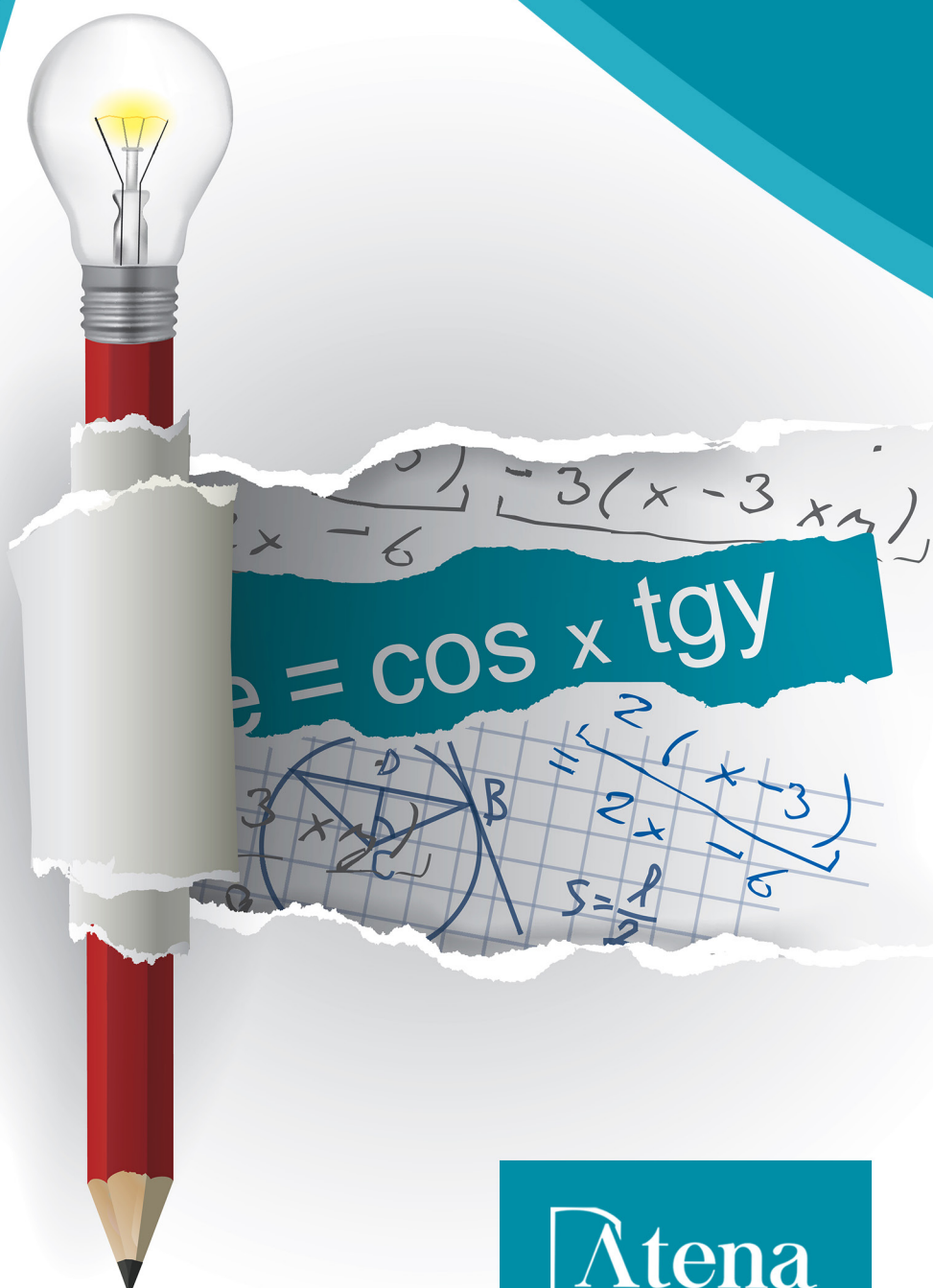


# As Diversidades de Debates na Pesquisa em Matemática 3

Annaly Schewtschik  
(Organizadora)



**Atena**  
Editora

Ano 2020

# As Diversidades de Debates na Pesquisa em Matemática 3

Annaly Schewtschik  
(Organizadora)



$$e = \cos x \operatorname{tg} y$$



**Atena**  
Editora

Ano 2020

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

**Diagramação:** Natália Sandrini

**Edição de Arte:** Lorena Prestes

**Revisão:** Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins  
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá  
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima  
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie di Maria Ausiliatrice  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste  
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia  
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná

Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia  
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

### **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília  
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília  
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande  
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

### **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás  
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Msc. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
Prof. Dr. Adailson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Profª Msc. Bianca Camargo Martins – UniCesumar  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Msc. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Profª Msc. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil  
Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita  
Prof. Msc. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária  
Prof. Msc. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Msc. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará  
Prof<sup>a</sup> Msc. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Msc. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof. Msc. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual de Maringá  
Prof. Msc. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof<sup>a</sup> Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof<sup>a</sup> Msc. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)**

D618 As diversidades de debates na pesquisa em matemática 3 [recurso eletrônico] / Organizadora Annaly Schewtschik. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2020. – (As diversidades de debates na pesquisa em matemática; v. 3)

Formato: PDF

Requisitos de sistemas: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-85-7247-912-7

DOI 10.22533/at.ed.127201301

1. Matemática – Pesquisa – Brasil. 2. Pesquisa – Metodologia.  
I. Schewtschik, Annaly. II. Série.

CDD 510.7

**Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422**

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

A obra “As Diversidades de Debates na Pesquisa em Matemática 3” aborda uma série de livros de publicação da Atena Editora. Este Volume em seus 13 capítulos apresenta resultados de pesquisas que trazem a matemática como caminho de leitura, análise e reflexões sobre uma diversidade de temáticas da atualidade, de um ponto de vista crítico e sistemático, apresentando compreensões a partir de um diálogo da educação matemática e da matemática enquanto ciência aplicada em uso social.

