Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

As Diversidades de Debates na Pesquisa em Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

As Diversidades de Debates na Pesquisa em Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2019

2019 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Geraldo Alves
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

D618 As diversidades de debates na pesquisa em matemática 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. – (As diversidades de debates na pesquisa em matemática; v. 2)

Formato: PDF
Requisitos de sistemas: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-847-2
DOI 10.22533/at.ed.472192012

1. Matemática – Pesquisa – Brasil. 2. Pesquisa – Metodologia. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.
CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2019

APRESENTAÇÃO

A matemática nos dias de hoje, tem se mostrado uma importante ferramenta para todo cidadão, logo, não é somente restrita a comunidade científica que se dedica a esta área. Diante de toda as informações a que somos expostos a todo tempo, cabe a cada pessoa ser capaz de analisar, interpretar e inferir sobre elas de maneira consciente.

Esta obra, intitulada “A diversidade em debates de pesquisa em matemática” traz em seu conteúdo uma série de trabalhos que corroboram significativamente para o olhar da pesquisa matemática em prol da discussão das diversidades. Discussões essas que são pertinentes em tempos atuais, pois apontam para o desenvolvimento de pesquisas que visam aprimorar propostas voltadas à inclusão e a sociedade.

Ao leitor, indubitavelmente os trabalhos aqui apresentados ressaltam a importância do desenvolvimento de temas diversos na disciplina de Matemática.

Que a leitura desta obra possa fomentar o desenvolvimento de ações práticas voltadas às diversidades na Educação, tornando o Ensino da Matemática cada vez mais voltado a formação cidadã.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 7

UMA INCOMENSURABILIDADE ARITMÉTICO-GEOMÉTRICA E A EXTENSÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS PARA OS NÚMEROS REAIS

Marcos Garcia de Souza
Professor do Instituto Federal do Pará, *Campus* Marabá Industrial - Marabá-PA

RESUMO: A matemática da época de Pitágoras foi enfraquecida com a descoberta da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado. Em outras palavras, ao aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar a diagonal de um quadrado, deduz-se que a razão entre a diagonal e o lado do quadrado não é um número racional. Do ponto de vista geométrico, isto significa que não há uma medida comum para comparar o lado e a diagonal de um quadrado. Depois de muitos séculos esse problema foi resolvido, um dos autores deste fato, foi o matemático alemão Richard Dedekind que, inspirado na Teoria das Proporções de Eudoxo, criou o conceito de Corte numa reta. Isto possibilitou a criação dos números irracionais, a extensão do conjunto dos números racionais e estabelecer um *continuum* de números reais, por meio do postulado da continuidade da reta. Este artigo tem por objetivo apresentar uma das possibilidades de justificar a descoberta da incomensurabilidade por meio de uma relação aritmético-geométrica e destacar alguns conceitos que fazem parte do estudo de análise da reta, como por exemplo a cota inferior, a cota superior, o ínfimo e supremo de um conjunto, o mínimo e o máximo de um conjunto entre outros, para formalizar e compreender a natureza da continuidade no eixo real. Além disso, apresentar algumas propriedades de natureza estruturante dos conjuntos numéricos e propor situações para aplicação desses conceitos.

PALAVRAS-CHAVE: Conjuntos numéricos; Corte; Incomensurabilidade.

AN ARITHMETIC-GEOMETRIC INCOMMENSURABILITY AND THE EXTENSION OF RATIONAL NUMBERS TO REAL NUMBERS

ABSTRACT: The mathematics of Pythagoras's time was weakened by the discovery of the incommensurability between the side and diagonal of a square. In other words, by applying Pythagoras' theorem to determine the diagonal of a square, it is deduced that the ratio of diagonal to the side of the square is not a rational number. From the geometric point of view, this means that there is no common measure for comparing the side and diagonal of a square. After many centuries this problem has been resolved, one of the authors of this fact was the German mathematician Richard Dedekind who, inspired by the Eudox Proportion Theory, created the concept of Cut in a straight line. This concept enabled the creation of irrational numbers, the

extension of the set of rational numbers and the establishment of a continuum of real numbers, through the postulate for continuity of the line. This article presents one of the possibilities to justify the discovery of incommensurability through an arithmetic-geometric relation and to highlight some concepts that are part of the analysis of the straight line, such as the lower bound, upper bound, the infimum and the supremum of a set, the minimum and maximum of a set, among others, to formalize and understand the nature of continuity on the real axis. Furthermore, it aims to present some properties of structuring nature of numerical sets and to propose situations for application of these concepts.
KEYWORDS: Numerical sets; Cut; Incommensurability.

1 I INTRODUÇÃO

Um problema que abalou os pitagóricos, foi a descoberta de uma incompatibilidade no campo dos números racionais.

