

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)



As Diversidades de Debates na Pesquisa em Matemática 2


Atena
Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)



As Diversidades de Debates na Pesquisa em Matemática 2

 **Atena**
Editora
Ano 2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Chefe: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Geraldo Alves
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof^a Dr^a Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof^a Dr^a Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Prof^a Dr^a Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof^a Dr^a Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof^a Dr^a Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
D618	As diversidades de debates na pesquisa em matemática 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. – (As diversidades de debates na pesquisa em matemática; v. 2) Formato: PDF Requisitos de sistemas: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-847-2 DOI 10.22533/at.ed.472192012 1. Matemática – Pesquisa – Brasil. 2. Pesquisa – Metodologia. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série. CDD 510.7
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena
Editora

Ano 2019

APRESENTAÇÃO

A matemática nos dias de hoje, tem se mostrado uma importante ferramenta para todo cidadão, logo, não é somente restrita a comunidade científica que se dedica a esta área. Diante de toda as informações a que somos expostos a todo tempo, cabe a cada pessoa ser capaz de analisar, interpretar e inferir sobre elas de maneira consciente.

Esta obra, intitulada “A diversidade em debates de pesquisa em matemática” traz em seu conteúdo uma série de trabalhos que corroboram significativamente para o olhar da pesquisa matemática em prol da discussão das diversidades. Discussões essas que são pertinentes em tempos atuais, pois apontam para o desenvolvimento de pesquisas que visam aprimorar propostas voltadas à inclusão e a sociedade.

Ao leitor, indubitavelmente os trabalhos aqui apresentados ressaltam a importância do desenvolvimento de temas diversos na disciplina de Matemática.

Que a leitura desta obra possa fomentar o desenvolvimento de ações práticas voltadas às diversidades na Educação, tornando o Ensino da Matemática cada vez mais voltado a formação cidadã.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL POR MEIO DO USO DE MATERIAL CONCRETO: REFLEXÕES SOBRE O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM	
Andrey Alves do Couto Ana Cristina Gomes de Jesus	
DOI 10.22533/at.ed.4721920121	
CAPÍTULO 2	12
UM ESTUDO SOBRE O USO DA CALCULADORA NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA	
Rodolfo França de Lima Dirceu Lima dos Santos Adriano Pilla Zeilmann	
DOI 10.22533/at.ed.4721920122	
CAPÍTULO 3	25
CONTEXTUALIZANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA: INVENTÁRIO FLORESTAL	
Gabriele Cristina Lupchuk Izabel Passos Bonete	
DOI 10.22533/at.ed.4721920123	
CAPÍTULO 4	37
NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES: UM NOVO OLHAR SOBRE OS NÚMEROS REAIS	
Suemilton Nunes Gervázio	
DOI 10.22533/at.ed.4721920124	
CAPÍTULO 5	47
SEXUALIDADE EM FOCO: ATUAÇÃO DO PIBID INTERDISCIPLINAR NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA	
Ariston Rodrigo Silva Lima Tiago Martins Pereira de Carvalho Jaqueline Carvalho Machado Vinícius Vieira da Silva Dutra Lucas dos Santos Passos Luciana Aparecida Siqueira Silva	
DOI 10.22533/at.ed.4721920125	
CAPÍTULO 6	57
TÁBUAS DE FRAÇÕES: APRENDIZAGEM CRIATIVA NO ENSINO FUNDAMENTAL	
Márcio Lima do Nascimento Lucas Batista Paixão Ferreira	
DOI 10.22533/at.ed.4721920126	
CAPÍTULO 7	66
UMA INCOMENSURABILIDADE ARITMÉTICO-GEOMÉTRICA E A EXTENSÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS PARA OS NÚMEROS REAIS	
Marcos Garcia de Souza	
DOI 10.22533/at.ed.4721920127	