Os trabalhos que evidenciam inferências frente ao campo da Educação Matemática expõem conclusões a respeito do uso de tecnologias nas aulas de matemática alavancada pelo uso de softwares educativos, o uso de jogos como uma metodológica ativa para o ensino e para a aprendizagem, incluindo neste escopo o uso de games de consoles para a aprendizagem matemática em sala de educação especial. Traz a transdisciplinaridade, fundamentada pela teoria da complexidade, como aporte para a compreensão da diversidade. Apresenta pesquisa sobre como despertar nos alunos o interesse pela estatística e a probabilidade por meio de suas diversas aplicações, assim como sobre o uso dos números racionais em atividades de compostagem para estimular consciências, ações e atitudes ecologicamente corretas.

No que tange ao uso da matemática como ferramenta para interpretações nos fenômenos sociais, apresenta pesquisas sobre o Número de Euler em constantes financeiras como ferramenta tecnológica na resolução de problemas diários, sobre as ideias de ângulos de contato em casos físico-químicos de molhabilidade na produção de tintas, sobre o uso da modelagem matemática aplicada em casos de dessalinização da água, assim como o seu uso na redução dos riscos de investimentos em pesquisa norteadas pela Teoria de Carteiras. O uso de ferramentas matemáticas, como técnicas de verificação estatística também é evidenciada pelas séries temporais na pesquisa sobre modelos numéricos de previsão do tempo. E a estatística em suas séries temporais como uma ferramenta de abordagem quantitativa para questões socioeconômicas.

Este volume é direcionado para todos os pesquisadores que fazem uso da matemática como ferramenta no âmbito da ciência sociais e aplicadas, e aos educadores que pensam, refletem e analisam o ensino e a aprendizagem no âmbito da educação matemática.

Annaly Schewtschik

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
A CONFEÇÃO DOS PENTAMINÓS NO GEOGEBRA	
Josevandro Barros Nascimento	
Gerivaldo Bezerra Da Silva	
Glageane Da Silva Souza	
Leonardo Lira De Brito	
Sérgio De Carvalho Bezerra	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1272013011</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>14</b>
JOGO MATEMÁTICO DO BOLO DA VOVÓ: EXPLORANDO RAZÃO E PROPORÇÃO NAS AULAS DE MATEMÁTICA	
Bruna Sikora Marchinski	
Joyce Jaquelinne Caetano	
Suelin Jaras	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1272013012</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>23</b>
XBOX 360: APRENDENDO MATEMÁTICA ATRAVÉS DA TECNOLOGIA INTERATIVA NA EDUCAÇÃO ESPECIAL	
Jesebel Carla Moccelini Ferreira da Silva	
Jeane Pagliari	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1272013013</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>30</b>
ATITUDE TRANSDISCIPLINAR: MATEMÁTICA APLICADA NA HISTÓRIA DA CULTURA AFRO-BRASILEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Sueli Perazzoli Trindade	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1272013014</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>44</b>
TÁBUA DE GALTON: UMA APROXIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL PELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL	
Rafaella Costa de Almeida	
Francisca Iris Nunes da Silva Bezerra	
Naje Clécio Nunes da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1272013015</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>50</b>
COMPOSTAGEM	
Janete Fuechter	
Mayra Caroline Oenning	
Taísa Otto	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1272013016</b>	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>57</b>
O NÚMERO DE EULER APLICADO NA MATEMÁTICA FINANCEIRA	
André Alfonso Peixoto	
Francisca Iris Nunes da Silva Bezerra	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1272013017</b>	

<b>CAPÍTULO 8 .....</b>	<b>63</b>
O PAPEL DESEMPENHADO PELA MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DE INOVAÇÕES TECNOLÓGICAS EM TINTAS VOLTADAS PARA A CONSTRUÇÃO CIVIL – ESTUDO DE CASO STOCOAT LOTUSAN	
Daniel Santos Barbosa André Luíz dos Santos Ferreira	
DOI 10.22533/at.ed.1272013018	
<b>CAPÍTULO 9 .....</b>	<b>70</b>
TRANSFORMANDO ÁGUAS: O USO DA BIOMATEMÁTICA NA DESSALINIZAÇÃO DA ÁGUA SALOBRA NA REGIÃO DE CAATINGA DO MUNICÍPIO DE POÇÕES - BA	
Ingrid Barros Meira	
DOI 10.22533/at.ed.1272013019	
<b>CAPÍTULO 10 .....</b>	<b>78</b>
APLICAÇÃO DO MODELO DE MARKOWITZ NA OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO DE RISCO	
Tuany Esthefany Barcellos de Carvalho Silva Marco Aurélio dos Santos Sanfins Daiane Rodrigues dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.12720130110	
<b>CAPÍTULO 11 .....</b>	<b>90</b>
ESQUEMA OPERACIONAL DE BAIXO CUSTO PARA VERIFICAÇÃO ESTATÍSTICA DE MODELOS NUMÉRICOS DE PREVISÃO DO TEMPO	
Nilza Barros da Silva Natália Santos Lopes	
DOI 10.22533/at.ed.12720130111	
<b>CAPÍTULO 12 .....</b>	<b>98</b>
OBSERVATÓRIO SOCIOECONÔMICO DE SANTA CATARINA – OSESC	
Guilherme Viegas Gueibi Peres Souza Andréa Cristina Konrath Rodrigo Gabriel de Miranda	
DOI 10.22533/at.ed.12720130112	
<b>CAPÍTULO 13 .....</b>	<b>104</b>
CRIPTOGRAFIA: O USO DA MATEMÁTICA PARA A SEGURANÇA DE INFORMAÇÕES	
Enoque da Silva Reis Marconi Limeira Gonçalves dos Santos Jucielma Rodrigues de Lima Dias	
DOI 10.22533/at.ed.12720130113	
<b>SOBRE A ORGANIZADORA.....</b>	<b>123</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO .....</b>	<b>124</b>