Trata-se da incomensurabilidade – ideia atribuída a Hipasus de Metaponto (ou Crotona) durante o fim de 500 a.C. –, na qual *a razão entre a medida da diagonal e o lado de um quadrado não é um número racional, por menor que seja esse quadrado*.

Segundo CARAÇA (1989, p. 75):

> o caráter de seita da escola pitagórica, em que os aspectos místico e político (...) ombreavam com o aspecto científico, prestava-se a essa tentativa de segredo à volta de questão de tal maneira embaraçosa, onde só havia a ganhar com o debate público e extenso; os pitagóricos instituíram como norma, pelo contrário, o segredo, o silêncio.

A constatação mais antiga desse óbice aritmético-geométrico, que apresentaremos a seguir, revela este obstáculo no campo racional em relação à continuidade da reta.

2 I A NATUREZA DA INCOMENSURABILIDADE

Para encontrar o paradigma da incomensurabilidade no campo numérico racional, considere – sem perda de generalidade – um quadrado OABC de lado unitário sobre uma reta e a diagonal OB = r, conforme ilustrado pela FIGURA 1 abaixo.

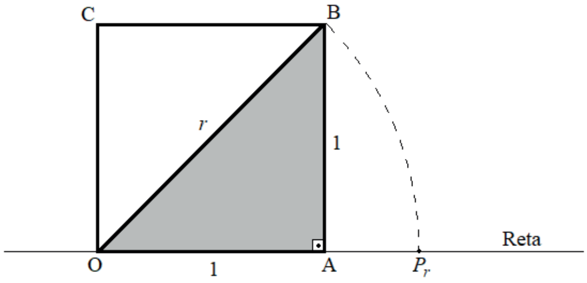

FIGURA 1 – Quadrado OABC de lado 1 e diagonal OB = *r*.

FONTE: elaborada pelo autor.

A medida da diagonal desse quadrado não é um número racional. Com efeito, na FIGURA 1, P_r *é o* ponto de interseção do arco de circunferência de raio OP_r com a reta. Assim, no campo racional, deve existir um número racional r = OB, tal que P_r esteja associado ao número r.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triangulo retângulo OAB, obtém-se:

$$r^2 = 1^2 + 1^2 \quad \text{se, e somente se,} \quad r^2 = 2.$$

Isso significa que existem dois *números inteiros* positivos m e n, com $n \neq 0$, *irredutíveis*, tais que $r = \frac{m}{n}$. Daí:

$$r^2 = 2 \text{ se e somente se, } \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \text{ se, e somente se, } m^2 = 2n^2 \quad \ldots (*)$$

Observe que m^2 é um número par e, por conseguinte, m é par. Para justificar isto, suponha o contrário: m é um número ímpar, isto é, $m = 2p + 1$, onde p é um número inteiro positivo. Assim, substituindo o valor de m na equação (*), teremos:

$$m^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1.$$

Fazendo $2p^2 + 2p = q$, tem-se: $m^2 = 2q + 1$.

Dessa forma, m^2 é um número ímpar. Mas isso é um absurdo! Pois, por hipótese, m^2 é um número par. Então, ocorreu uma contradição ao supor que m é ímpar. Logo, m é um número para e, portanto, escreve-se $m = 2k$.

Com isso, em (*), teremos: $2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ ou $n^2 = 2k^2$. Daí, pelo mesmo motivo, n^2 sendo par implica n par.

Assim, m e n são números pares, o que é um absurdo! Porque m e n são irredutíveis, por hipótese. Então, não existe um número racional r cujo quadrado é igual a 2.

Para CARAÇA (1989, p. 54), essa constatação mostra que os dois segmentos de reta – o lado e a diagonal de um quadrado – não têm medida comum para compará-los. E sempre que isto acontecer, diz-se que esses segmentos são *incomensuráveis*.

Ainda, segundo o autor, trata-se de uma "*insuficiência geral* do campo numérico racional para traduzir as relações geométricas (...)".

Intuitivamente, isso significa existe número racional que corresponde a um ponto da reta, mas nem todo ponto da reta corresponde a um número racional.

Na tipologia funcional, uma aplicação $\alpha : \mathbb{Q} \to P$, , onde P é o conjunto dos pontos de uma reta e $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais, é *injetiva*, mas *não* é sobrejetiva. Isto equivale afirmar que a função α não é bijetiva.

Portanto, a existência da *incomensurabilidade* revela a insuficiência dos números racionais em reencher completamente à reta.

Dessa forma, há necessidade de criar um “novo” campo numérico, de modo a suprir essa incompletude dos números racionais.