CAPÍTULO 8	81
REPUTAR A DIDÁTICA NA AULA DE MATEMÁTICA: O REFLEXIONAR UM REFERENCIAL SIGNIFICATIVO PARA (RE)INTRODUZIR OS FUNDAMENTOS DAS QUATRO OPERAÇÕES ARITMÉTICAS	
José Maione Silva Lemos Sidney Allessandro. da Cunha Damasceno	
DOI 10.22533/at.ed.4721920128	
CAPÍTULO 9	92
JOGOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: A INCLUSÃO DE ALUNOS COM DEFICIÊNCIA VISUAL	
Janaína Fonseca Barbosa Aline Maria de Lucena Wiliana Maria Torres da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.4721920129	
CAPÍTULO 10	98
ENSINANDO GEOMETRIA COM MASSA DE MODELAR: UMA EXPERIÊNCIA FORMATIVA	
Ewerson Tavares da Silva Ricardo Vieira Nascimento Filho Barbarah Soares de Moraes Diana Bonne Caetano Moura Maxwell Gonçalves Araújo Glen Cezar Lemos Franciane José da Silva Ana Cristina Gomes de Jesus	
DOI 10.22533/at.ed.47219201210	
CAPÍTULO 11	108
MATEMÁTICA E AFRICANIDADE NA ESCOLA QUILOMBOLA	
Alexander Cavalcanti Valença	
DOI 10.22533/at.ed.47219201211	
CAPÍTULO 12	119
JOGO COM CARTAS PARA O ENSINO DA OPERAÇÃO DE SOMA NO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS	
Lourival Divino Faria Bruno Diniz Faria Rezende	
DOI 10.22533/at.ed.47219201212	
CAPÍTULO 13	126
O USO DO CUBO MÁGICO COMO RECURSO PEDAGÓGICO PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO	
Juliana Moreno Oliveira Gizele Geralda Parreira Luciano Duarte da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.47219201213	

CAPÍTULO 14	134
EFEITO DA MÁ ESPECIFICAÇÃO DE MODELOS NAS COMBINAÇÕES DE PREVISÃO EM SÉRIES TEMPORAIS COM LONGA DEPENDÊNCIA	
Cleber Bisognin Letícia Menegotto Liane Werner	
DOI 10.22533/at.ed.47219201214	
CAPÍTULO 15	149
PERFIL DOS PARTICIPANTES EM CRIMES DE VIOLÊNCIA DOMÉSTICA, NO RIO GRANDE DO SUL (LEI Nº 11.340 - LEI MARIA DA PENHA)	
Helena Simeonidis Grillo Patrícia Klarmann Ziegelmann	
DOI 10.22533/at.ed.47219201215	
CAPÍTULO 16	162
P_{DCCA} APLICADO ENTRE TEMPERATURA AMBIENTE E UMIDADE RELATIVA DO AR: MÉDIAS DISTINTAS	
Andrea de Almeida Brito Aloísio Machado da Silva Filho Ivan Costa da Cunha Lima Gilney Figueira Zebende	
DOI 10.22533/at.ed.47219201216	
CAPÍTULO 17	167
O EFEITO DO USO DE UM <i>APPLET</i> NA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM DENOMINADORES NUMA TURMA DO 7.º ANO DE ESCOLARIDADE DO ENSINO BÁSICO	
Ana Paula Lima Gandra Ana Paula Aires Paula Catarino	
DOI 10.22533/at.ed.47219201217	
SOBRE O ORGANIZADOR	179
ÍNDICE REMISSIVO	180

NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES: UM NOVO OLHAR SOBRE OS NÚMEROS REAIS

Suemilton Nunes Gervázio

RESUMO: Este artigo é resultado de uma pesquisa de trabalho de conclusão de curso de graduação, feita a cerca da classificação dos números reais em outros dois importantes conjuntos numéricos, divergentes dos racionais e irracionais, que é entre algébricos e transcendententes. Para tanto, apresentamos inicialmente as definições destes “novos” conjuntos numéricos e uma análise histórica sobre os mesmos. Com o objetivo de esclarecer a completude desses conjuntos, mostraremos sucintamente suas particularidades e a busca implacável de muitos matemáticos, para encontrar a demonstração da transcendência de alguns números importantes da matemática. Por fim, discutiremos a aplicabilidade dessa nova formação dos números reais em séries finais do ensino médio.

PALAVRAS-CHAVE: Números algébricos, Transcendência, Números reais.

1 | INTRODUÇÃO

A história nos mostra que o Homem desenvolveu suas habilidades intelectuais em ações voltadas para fins religiosos e, nesse âmbito, o conceito dos números foi motivo

de muitas discussões e questionamentos. A aceitação ou não do infinito numérico aparece, nesse contexto, como um “popstar” desses conflitos de idéias.