## APLICAÇÃO DO MODELO DE MARKOWITZ NA OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO DE RISCO

Data de aceite: 05/12/2018

**Tuany Esthefany Barcellos de Carvalho Silva**

Universidade Federal Fluminense  
Niterói – RJ

**Marco Aurélio dos Santos Sanfins**

Universidade Federal Fluminense  
Niterói – RJ

**Daiane Rodrigues dos Santos**

Universidade Veiga de Almeida  
Rio de Janeiro – RJ

**RESUMO:** Os estudos de Markowitz, 1952 foram a base para a Moderna Teoria de Carteiras, que apresenta a diversificação como principal instrumento para a redução do risco global de uma carteira (portfolio) de investimentos. A Moderna Teoria de Carteiras teve início com a publicação do artigo Portfolio Selection por Markowitz (1952). A utilização da diversificação como forma de redução do risco de uma carteira foi amplamente discutida e comprovada por meio de estudos sobre a correlação entre os ativos. A eficiência de uma carteira é relacionada pelo binômio risco e retorno, ou seja, o investidor pode sempre que desejar reduzir o risco de seus investimentos, alterando a alocação, com o intuito de manter

o retorno desejado. Assim sendo, é necessário que carteiras sejam submetidas periodicamente ao monitoramento da performance e da composição dos ativos investidos. Para resolver este problema é de grande utilidade a aplicação de modelos matemáticos que ofereçam suporte às escolhas dos ativos e na definição de seus percentuais em uma carteira. A finalidade deste trabalho, é empregar o modelo de Markowitz para otimizar carteiras de ações atuais. Utilizar o software R-project na modelagem dos dados, bem como aproveitar as atuais funcionalidades de conectividade do software para coletar os dados com isso ser capaz de construir a base de dados necessária para a otimização.

**PALAVRAS-CHAVE:** Otimização; Markowitz; Diversificação.

### APPLICATION OF THE MARKOWITZ MODEL IN THE OPTIMIZATION OF RISK INVESTMENT PORTFOLIOS

**ABSTRACT:** Markowitz's 1952 studies were the basis for the Modern Portfolio Theory, which presents diversification as the main instrument for reducing the overall risk of an investment portfolio. Modern Portfolio Theory began with the publication of the Portfolio Selection article by Markowitz (1952). The use of diversification

as a way to reduce a portfolio's risk has been widely discussed and proven through studies on the correlation between assets. The efficiency of a portfolio is related to the risk and return binomial, that is, the investor may always wish to reduce the risk of his investments by changing the allocation in order to maintain the desired return. Accordingly, portfolios are required to be periodically monitored for the performance and composition of the invested assets. To solve this problem it is very useful to apply mathematical models that support the choice of assets and the definition of their percentages in a portfolio. The purpose of this paper is to employ the Markowitz model to optimize current equity portfolios. Using R-project software in data modeling, as well as taking advantage of the software's current connectivity features to collect the data, will be able to build the database needed for optimization.

**KEYWORDS:** Optimization; Markowitz; Diversification.

## 1 | INTRODUÇÃO

Os estudos de Markowitz foram à base para a Moderna Teoria de Carteiras, que apresenta a diversificação como principal instrumento para a redução do risco global de um portfólio de investimentos. A eficiência de uma carteira é relacionada pelo binômio risco e retorno, ou seja, o investidor pode reduzir o risco de seus investimentos, alterando a alocação, com o intuito de manter o retorno desejado. Para resolver este problema utiliza – se modelos matemáticos que ofereçam suporte à seleção dos ativos.

Apesar de existirem diversos modelos para otimização de investimentos, o presente trabalho utilizará o modelo de Markowitz. O economista Harry Markowitz desenvolveu, pela aplicação de programação quadrática aos ativos que formam o conjunto de possíveis aplicações de um investidor, um processo de otimização que permite a minimização do risco do investidor para um determinado valor de retorno desejado. Ao se realizar o processo para vários valores de retorno, cria-se a denominada curva de Markowitz, que determina a fronteira para a qual as diferentes combinações de proporções de ativos que formam uma carteira de investimentos promovem os maiores retornos com os menores riscos possíveis.

Essa teoria nos mostra que o risco de uma carteira não é dado simplesmente pela soma ponderada do risco dos ativos individuais, para calcular esse risco com eficiência é preciso considerar a correlação entre os ativos. Se os Ativos fossem perfeitamente correlacionados, a diversificação do portfólio poderia eliminar o risco. O fato de os retornos dos ativos terem um alto grau de correlação, mas não serem perfeitamente correlacionados, implica em que a diversificação pode reduzir, mas não eliminar o risco.

## 2 | OBJETIVO

Aplicar a teoria de otimização de portfólio de investimentos de Markowitz para otimizar carteiras de ações, em um único período, que atualmente são listadas na bolsa de valores brasileira (B3), afim de obter diferentes alocações para as classes de ativos que maximizem o retorno que é tão almejado pelo investidor.

## 3 | MATERIAL E MÉTODO

### 3.1 Risco

Na área financeira existem diversos tipos de risco, segundo ASSAF (2006) chama-se de risco o grau de incerteza sobre a rentabilidade de um investimento. A volatilidade, ou desvio padrão, é uma medida de dispersão dos retornos de um título ou índice de mercado, ou seja, quanto mais o preço de uma ação varia num período curto de tempo, maior o risco de se ganhar ou perder dinheiro negociando esta ação. Risco de mercado pode ser definido como as oscilações de preço decorrentes de eventos que atingem sistematicamente todo o mercado. Por isso, também é conhecido como risco sistêmico.

