova York: John Wiley & Sons, 1967.

BUTKOV, E. *Física Matemática*. Addison Wesley Publishing Company Inc., Estados Unidos da América, 1968.

CARMO, Manfredo Perdigão do Carmo. MORGADO, A. C. Morgado. *Trigonometria- Números Complexos*. IMPAVITAE, 1992.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. Makron Books, 1997.

GUIDORIZZI, Luiz Hamilton. **Um Curso de Cálculo**: Volume 1. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

GUIDORIZZI, Luiz Hamilton. **Um Curso de Cálculo**: Volume 4. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

STEWART, James. **Cálculo**: Volume 2. 5 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

SOBRE OS ORGANIZADORES

Raissa Rachel Salustriano da Silva-Matos: Graduada em Ciências Biológicas pela Universidade de Pernambuco - UPE (2009), Mestre em Agronomia - Solos e Nutrição de Plantas pela Universidade Federal do Piauí - UFPI (2012), com bolsa do CNPq. Doutora em Agronomia pela Universidade Federal da Paraíba - UFPI (2016), com bolsa da CAPES. Atualmente é professora adjunta do curso de Agronomia do Centro de Ciências Agrárias e Ambientais (CCAA) da Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Tem experiência na área de Agronomia, com ênfase em fitotecnia, fisiologia das plantas cultivadas, propagação vegetal, manejo de culturas, nutrição mineral de plantas, adubação, atuando principalmente com fruticultura e floricultura. E-mail para contato: raissasalustriano@yahoo.com.br; raissa.matos@ufma.br Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0720581765268326>

Nitalo André Farias Machado: Possui graduação em Agronomia (2015) e mestrado em Ciência Animal (2018) pela Universidade Federal do Maranhão. Atualmente é aluno regular do doutorado em Engenharia Agrícola pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Possui experiência na área de Engenharia Agrícola, com ênfase em Ambiência e Bioclimatologia, atuando principalmente nos seguintes temas: biometeorologia, bem-estar animal, biotelemetria, morfometria computacional, modelagem computacional, transporte de animais, zootecnia de precisão, valorização de resíduos, análise de dados e experimentação agrícola. E-mail para contato: nitalo-farias@hotmail.com. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3622313041986385>

Hosana Aguiar Freitas De Andrade: Graduada em Agronomia (2018) pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Atualmente é mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ciência do Solo pela Universidade Federal do Ceará (PPGCS/UFC) como bolsista CAPES. Possui experiência na área de fertilidade do solo, adubação e nutrição de plantas, com ênfase em aproveitamento de resíduos na agricultura, manejo de culturas, propagação vegetal, fisiologia de plantas cultivadas e emissão de gases do efeito estufa. E-mail para contato: hosana_f.andrade@hotmail.com. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5602619125695519>

ÍNDICE REMISSIVO

A

Ácido metanosulfônico 46, 49, 50, 51, 56

Adequação ambiental 194

Análise combinatória 198, 199, 200, 201, 202, 213, 217, 218

Anilina 46, 49, 51

Aplicações 16, 18, 21, 26, 46, 57, 81, 83, 84, 90, 106, 193, 201, 202, 205, 207, 209, 212, 217

Aplicativo 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 126

B

Baía da Ilha Grande 162, 168, 172, 173, 174

Baía de Guanabara 146, 147, 162, 164, 168, 169, 170, 171, 174, 175

Base de dados 39, 176, 179

Bioindicadores 136, 143

C

Carcinicultura 10, 11, 12, 13, 14, 15

Carne bovina 108, 109, 110, 111, 112, 114, 117, 118

Cbers 4 16, 17, 18

Cenário educacional 1

Competência 1, 4, 5, 6, 7, 8, 168

Conforto ambiental 149, 150, 153, 154, 194, 195, 197

Contorno ativo 16, 18

Controle solar 149

D

Deposição eletroquímica 46, 49, 51, 53

Didática profissional 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8

E

Eletrodeposição 46, 50, 51, 52, 53, 57, 190, 191, 192

Ensino 1, 5, 7, 38, 58, 67, 69, 70, 71, 80, 81, 121, 122, 133, 134, 149, 194, 198, 200, 201, 216, 217, 218

Ensino das geociências 58

Ensino de astronomia 70, 81

Ensino fundamental 58, 71, 81

Ensino médio 58, 71, 200, 217, 218

Erosão costeira 163, 219, 220, 225

Espaço-temporais 10

Estratégias ativas 194

Estuário 10, 13, 14, 15, 164

Estudos topográficos 121

Experimentação 198, 199, 201, 202, 213, 216, 227
Extração de feições 16, 17, 20, 21
Extração de proteínas 108, 110, 111, 112, 113, 114, 116, 117, 118

F

Filmes de polianilina 46
Física médica 37, 38, 40, 44
Fitólitos de plantas 135, 137, 140
Formação dos adultos 1, 4
Função exponencial 82, 94, 99, 100, 104, 106

G

Geociências 15, 58, 60, 62, 69, 81, 175
Geomorfologia fluvial 10

I

Interatividade 37, 38

K

Kinect 121, 122, 124, 125, 127, 129, 130, 131, 132, 133, 134

L

Lâmpada fluorescente 70, 72, 73, 74, 77, 78, 79, 80
Landsat 8 16, 17, 18, 19, 20, 21
Liga de alumínio 2024 48, 49, 190
Linha de costa 14, 165, 172, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225
Líquido iônico 190, 191, 192

M

Mapeamento de ruído 176, 181, 183, 187
Mata atlântica 135, 136, 137, 138, 146
Matemática 1, 3, 5, 6, 7, 8, 83, 84, 90, 102, 106, 107, 198, 199, 200, 201, 202, 213, 216, 217, 218
Meta-heurística 155, 156, 157, 158, 159, 160
Metais oxidáveis 46, 48
Métodos 3, 12, 16, 17, 18, 19, 21, 24, 45, 48, 72, 110, 111, 123, 128, 139, 147, 156, 176, 180, 192, 199, 200, 201, 202, 221, 222, 224
Modelagem 126, 155, 156, 160, 161, 176, 178, 180, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 227
Modelagem acústica 176, 180

O

Ouro 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 52, 53, 54, 62, 217
Oxidação álcool benzílico 22

P

Paládio 22, 23, 24, 25, 26, 27, 32

Planejamento fatorial 108, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117

Planície flúvio-marinha 10, 12

Polipirrol 48, 57, 190, 191, 192, 193

Praia 138, 141, 143, 147, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 219, 220, 222, 224, 225, 226

Praias abrigadas 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 173, 174

Professor 1, 5, 6, 7, 8, 58, 61, 68, 81, 121, 122, 195, 199, 200, 213, 214, 215, 216, 217

Proteções solares 149, 150, 152

R

Radiação 70, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 114

Realidade aumentada 121, 122, 127, 132, 133

Reconstituição paleoambiental 136

Recursos de informações 37

Rio Acaraú 10, 11, 12, 14

S

Secado de café 155

Sensoriamento remoto 16, 21

Série de Taylor 82, 83, 99

Superfície de resposta 108, 110, 111, 117

T

Tecnologia móvel 37, 38, 39

Teoria quântica 70, 71, 72, 73, 74, 78, 80

Topografia 10, 121, 122, 123, 127, 133, 134, 137, 162, 168, 180

V

Variabilidade multitemporal 219