O domínio do número, por sua vez, foi um dos grandes desafios dos matemáticos da antiguidade que se deparavam, na maioria das vezes na resolução de equações, com alguns elementos que apareciam com certa estranheza e que causavam dúvidas em relação a sua classificação, pois, estes números apresentavam peculiaridades desconhecidos. Pode-se dizer assim, que estes problemas foram fundamentais para o entendimento que temos hoje sobre os conjuntos numéricos, seus significados e operações.

Nesse contexto, surge uma definição clássica que englobaria todos os conjuntos numéricos e que poderia ser colocada numa correspondência biunívoca com uma reta (o que hoje consideramos como a reta real), os chamados números reais **R**. Estes, formavam um conjunto completo e que portanto poderia representar qualquer quantidade de “coisas reais” presentes no cotidiano.

Sendo assim, devido essa aparente completude, os números reais representariam quantidades, positivas ou negativas, exatas ou

inexatas e finitas ou infinitas e, desde a antiguidade, a forma mais comum de compor tal conjunto é pela união entre os conjuntos dos números Racionais \mathbb{Q} e Irracionais \mathbb{I} , que é a composição mais usada até nos dias de hoje.

Entretanto, estudos mais recentes mostram uma nova representação do conjunto dos números reais, na qual estes também podem ser apresentados como composição de dois grandes conjuntos numéricos, os algébricos e os transcendentais. Essa divisão dos reais pode ser considerada mais propícia e condizente com os estudos atuais que envolvem a teoria dos números. E é neste contexto, a nova divisão dos números reais, que este capítulo será desenvolvido.

2 | UM BREVE HISTÓRICO DO SURGIMENTO DOS NÚMEROS E SEU DESENVOLVIMENTO

Em seu desenvolvimento intelectual o homem se baseou principalmente pela sua intuição e pela experiência acumulada de gerações anteriores. Isso se aplica a quase todas as coisas humanas e podemos afirmar que a Matemática não constitui uma exceção.

O processo evolutivo do número esclarece a história acima, onde esse desenvolvimento se deu através de erros e acertos, equívocos e hesitações. Assim é factível conjecturarmos que os números foram construídos pela mente humana, que foi guiada muito provavelmente por elementos relacionados à heurística matemática.

Nesse contexto, é importante frisarmos que a forma como a maior parte dos livros de matemática são escritos é baseada na continuidade lógica e não na sequência histórica, e isso pode levar os estudantes a falsa impressão de que o progresso histórico do número, ocorreu na ordem em que foram escritos os capítulos do livro. Isso pode os induzir a um equívoco, no qual a Matemática não tem elementos humanos, que ela está baseada na razão pura, que suas bases foram construídas sem erros ou equívocos. Ou seja, conforme [1] argumenta, "o leigo acha que a estrutura da Matemática não foi erguida pela mente errante do homem, mas pelo infalível espírito de Deus".

Assim, partindo do princípio histórico e não lógico, iremos explicar agora a sequência em que os conjuntos numéricos foram sendo descobertos e aceitos pelos matemáticos.

O primeiro conjunto numérico que o Homem teve contato e passou a fazer operação ingênuas com estes, foram os naturais \mathbb{N} . A idéia particular desse conjunto se prende imediatamente a mais singela experiência, onde os primitivos empregavam em sua simplicidade, corretamente os cardinais e ordinais. Estes faziam correspondência entre objetos de coleções diferentes, tendo dessa forma

uma noção rudimentar sobre os números.

Outra categoria numérica que veio subsequente aos naturais foi o conjunto dos números fracionários, como uma necessidade prática de subdivisão de objetos ou de certas grandezas contínuas como o tempo e/ou espaço. Os primeiros povos a utilizar com propriedade os fracionários, foram os egípcios. No entanto, apesar deles operarem com grande habilidade esses números, não havia a presença de justificativas teóricas.

Dando sequencia histórica aos conjuntos numéricos, temos em seguida, os números irracionais, ou como podemos chamar também, as grandezas incomensuráveis. A descoberta desses números é considerada por muitos historiadores como a engenhosidade mais singular da escola Pitagórica. Nenhuma outra grandeza perturbou tanto os geômetras gregos quanto tais.

Logo após a identificação da existência dos números irracionais, surgiu o conjunto dos números negativos, através da necessidade de interpretar o resultado de uma subtração, quando o diminuendo é menor que o subtraendo. A lógica matemática creditada aos gregos evitava explicitamente este caso, no entanto, os hindus que não seguiam muito a risca tal lógica, calculavam com esses números desde o século VII, distinguindo os valores positivo e negativo de uma raiz quadrada.