3 I A PARTIÇÃO DA RETA E A INCOMENSURABILIDADE

O problema da incomensurabilidade se estendeu por vários séculos e muitos matemáticos dedicaram esforços na tentativa de resolvê-lo. Dentre eles, Galileu e Leibniz. Ambos consideravam que:

> a ‘continuidade’ de dois pontos sobre uma reta era consequência de sua densidade – isto é, o fato que entre dois pontos quaisquer existe sempre um terceiro. Porém, os números racionais têm essa propriedade, no entanto, não formam um ***contínuum***. (BOYRE, 1996, p. 390)

Outros eminentes matemáticos também se debruçaram em desvendar a natureza da incomensurabilidade.

Em 1859, o matemático Julius Wilhelm Richard Dedekind, inspirado na Teoria das Proporções de Eudoxo, conseguiu formalizar a extensão do conjunto dos números racionais. Para isso, Dedekind indagou:

> “O que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais.” (BOYRE, 1996, p. 390)

Dedekind percebeu que o conjunto dos números racionais “podia ser estendido de modo a formar um *continuum* de números reais”. Sobre isso, ele expressou:

> a essência da continuidade de um segmento de reta não se deve a uma vaga propriedade de ligação mútua, mas a uma propriedade exatamente oposta – ***a natureza da divisão do segmento em duas partes por meio de um ponto sobre o segmento***. Em qualquer divisão dos pontos de um segmento em duas classes, tais que cada ponto pertence a uma e somente uma, e tal que todo ponto numa classe está à esquerda de todo ponto da outra, existe um e um só ponto que realiza a divisão. (...) Por essa observação trivial o segredo da continuidade será revelado. (BOYER, 1996, p. 390, grifos nossos).

Essa separação da reta em duas partes (ou classes), por meio de um único ponto, traz outros conceitos matemáticos abstratos que caracterizam o ponto de separação da reta e, portanto, a continuidade da reta.

4 I COTAS INFERIORES E ÍNFIMO E COTAS SUPERIORES E SUPREMO

Um subconjunto C de um *corpo ordenado* K chama-se *limitado inferiormente* quando existe $k \in K$, tal que $k \leq c$, para todo $c \in C$. Se isso acontecer, cada $k \in K$ (com essa propriedade) chama-se *cota inferior* de C. A maior das cotas inferiores chama-se ínfimo (caso exista) de C.

Para que um número s seja o ínfimo de um conjunto C é necessário e suficiente que satisfaça as duas condições a seguir:

i) $s \leq c$, para todo $c \in C$;

ii) dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $c \in C$, tal que $c - \varepsilon < s$ (ou $c < s + \varepsilon$).

Note que o ínfimo (quando existe) de um conjunto pode ou não pertencer a esse conjunto. A limitação inferior de um conjunto C, contido num corpo ordenado K, assim como as cotas interiores e o ínfimo estão ilustrados na FIGURA 2 a seguir.

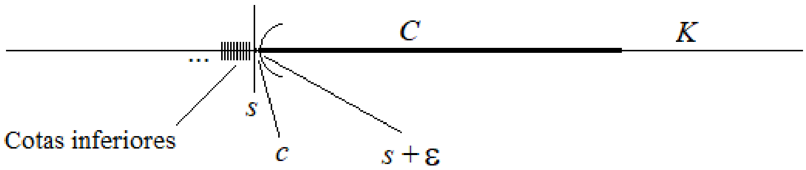

FIGURA 2 – Cotas inferiores e ínfimo de um conjunto C contido num corpo ordenado K.

FONTE: elaborada pelo autor.

Essa ilustração, indica que as cotas inferiores formam um “conjunto” de aproximações (por falta) do ínfimo s.

Analogamente, um subconjunto C de um corpo ordenado K chama-se *limitado superiormente* quando existe $k \in K$, tal que $c \leq k$, para todo $c \in C$. Neste caso, a cada $k \in K$, com esta propriedade, chama-se *cota superior* de C. A menor das cotas superiores chama-se *supremo* (caso exista) de C.

Para que um número s seja o supremo de um conjunto C é necessário e suficiente que satisfaça as duas condições a seguir:

i) $c \leq s$, para todo $c \in C$;

ii) dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $c \in C$, tal que $s - \varepsilon < c$ (ou $s < c + \varepsilon$).

Observe que o *supremo* (quando existe) de um conjunto pode ou não pertencer a esse conjunto.

A limitação superior do conjunto C, contido no corpo ordenado K, assim como as cotas superiores e o supremo estão ilustrados na FIGURA 3 a seguir.

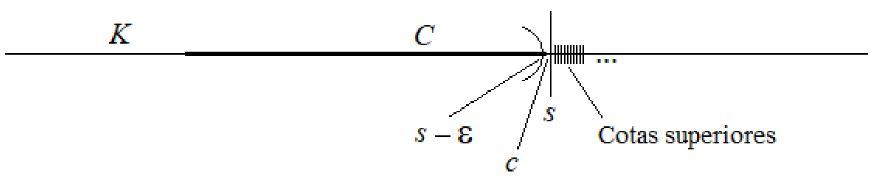

FIGURA 3 – Cotas superiores e supremo de um conjunto C (contido num corpo ordenado K).