O risco é um dos fatores principais a ser considerado pelos investidores, ao lado da rentabilidade e do prazo de retorno. Visando mensurar o risco de uma carteira, para um retorno pré-definido, foi que surgiu a teoria de Markowitz, a qual traz a equação do risco (desvio-padrão) de uma carteira de dois ativos (i e j) como sendo:

$$\sigma_p = \sqrt{(w_i^2 \cdot \sigma_i^2) + (w_j^2 \cdot \sigma_j^2) + 2 \cdot w_i \cdot w_j \cdot cov_{i,j}} \quad (3.1)$$

Segundo (SHARPE, 1995) as premissas adotadas por Markowitz para a construção de sua inovadora teoria foram: os investidores avaliam as carteiras baseando - se no retorno esperado e no desvio padrão dos retornos em um dado período, repelem o risco e escolhem carteiras com o menor risco dentre as carteiras de mesmo retorno, são completamente racionais, sejam eles iniciantes ou profissionais da área, sempre escolhendo a carteira de maior retorno dentre as carteiras de mesmo risco, os ativos individuais são continuamente divisíveis, o que possibilita aos investidores a compra de frações dos ativos, existe uma taxa livre de risco, na qual os investidores podem tanto emprestar quanto tomar emprestado, os investidores têm a mesma opinião acerca da distribuição das probabilidades das taxas de retorno dos ativos, havendo, assim, um único conjunto de carteiras

eficientes, impostos e custos de transação são irrelevantes. Após o estudo das premissas, Markowitz-1952 afirma que as variáveis que interessam aos investidores na hora de selecionar uma carteira, seriam o retorno esperado e o risco.

### 3.2 Retorno esperado de uma carteira

No mercado financeiro a expectativa em relação a um investimento é conhecida como retorno esperado do mesmo. É quanto se espera ganhar ao investir em determinado ativo.

Segundo (SAMANEZ, 2007), o retorno esperado de um ativo em uma carteira de ativos é a média central da distribuição probabilística dos retornos desse ativo. O retorno de uma carteira de ativos pode ser estimado calculando-se a soma dos produtos dos retornos dos ativos pelos respectivos pesos de cada ativo na carteira.

### 3.3.3 Modelo de Markowitz: a origem da moderna teoria de carteiras

Na literatura financeira, os agentes econômicos, buscam obter o maior rendimento dos seus investimentos e ao mesmo tempo querem minimizar o risco dos mesmos. A principal contribuição aos modelos de finanças no que diz respeito aos desenhos dos fundamentos da teoria de composição de carteiras deve-se aos trabalhos de Harry Markowitz na década de 1950. A Teoria Moderna de Carteira é utilizada há muitos anos para seleção de carteiras de investimento, demonstrando como investidores podem utilizar o princípio da diversificação para buscar a melhor relação risco versus retorno de suas carteiras de investimentos.

Os conceitos desta teoria foram inicialmente formulados por H. Markowitz, com a publicação do famoso artigo Portfolio Selection em 1952, assim foi instituída a nova abordagem para o conceito de risco dos investimentos. Contrariando a ideia de que a melhor opção para a composição da carteira consistia na concentração de investimentos em ativos que ofereciam os maiores retornos e menores riscos, o que limitava as opções de investimentos e nem sempre fornecia o retorno desejado, Markowitz propôs que seria possível obter combinações mais eficientes de alocação de recursos por meio da diversificação do risco dos ativos que compunham a carteira e, assim, estruturou as bases sobre as quais se firmou a Teoria Moderna de Carteiras. O método de Markowitz possibilita que os investidores sejam capazes de definir todas as carteiras ótimas, em relação ao binômio risco versus retorno formando assim a fronteira eficiente, que nada mais é do que a combinação de um conjunto de ativos que forneça o maior retorno dado um nível de risco ou que forneça o menor risco para um determinado retorno (SANTOS, 2006).

### 3.4 Fronteira eficiente

O conceito de Fronteira Eficiente trata da combinação de um determinado grupo de ações formando infinitas e diferentes carteiras. As carteiras na fronteira eficiente são chamadas de carteiras ótimas, ou seja, pela definição de Markowitz, fronteira eficiente é a linha das carteiras que apresentam o máximo retorno para um determinado valor de risco.

### 3.5 Índice Bovespa (IBOVESPA)

A Bolsa de Valores de São Paulo - Bovespa por muito tempo foi a bolsa oficial do Brasil, até se fundir com a BM&F para criação de uma nova instituição, denominada BM&FBovespa no dia 8 de maio de 2008. Nela os investidores podem comprar e vender ações de companhias que funcionam como empresas abertas. A BOVESPA é uma associação civil sem fins lucrativos, com autonomia administrativa, financeira e patrimonial.

O Índice Bovespa<sup>1</sup> é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações das ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo. É formado por uma carteira das ações com o maior volume negociado nos últimos meses.

## 4 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram utilizadas funções criadas no R para calcular o modelo de Markowitz média-variância eficiente, essas funções devem ser usadas para mostrar a aplicação da teoria de Markowitz, juntamente com o pacote fPortfolio.

Para a realização da análise foram coletados dados dos retornos diários de 4 grandes empresas de setores que compõem o Índice BOVESPA, ou seja, o mais importante indicador do desempenho médio das cotações das ações negociadas na B3 (Brasil, Bolsa, Balcão), formado pelas ações com maior volume negociado nos últimos meses. Os dados são referentes ao período de 1 a 9 de janeiro de 2019, totalizando 7 observações para cada ativo.