Mesmo com a descoberta e utilização dos conjuntos numéricos citados anteriormente, durante vários séculos os matemáticos ainda se deparavam com problemas onde os números reais, formados assim pelos naturais, negativos, fracionários e irracionais, não eram suficientes para a resolução de todos os problemas que envolviam a teoria dos números. Daí veio a necessidade da criação de outro conjunto, mais completo e que englobasse a solução de toda e qualquer tipo de equação algébrica, com isso surgiu o conjunto dos números complexos.

Poucos matemáticos tentaram encontrar tais soluções, pois estas envolviam números imaginários, e assim os complexos passaram a ser considerados entidades místicas, sem fundamentos e impossíveis. Entretanto, devido a sua grande completude, a aceitação desses tipos de números se consolidou a partir de grandes matemáticos como por exemplos os famosos Cardan e Bombelli.

Tal fato se concretizou porque não havia como negar que os números reais eram insuficientes para se tratar de equações algébricas. Assim, no século XVI passou a ocorrer um fato semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número π , que não era racional: o conceito de número precisava ser estendido.

No século XVIII o conjunto dos complexos começou a perder seu caráter algébrico. A famosa identidade descoberta por De Moivre mostrou o papel de tal conjunto na Trigonometria, enquanto Euler ampliou a fórmula de De Moivre, introduzindo o número transcendente $e^{i\pi} + 1 = 0$. Essa expressão foi considerada por alguns

de seus contemporâneos como possuindo significado sobrenatural. Na verdade, ela contém os símbolos mais importantes da Matemática moderna e foi encarada como uma espécie de união mística, em que a Aritmética era representada por 0 e 1, a Álgebra pelo símbolo i , a Geometria por π e a análise pelo número transcendente e

3 | OS NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS: A FORMA MAIS CLÁSSICA DE CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

O conceito dos números Reais \mathbf{R} , surgiu por volta do ano 1000 a.c, a partir da utilização de frações pelos egípcios e sendo aprimorada posteriormente pelos gregos. Este conjunto é apresentado como uma forma de representação da união dos números racionais \mathbf{Q} e Irracionais \mathbf{I} , onde os Racionais se subdividem em Inteiros (\mathbf{Z}), Positivos e Negativos, mais os números fracionários, ou seja, todos aqueles que podem ser expressos na forma $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros e $q \neq 0$. Já os Irracionais são aqueles que não podem ser o resultado do quociente $\frac{p}{q}$

Dessa forma, pode-se dizer que o conjunto dos números reais é uma expansão dos números racionais. Assim, os reais são compostos não só pelos inteiros, positivos, negativos e fracionários mais também pelos irracionais, como está acima supracitado.

Nesse contexto, é válido ressaltar que a noção do que hoje consideramos como número real, se deu pelo processo de medição de segmentos geométricos. Isso nos leva a uma modelagem do que seria a representação dos números reais, onde se considera que um segmento de reta qualquer, \overline{AB} , serve como um protótipo para o número real. Esta simbologia em representar os números reais é tão importante que o conjunto dos números reais é atualmente conhecido como a reta real.

Podemos considerar, neste sentido, que o conjunto dos reais pode ser analisado como um modelo aritmético de uma reta, enquanto esta pode ser vista como uma representação geométrica de \mathbf{R} . Este envolvimento entre a geometria e a aritmética, pontos e números, é um dos fatores cruciais nos estudos que envolvem a matemática da atualidade.

Como foi acima mencionado, um segmento de reta \overline{AB} , qualquer, serve como simbologia para representar um número real, então o problema da composição desses números está exatamente nos segmentos de reta que não são comensuráveis. Para entendermos melhor a comensurabilidade de um segmento, é importante salientar que, fixando um segmento padrão $z = 1$ e com outro segmento \overline{AB} , se z couber um número exato de vezes (y vezes) dentro de \overline{AB} , então o comprimento de \overline{AB} , será y . O problema está no fato de que nem sempre isso acontece.

Para uma melhor compreensão sobre essa temática, recorreremos a seguinte definição:

Definição 2: Um segmento de reta \overline{AB} , e um segmento padrão z , serão ditos comensuráveis se existir algum segmento x , que caiba n vezes em z e m vezes em \overline{AB} , caso contrário esses segmentos serão chamados Incomensuráveis.

Dessa forma, é fácil verificar que os segmentos que forem comensuráveis, podem ser expressos da forma $\frac{p}{q}$ com $q \neq 0$, representando assim os números racionais, e os que são incomensuráveis representam os irracionais. Nessa acepção, a reta real (o conjunto dos números reais) estará completa.

É interessante ressaltar que, para que se chegasse a essa representação dos números reais os matemáticos da antiguidade passaram por vários percalços, indecisões e conflitos. Nesse contexto, eles se dividiram em três escolas filosóficas de pensamento: o Intuicionismo, o Logicismo e o Formalismo, onde cada uma dessas escolas, tinha suas crenças em relação aos números. Apresentando assim algumas restrições em aceitar alguns conjuntos numéricos, fato este que os levavam a conflitos de idéias na construção dos números reais.

4 | OS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

Outra maneira mais formal de representar o conjunto dos números reais é a separação do mesmo em algébricos e transcendentos. Essa forma de subdivisão é bastante eficaz e trazem, para alguns números irracionais, uma nova perspectiva, o que os tornam mais simples em suas formações e posições na reta real.

Quando um número real qualquer β satisfaz uma equação polinomial do tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Com os coeficientes a_i 's inteiros e $a_n \neq 0$, então definiremos β como sendo um número algébrico. Neste sentido, um número real β será chamado de algébrico, quando podemos encontrar uma equação polinomial com coeficientes inteiros não nulos, da qual β seja raiz.

Diante dessa definição, fica evidente o fato de que qualquer número racional é algébrico, pois, basta observar que, como eles podem ser expressos da forma $\frac{p}{q}$ com $q \neq 0$, então estes números são raízes da equação polinomial:

$$qx - p = 0 \text{ (I),}$$

Basta ver que substituindo $\frac{p}{q}$ na equação (I) teremos que:

$$q \cdot \frac{p}{q} - p = p - p = 0.$$

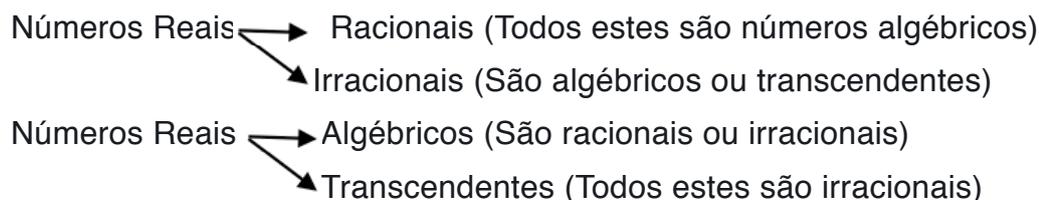
Logo, qualquer número racional é um número algébrico, como por exemplo, o número $1/3$, ele é raiz da equação $3x - 1 = 0$, e portanto é algébrico.

O fato de que todo número racional é algébrico, não implica que todo número algébrico seja racional, por exemplo, o número $\sqrt{5}$, que mesmo não sendo um

número racional, pois ele não pode ser expresso como o quociente de $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$, no entanto ele é algébrico, pois é fácil verificar que ele é raiz do polinômio $x^2 - 5 = 0$.

Sendo assim, quando um número β não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros e diferentes de zero, então chamaremos esse número de transcendente. Assim, um número real ou é algébrico ou transcendente.

Como já mencionado, temos que todo número racional é algébrico, logo, segue-se que todo número não algébrico é não racional, ou de uma maneira mais simplificada, todo número transcendente é irracional. Como está esquematicamente expresso abaixo:



Representando os números reais dessa nova forma, as irracionalidades de alguns números passam a ser encaradas de uma maneira mais simples. Por exemplo, $\sqrt{2}$ não é um problema tão grave quanto parece, basta ver que mesmo este número não sendo raiz de nenhuma equação polinomial de primeiro grau, ele é raiz da equação $x^2 - 2 = 0$, logo é algébrico.

Definição 3: Diz-se que β é um número algébrico de grau n , com n natural, se β for raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros de grau n e não seja raiz de nenhuma outra equação desse tipo, de grau menor do que n . Por exemplo, sendo $\beta = \sqrt{3}$, esse é um número algébrico de grau 2, pois, é raiz da equação polinomial $x^2 - 3 = 0$, e de nenhuma outra de grau menor que 2.