As quatro ações analisadas, seus códigos e respectivos setores estão relacionados na tabela 1.

---

1. Ibovespa

Empresa e código	Classificação sectorial
Brasil BBAS3	Financeiro / Intermediários Financeiros / Bancos
CCR SA CCRO3	Bens Industriais / Transporte / Exploração de Rodovias
Gerdau GGBR4	Materiais Básicos / Siderurgia e Metalurgia / Siderurgia
Petrobras PETR4	Petróleo. Gás e Biocombustíveis

Tabela 1 – Ações consideradas

Fonte: Elaboração própria, 2019

Considerando um intervalo de tempo diário, pode - se observar abaixo na tabela 2, as estatísticas descritivas da rentabilidade de cada ativo. Nota - se que o Ativo com menor risco é o GGBR4, o Ativo com maior risco e rendimento diário é o PETR4, e o de maior rendimento BBAS3.

Ativos	Mín	Média	Máx	Variância	Desvio padrão
BBAS3	45,39	45,98	46,34	0,14	0,37
CCRO3	11,61	12,04	12,60	0,12	0,35
GGBR4	14,84	15,23	15,73	0,08	0,28
PETR4	23,77	24,59	25,17	0,21	0,46

Tabela 2 – Rentabilidade dos Ativos

Fonte: Elaboração própria com base nos dados publicados

## 4.1 Análises

Para especificar uma carteira, precisa-se da matriz de covariância dos ativos selecionados para carteira ou portfólio. Para cálculo dos portfólios utilizou – se os seguintes dados:

Nome dos Ativos	<code>&gt; asset.names &lt;- c("BBAS3", "CCRO3", "GGBR4", "PETR4")</code>
Matriz de Covariância	<code>&gt; covmat &lt;- cov(dados)</code>

Tabela 3 – Dados de entrada no programa R-project

Fonte: Elaboração própria, 2019

Para a criação de portfólios dos ativos selecionados, e para mostrar pontos relacionados a cada ativo individualmente, foram utilizados inicialmente os pacotes **fportfolio** e **timeSeries**. Para uma melhor compreensão sobre a modelagem, foram criadas séries temporais dos ativos com a função **as.timeSeries** do pacote **timeSeries**.

Para realizar a otimização inicialmente aplicou - se a função **tangencyPortfolio**, que retorna o portfólio com a maior relação risco/retorno na fronteira eficiente. Para

o modelo de portfólio de Markowitz, isso é o mesmo que o índice de Sharpe.

Na tabela 4 observa - se os pesos e os riscos individuais de cada ativo no portfólio com a maior relação risco/retorno.

Ativos	Peso	Risco(Cov)
BBAS3	0,457	0,717
CCRO3	0,000	0,000
GGBR4	0,542	0,282
PETR4	0.000	0,000

Tabela 4 – Portfólio de Tangência

Fonte: Elaboração própria com base nos dados publicados

A tabela 5 apresenta o retorno esperado de 29,286 e o risco do portfólio de 0,114. Neste portfólio obteve - se a melhor relação risco/retorno dentre os ativos selecionados, onde há um equilíbrio entre o risco e o retorno esperado pelo investidor.

Retorno	Risco
29,286	0,114

Tabela 5 – Retorno e Riscos – geral

Fonte: Elaboração própria com base nos dados publicados

Na figura 1 pode – se visualizar graficamente o portfólio de tangência, observando os pesos dos ativos.

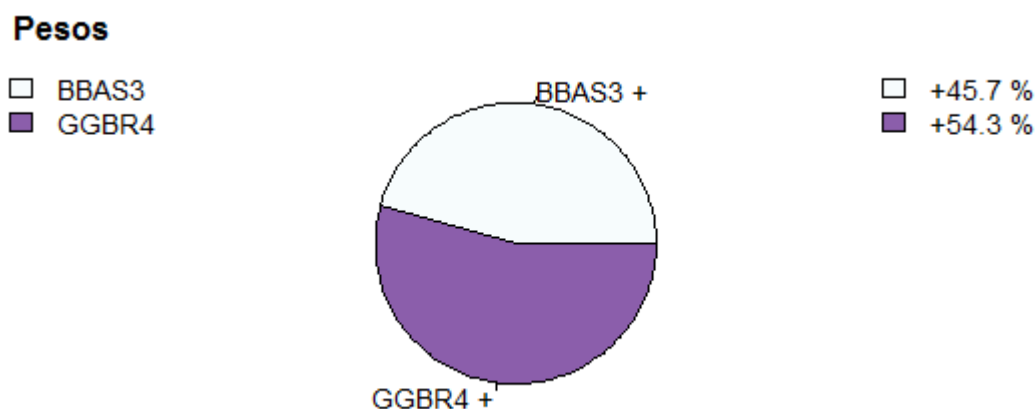


FIGURA 1 – Portfólio de tangência. Fonte: Elaboração própria (2019).

Aplicando o princípio da dominância para todas as combinações possíveis de carteiras, chega - se a um dos pontos principais da teoria do portfólio de Markowitz

a Carteira de Variância Mínima (CMV). Com a função *minvariancePortfolio* obteve-se o portfólio da fronteira eficiente com o risco mínimo. Podemos observar os pesos e riscos do portfólio com risco mínimo, na tabela 6.

Ativos	Pesos	Risco
BBAS3	0,420	0,420
CCRO3	0,009	0,009
GGBR4	0,570	0,570
PTR4	0,000	0,000

Tabela 6 – Portfólio de Variância Mínima  
 Fonte: Elaboração própria com base nos dados publicados

A tabela 7 apresenta as estatísticas da Carteira de Variância Mínima, observa-se um retorno esperado de 28,131, para um risco de 0,111, este é o portfólio de menor risco dentre os Ativos selecionados inicialmente. O processo utilizado para encontrar a Carteira de Variância Mínima (CMV) se resume em encontrar o portfólio de menor desvio-padrão dentre todas as combinações possíveis dos Ativos.