Diante da definição acima, segue que, o conjunto dos números racionais, são na verdade o conjunto de todos os números algébricos de grau 1, ou seja, o conceito de número algébrico é uma generalização natural de todos os números racionais de grau 1.

Alguns números algébricos podem ser representados como a raiz de uma equação polinomial do tipo:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

Onde os coeficientes a_0, \dots, a_{n-1} são números inteiros. Neste caso, chamaremos esses números de Inteiros Algébricos, basta observar que, o que difere essa definição da de números algébricos é o fato de que $a_n = 1$. Logo, é fácil ver que todo número inteiro algébrico é algébrico.

Assim, podemos constatar que qualquer número inteiro z , é um inteiro algébrico, basta ver que $x - z = 0$, tem z como raiz. Da mesma forma $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{5}$, também são inteiros algébricos, pois, são raízes das equações $x^2 - 3 = 0$ e $x^2 - 5 = 0$, respectivamente.

5 | UM BREVE HISTÓRICO DOS NÚMEROS TRANSCENDENTES

A história nos revela que um dos grandes fascínios do homem, no âmbito da matemática, foi o entendimento dos números e o domínio dos mesmos. A busca pelo conhecimento e apropriação dos conceitos numéricos trouxe inúmeras lacunas e paradoxos na matemática, o que proporcionou importantes desafios aos matemáticos da época. A construção da reta real neste contexto se configurou como estereótipo de conjunto numérico, representante de todo aquele número que poderia ser contado ou imaginado.

Nesta construção dos números reais, havia uma partição mais dinâmica que os dividiam em uma classe de números que poderiam ser posto como uma raiz de um polinômio de coeficientes reais não nulos, os chamados números algébricos. No entanto, existia outro conjunto de números que junto com aqueles completavam a reta real, os chamados números transcendententes.

A definição dos números transcendententes, é designado ao matemático Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) e na acepção de Leonhard Euler (1707-1783), significava que eles transcendiam o poder das operações algébricas, que poderiam ser realizadas com o corpo dos números algébricos.

Assim, a definição de transcendente é algo que já vem sendo estudada há algum tempo, desde o século XVIII. No entanto, a teoria destes números foi originada e desenvolvida apenas no século XIX, pelo matemático Joseph Liouville (1809-1882), porém, é válido ressaltar que alguns problemas isolados que envolviam a teoria dos transcendententes já haviam sido formuladas bem antes (como é caso do número π é do número e), só que estes números eram abordados apenas como irracionais. As suas transcendências, no entanto, só foram demonstradas a partir de 1844.

Nesse contexto, Liouville estabeleceu uma propriedade que satisfazia os números algébricos, onde se definia que se β é algébrico de grau n , então existe uma constante $A > 0$, de tal forma que $\left| \beta - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n}$ para todo p/q racional com $q \neq 0$. Dessa forma, qualquer número que não satisfizesse essa propriedade seria transcendente. Essa definição dos algébricos, criada por Liouville, foi crucial para direcionar o estudo dos transcendententes. Ele mesmo construiu estes números, como foi o caso de $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$, conhecido como a constante de Liouville. Mais detalhes sobre essa propriedade que satisfaz os algébricos pode ser encontrada em [12].

Com base nos estudos deste último matemático, no ano de 1873, Charles Hermite (1822-1901) demonstrou a transcendência de e . Dez anos depois, em 1884, Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939) generalizou a transcendência de e desenvolvida por Hermite, e conseguiu provar que α é um número transcendente, sempre que α for algébrico e não nulo. Nesse sentido, como consequência da

generalização de Lindemann, os números $\log 2$, $e^{\sqrt{2}}$ e $\cos x$ são transcendentos.

Diante das demonstrações feitas por Lindemann, considera-se como a consequência mais importante a transcendência de π , que proporcionou a solução dos grandes problemas históricos da matemática, como por exemplo impossibilidade de se construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado, a famosa quadratura do círculo.

O que impulsionou em certa medida o estudo do conjunto dos números transcendentos foram os diversos problemas decorrentes da antiguidade grega, as pesquisas de Liouville e Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), as pesquisas de Hermite (que envolviam as funções exponenciais), o sétimo problema de David Hilbert (1862-1943) e as formas lineares em logaritmos de Alan Baker (1939). O problema em estudar estes números encontrava-se no fato de que os transcendentos são definidos e analisados não pelo que eles são, mais sim pelo que eles deixam de ser. Fatos estes que tornam bastante complexa a tarefa de estabelecer a transcendência particular de um número qualquer.

Em 1934, Alexander Osipovich Gelfond (1906-1968) e Theodor Schneider (1911-1988) criaram um teorema, conhecido como teorema de Gelfond-Schneider e dizia que se α é um número algébrico, diferente de 0 e 1, e β é um número algébrico não racional, então α^β será um número transcendente. Dessa forma o sétimo problema da lista dos vinte e três problemas de Hilbert estava resolvido, além disso, os números, $2^{\sqrt{2}}$ e $2^{\sqrt{3}}$ seriam, dessa forma, transcendentos.

Esse teorema de Gelfond-Schneider, no entanto, não resolvia o problema nos casos em que α^β , com α e β números transcendentos. Se pegarmos, por exemplo, os números transcendentos, e e $\log 2$, e colocarmos $e^{\log 2}$ teremos que o resultado será 2, que é um número algébrico. Já se pegarmos o número transcendente α e colocarmos, α^α não se sabe se o resultado será transcendente ou algébrico.

Entender a natureza dos números transcendentos é até hoje uma grande lacuna na teoria dos números. Atualmente, mais de 120 anos após as demonstrações das transcendências de e e π , as operações aritméticas de $e + \pi$ e de $e \cdot \pi$ ainda não são conhecidas como sendo um número algébrico ou transcendente.

6 | OS NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES COMO POSSIBILIDADE DE ESTUDO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Os polinômios e as equações polinomiais por serem tradicionalmente estudadas no terceiro ano do ensino médio, tornam-se uma oportunidade para o docente implementar nas suas aulas o estudo dos números algébricos e, conseqüentemente, os transcendentos.

Como, provavelmente, o educando do terceiro ano, ao término ou em processo de estudo dos polinômios, já deve saber operar com os mesmos, então, este fato será suficiente para que eles consigam aprender os conceitos preliminares que envolvem a teoria dos números algébricos.

Por exemplo, caso os alunos se depararem com o número $\sqrt{3 + \sqrt{7}}$, aparentemente estranho e complicado. No entanto, ao fazer $x = \sqrt{3 + \sqrt{7}}$ e aplicar as seguintes manipulações algébricas, veremos que ele não é tão estranho assim:

1º: elevando os dois membros ao quadrado.

$$x^2 = (\sqrt{3 + \sqrt{7}})^2$$

$$x^2 = 3 + \sqrt{7}$$

2º: Subtraindo 3 nos dois membros.

$$x^2 - 3 = 3 + \sqrt{7} - 3$$

$$x^2 - 3 = \sqrt{7}$$

3º: elevando novamente os dois membros ao quadrado.

$$(x^2 - 3)^2 = (\sqrt{7})^2$$

$$x^4 - 6x^2 + 9 = 7$$

4º: Subtraindo 7 nos dois membros.

$$x^4 - 6x^2 + 9 - 7 = 7 - 7$$

$$x^4 - 6x^2 + 2 = 0$$

Teremos, dessa forma, que o número $\sqrt{3 + \sqrt{7}}$ é raiz do polinômio $x^4 - 6x^2 + 2 = 0$, e pela definição, é um número algébrico.

Pudemos ver nesse exemplo que apenas com manipulações algébricas simples, com as quais os alunos estão acostumados a ver (algumas desde o ensino fundamental II), conseguimos dizer se um número, envolvendo raízes, é algébrico ou não, "fabricando" simplesmente equações polinomiais com coeficientes inteiros, das quais esses números são raízes.

Outros casos podem ser identificados seguindo os mesmos passos anteriores. Já no caso de qualquer número racional p/q com $q \neq 0$, basta mostrar para os estudantes que esse número racional será sempre raiz do polinômio $q \cdot x - p = 0$, e isso os discentes do ensino médio, também devem estar aptos a compreender.