Retorno	Risco
28,131	0,111

Tabela 7 – Retorno e Riscos - geral  
 Fonte: Elaboração própria com base nos dados publicados

Na figura 2 pode – se visualizar graficamente os pesos dos ativos na carteira de variância mínima (CMV).

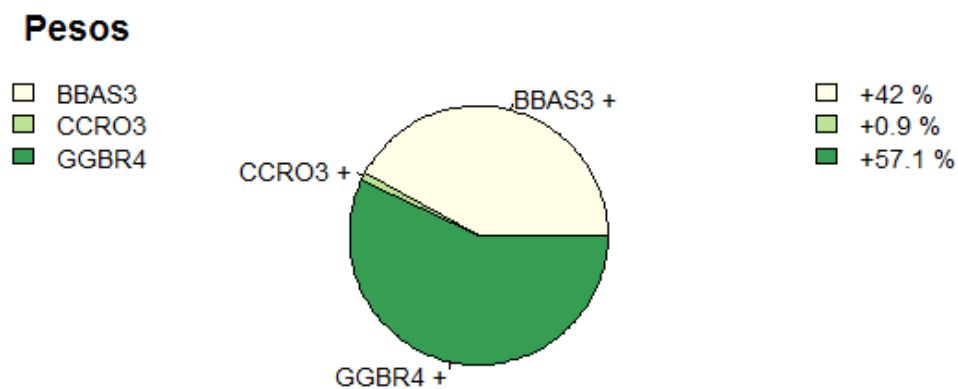


FIGURA 2 – Carteira de variância mínima CMV.  
 Fonte: Elaboração própria (2019).



Analisando os portfólios que oferecem o maior retorno para um determinado nível de risco foi possível determinar a Fronteira Eficiente (figura 3). Com a variação do nível de tolerância ao risco, as proporções investidas mudam em cada classe de ativo. Os portfólios obtidos neste trabalho foram denominados por Markowitz (1952) de portfólios eficientes, e o conjunto deles de Fronteira Eficiente. Os portfólios que compõem a fronteira possuem o máximo retorno para um dado nível de risco, a partir da CMV, foi feito um ponto em todas as combinações de Ativos que possuem o menor nível de risco para qualquer retorno superior ao da CMV. Ainda observando a figura 3, de acordo com a Teoria de Markowitz, não são indicados investimentos nos portfólios abaixo do ponto destacado em vermelho, pois com o mesmo nível de risco pode - se investir nos portfólios a cima do ponto, obtendo um retorno estimado maior. No geral o gráfico inclui a fronteira eficiente, a linha de tangência e o ponto de tangência para uma taxa livre de risco, o portfólio de pesos iguais, nomeado por **EWP**. A linha de Sharpe também é mostrada, com seu máximo coincidindo com o ponto do portfólio de tangência. O intervalo da proporção Sharpe é impresso no eixo do lado direito do gráfico.

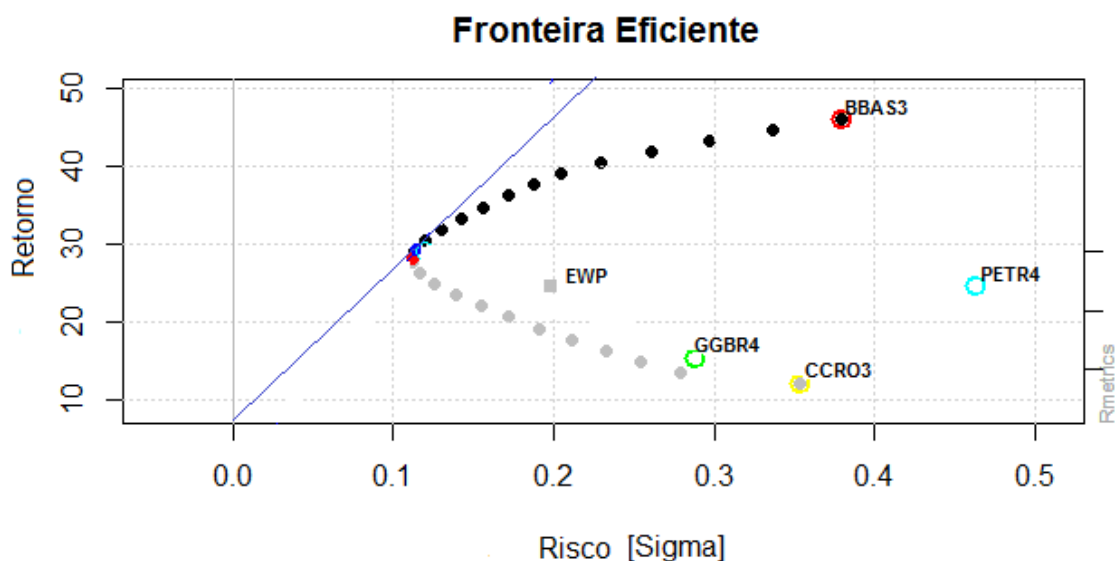


FIGURA 3 – Fronteira Eficiente. Fonte: Elaboração própria (2019).

A diversificação melhora a eficiência do portfólio, pois na medida em que novos ativos são adicionados, o risco total é reduzido, quando favorecidos por correlações negativas, já o retorno do portfólio será determinado pela ponderação dos retornos dos ativos individuais. A diversificação entre investimentos é importante para melhorar a relação risco/retorno do portfólio, deixando-o mais eficiente para se adequar melhor ao perfil de cada investidor, ou seja, a figura 3 propõe a melhor relação possível entre retorno e risco, indicando qual o ponto ótimo da carteira do retorno esperado em relação ao risco a ser tomado.