Assim, ressaltamos que boa parte dos conteúdos que envolvem os números algébricos, os alunos do ensino médio tem condições de aprender. Já em relação aos números transcendentais, basta dizer que existem números que não poderão ser raízes de um polinômio com coeficientes inteiros e dar um exemplo, que é o caso do número π , que já deve ser bastante conhecido por eles. Não precisando assim, entrar mais em detalhes em relação a esse outro conjunto numérico por este,

de fato, transcender, os estudos que envolvem o currículo atual de matemática do ensino médio.

REFERÊNCIAS

- [1] COSTA, Newton C. A. Introdução aos fundamentos da matemática. Editora Hucitec. 4ª edição. São Paulo, Capital. 2008.
- [2] DANTAS, Marcelo R. N. Sobre o número π . Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba - Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática. João Pessoa, Paraíba. 2013.
- [3] FIGUEIREDO, D. J. Números irracionais e transcendentos. Coleção do professor de Matemática, 3.ed. Rio de Janeiro : SBM, 2011.
- [4] FURTADO, M. F. Algumas Realizações de Charles Hermite. Universidade de Brasília - Programa Especial de Treinamento. Brasília, Distrito Federal. 1996.
- [5] JUNIOR, A. M. Os Infinitos de Cantor: Série Matemática na Escola - guia do professor. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, São Paulo. 2011.
- [6] LIMA, L. C.; NASCIMENTO, A. A. Liouville e os Números Transcendentes. Instituto Federal de Educação de Alagoas. Maceió, Alagoas. 2013.
- [7] MARCHIORI, R. M. Números Transcendentes e de Liouville. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista - Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática. Rio Claro, São Paulo. 2013.
- [8] MARQUES, Diego Teoria dos números transcendentos. Coleção do professor de Matemática, 1ªed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [9] MOSCIBROSKI, T. M. A amplitude do conjunto dos números irracionais. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, Santa Catarina. 2002.
- [10] NIVEN, Ivan Números: Racional e irracional. Coleção do professor de Matemática, 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [11] PERES, G. R. O número π . Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, Santa Catarina. 2003.
- [12] SANTOS, J. C. S. O. Formação Complementar em Matemática I. Universidade do Porto - Faculdade de Ciências. Porto, Portugal. 2012.

SOBRE O ORGANIZADOR

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves - Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Africanidade 108, 114, 116, 118

Aprendizado 2, 4, 17, 93, 94, 108, 112, 119, 122, 123, 127

Aprendizagem 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 28, 36, 57, 58, 59, 65, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 90, 91, 92, 93, 94, 98, 101, 104, 106, 107, 108, 109, 120, 121, 122, 126, 127, 132, 133, 167, 168, 169, 170, 171, 176, 177, 178

Aprendizagem criativa 57

C

Calculadora 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 121, 123, 171

Cartas 119, 120, 121, 122, 123, 125

Corte 36, 66, 72, 74, 75, 76, 77, 79, 177

Cubo mágico 126, 127, 128, 129, 130, 132, 133

D

Deficiência visual 92, 93, 94

E

Ensino-aprendizagem 2, 12, 28, 36, 57, 81, 82, 84, 85, 86, 90, 101, 104, 106, 107, 108, 121, 122, 127

Etnomatemática 108, 111, 112, 118

F

Frações 40, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 102, 167, 169, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177

G

Geometria espacial 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 35, 98, 99, 100, 104, 106

I

Inclusão 27, 92, 93, 168

Incomensurabilidade 66, 67, 69, 76, 79, 80

Interdisciplinaridade 25, 27, 28, 35, 36, 47, 55, 179

J

Jogos 9, 11, 15, 35, 92, 93, 94, 95, 96, 112, 113, 119, 120, 121, 122, 123, 126, 127, 133

L

Longa dependência 134, 135, 136, 144

M

Material concreto 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 31, 35, 98, 101, 104

Médias diárias 162, 163, 164

N

Números reais 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 66, 69, 76, 77, 78, 79

O

Objetos matemáticos 57, 58, 60, 65

Operações da aritmética 81, 90

P

Perfil criminal 149

Previsões 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148

R

Raciocínio lógico-matemático 126, 128, 129, 133

Reflexionar 81, 82, 83, 86, 90

S

Sexualidade 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56

Sólidos geométricos 4, 6, 7, 9, 98, 99, 101, 102, 103, 106

T

Temas transversais 47, 53

Transcendência 37, 43, 44

V

Variáveis climatológicas 162

Violência doméstica 149, 150, 154, 156, 161