Na figura 4 observa-se os pesos ao longo da fronteira eficiente, os gráficos de cima para baixo mostram os pesos, os retornos, ou seja, atribuição de desempenho e risco. O eixo superior rotula o risco alvo e o inferior rotula o retorno. A linha vertical separa a fronteira eficiente da variação mínima. O eixo de risco, como pode ser visto, aumenta em valor para ambos os lados da linha vertical separadora.

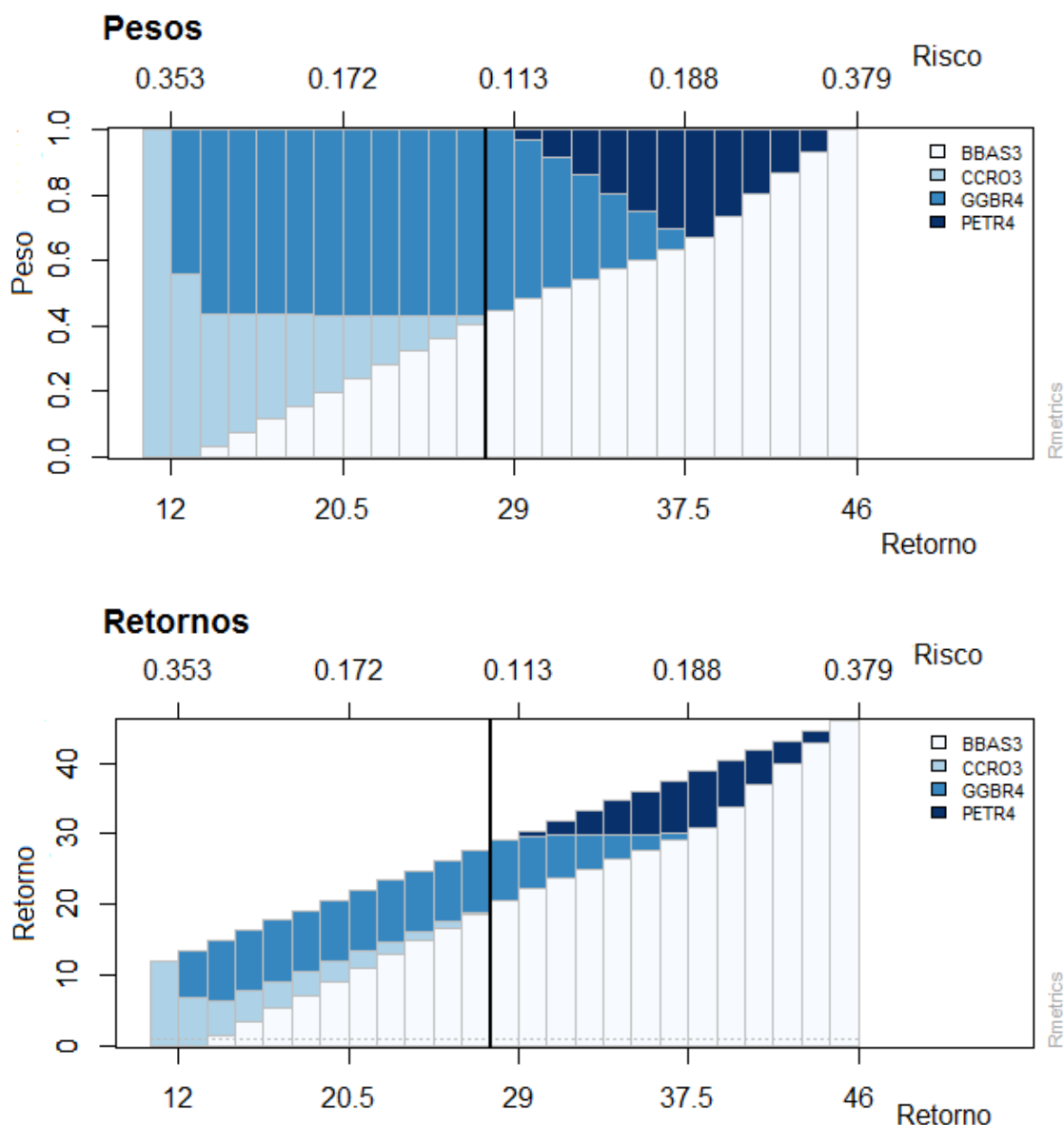


FIGURA 4 – Pesos ao longo da fronteira eficiente de uma variação média.

Fonte: Elaboração própria (2019).

## 5 | CONCLUSÃO

A Teoria desenvolvida por Markowitz (1952) é muito interessante para o cálculo de proporção de ativos em um portfólio diversificado. Este trabalho objetivou utilizar a Teoria Moderna do Portfólio para aumentar o retorno esperado, no entanto sem o aumento de risco, mostrando que o risco de uma carteira não é dado simplesmente

pela soma ponderada do risco dos ativos individuais, precisando considerar a correlação existente entre os ativos, evidenciando as vantagens de uma correlação negativa entre os mesmos, para que estes compensem em suas oscilações diárias as grandes volatilidades. Partindo do entendimento que todo investidor busca o maior retorno possível dado certo nível de risco.

Para qualquer valor de risco, a fronteira eficiente de Markowitz identifica um ponto que é a carteira eficiente de maior retorno para um dado risco, assim como, para qualquer valor de retorno, a fronteira também identifica carteira com risco mínimo. A Fronteira Eficiente é representada por uma linha composta de infinitos pontos correspondentes a diferentes carteiras e se estende da carteira de retorno máximo à Carteira de Variância Mínima. Essa diversidade de carteiras possibilita a escolha da melhor opção para cada investidor de acordo com suas preferências em relação ao risco retorno do investimento (SUCOLOTTI, 2007). A Teoria apresentada é uma ferramenta útil para a composição de carteiras que maximizem a relação risco retorno frente à volatilidade do mercado financeiro, os estudos de Markowitz (1952) trouxeram a diversificação de ativos como forma de redução do risco de uma carteira.

Obteve-se um portfólio de tangência com um nível de retorno esperado igual a de 29,286, para um risco de 0,114, sendo este o portfólio com melhor relação risco e retorno para os ativos selecionados. Para a Carteira de Variância Mínima (CMV) observa-se um retorno esperado de 28,13 com um nível de risco de 0,111, dentre todos os portfólios gerados para tais ativos, este portfólio é o de menor risco.

Os resultados encontrados demonstram o mérito do desempenho da carteira gerada através do modelo Markowitz, com a aplicação do modelo foi alcançado o resultado esperado, determinando a Fronteira Eficiente dos ativos e a carteira de variância mínima (CMV).

## REFERÊNCIAS

- [1] FILHO ZWINGLIO DE OLIVEIRA GUIMARÃES; LIMA FERNANDO GUSTAVO NOGUEIRA. **Análise Estatística do Índice Ibovespa** ed. [S.I.: s.n.], 2015.
- [2] MARKOWITZ, H. M. **Portfolio Selection**. [S.I.]: Journal of finance n. 1, v. 7, p.77-91, 1952
- [3] NETO, A. A. **Mercado Financeiro**. [S.I.]: Atlas, 2007.
- [4] PEREIRA LEONARDO BOECHAT TAVARES; HENRIQUE, D. C. **Otimização de Investimentos pelo modelo de Markowitz via desenvolvimento de uma ferramenta em excel**. [S.I.]: UFSC, 2016.
- [5] SAMANEZ, C. P. **Gestão de investimentos e geração de valor**. [S.I.]: São Paulo: Pearson, 2007.
- [6] SANTOS H. P. DOS; AMBROSI, I. L. J. C. B. L. **Análise de risco em quatro sistemas de rotação de culturas para trigo, num período de dez anos, em Passo Fundo**. [S.I.]: Pesquisa Agropecuária

Tropical - RS, 1999.

[7] SHARPE WILLIAN F.; ALEXANDER, G. J. B. J. V. I. **New Jersey: Prentice Hall. 5. ed. [S.l.: s.n.], 1995.**

[8] WURTZ DIETHELM.; SETZ TOBIAS.; CHALABI YOHAN.; CHEN WILLIAN.; ELLIS ANDREW. **Portfolio optimization with R/ Rmetrics. [S.l.: s.n.], 2015.**

## **SOBRE A ORGANIZADORA**

**ANNALY SCHEWTSCHIK** - Mestre em Educação, MBA em Governança Pública e Gestão Administrativa, Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e Especialista em Neuropsicopedagogia, Licenciada em Matemática e Licenciada em Pedagogia. Professora da Educação Básica e do Ensino Superior em Pedagogia, Administração e Tecnólogo em Radiologia, assim como em Pós-Graduação em Educação e em Educação Matemática. Atuante na área da Educação há 25 anos, tem diversos trabalhos publicados em livros, em periódicos e em anais de eventos pelo Brasil. Atualmente é Empresária em Annaly Schewtschik Coach Educacional atuando em Consultoria e Assessoria Educacional, Avaliação e Formação de Professores, além de estar Assessora Pedagógica da Rede Municipal de Educação de Ponta Grossa – Pr.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Alfabetização matemática 23  
Aplicações matemáticas 112, 114  
Aprendizagem matemática 2, 12, 50

### C

Capitalização contínua 57, 58, 60  
Conhecimentos estatísticos e percentuais 50  
Constante matemática 57

### D

Desafios matemáticos 14  
Dessalinização 70, 72, 73, 77  
Distribuição binomial 44, 45, 47  
Distribuição normal 44, 45, 47, 48, 49  
Durabilidade 63, 64, 68

### E

Econometria 98, 102  
Economia 64, 69, 72, 98, 99, 100, 101, 102  
Educação básica 2, 7, 30, 31, 32, 34, 41, 114, 123  
Educação especial 23, 24, 25, 29  
Eficácia 63, 107  
Ensino/aprendizagem 14, 22  
Estatística econômica 98

### F

Ferramenta metodológica 14, 21  
Fórmula de young 63

### G

Geogebra 1, 2, 13  
Geometria 1, 2, 3, 11, 12, 37, 40, 50

### J

Jogos interativos 23, 29  
Jogos nas aulas de matemática 14, 17

## L

Logaritmo natural 57, 58

## M

Modelo de Markowitz 78, 81

Modelos matemáticos 78, 79

Molhabilidade 63, 65, 66, 69

## N

Números racionais 50, 52

## O

Otimização 22, 78, 79, 80, 83, 88

## P

Poliminós 4, 5, 6, 12

Previsões e observações 90

Probabilidade 3, 44, 45, 46, 47, 48

Programação 57, 58, 59, 79, 92

Proporção 11, 14, 17, 18, 21, 50, 52, 86, 87

## Q

Qualidade 25, 32, 52, 63, 64, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 90, 106

## R

Razão 14, 17, 18, 21, 50, 52

## S

Séries temporais 83, 98, 99, 100, 101, 102

Sistema de baixo custo 91

Superfícies superhidrofóbicas 63, 67, 69

## T

Tecnologias nas aulas de matemática 1, 2

Teoria da complexidade 30, 32, 34

Teoria de carteiras 78, 79, 81

Transdisciplinaridade 30, 31, 32, 33, 34, 42, 43

## U

Unidades de medidas 50

## V

Variável aleatória 44

Verificação estatística 90