FONTE: elaborada pelo autor.

Nessa ilustração, as cotas superiores formam um "conjunto" de aproximações, por excesso, do supremo s.

Para concretizar esses conceitos, seguem os exemplos.

Exemplo 1. Seja $X = \{x \; ; \; a < x \leq b\}$, um subconjunto do conjunto $\mathbb{Q}$. Mostre que:

a) o ínfimo de X é a.

b) o supremo de X é b.

Resolução: a) O ínfimo de X é a. De fato: $a < x$ segue que a é cota inferior de X.

Agora, seja c uma cota inferior X. Para que a seja o ínfimo de X, não pode ocorrer $a < c$. Com efeito, caso isso aconteça, existirá $d \in X$, tal que $a < d < c$. Assim, basta tomar $d = (a + c)/2$. Dessa forma, $d \leq c$. Logo, c não é cota inferior de X, o que é um absurdo! Então, $c \leq a$ e, portanto, a é o ínfimo de X. Note que o ínfimo de X *não pertence* a X.

b) O supremo de X é b. De fato: com $x \leq b$, segue que b é cota superior de X.

Seja s uma cota superior de X. Para que b seja o supremo de X, não pode ocorrer $s < b$, pois, caso isso aconteça, existirá $d \in X$, tal que $s < d < b$. É suficiente tomar $d = (s + b)/2$. Dessa forma, $d \leq b$. Logo, d não é cota superior de X, o que é um absurdo! Assim, $b \leq s$ e, portanto, b é o supremo de X. Observe que, neste caso, o supremo de X é também elemento de X.

Exemplo 2. Seja $n \in \mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais). Mostre que o subconjunto $C = \{\frac{n}{n+1} \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{Q}$ tem supremo igual a 1.

Resolução: Temos: $n \in \mathbb{N}$ implica $n + 1 \in \mathbb{N}$. Como $n < n + 1$, segue que $\frac{n}{n+1} < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, 1 é cota superior de C, mas $1 \notin C$.

Falta mostrar que 1 é a menor das cotas superiores do conjunto C. Inicialmente, note que, para $n = 1$, temos: $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1}$ 1/2. Então, suponha que exista um número $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, tal que $1/2 < \varepsilon < 1$. Assim, $1 - \varepsilon > 0$. Daí, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n(1 - \varepsilon) > \varepsilon$ se, e somente se, $\varepsilon < n/(n + 1)$ e, portanto, $\varepsilon < n/(n + 1) < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, nenhum número racional $\varepsilon < 1$ é cota superior de C. Portanto, 1 é o supremo de C.

Exemplo 3. Seja o conjunto $D = \{\frac{1}{2^n} \; ; \; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$. Prove que o ínfimo de D é zero.

Resolução: Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $0 < \frac{1}{2^n}$. Logo, 0 é cota inferior de D. Além disso, $0 \notin D$.

Agora, mostraremos que 0 é a maior das cotas inferiores de D. Em outras palavras, nenhum $c > 0$ é cota inferior de D. Com efeito, $D \subset \mathbb{Q}$ acarreta, para todo $c > 0$, que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$\frac{1}{n} < c$ se, e somente se, $\frac{1}{c} < n$, portanto, $\frac{1}{c} < 1 + n$ ... (**)

Pela *desigualdade de Bernoulli*, teremos:

$$1 + n \leq (1 + 1)^n = 2^n.$$

Em (**), segue que: $\frac{1}{c} < 1 + n \leq (1 + 1)^n = 2^n$ ou $\frac{1}{c} < 2^n$ e, portanto, $\frac{1}{2^n} < c$. Assim, nenhum $c > 0$ é cota inferior do conjunto D. Então, 0 é o ínfimo de D.

Utilizaremos essa mesma ideia para resolver o exemplo a seguir.

Exemplo 4. Mostre que o ínfimo do conjunto $X = \{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é zero.

Resolução: Temos: $0 < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, 0 é cota inferior de X. Além disso, $0 \notin X$. O zero é a maior das cotas inferiores de X, ou seja, nenhum $x > 0$ é cota inferior de X. De fato, como $X \subset \mathbb{Q}$, então, para todo $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$nx > 1 \text{ se, e somente se, } 0 < \frac{1}{n} < x.$$

Assim, nenhum $x > 0$ é cota inferior do conjunto X. Então, o ínfimo de X é zero.

Quando o ínfimo (resp. supremo) pertencer ao conjunto será chamado de mínimo (resp. máximo).

Observações:

1) Em geral, o ínfimo ou o supremo de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto;

2) O ínfimo de um conjunto, caso exista, é único. Analogamente o supremo;

3) Se o conjunto é vazio, então, ele não possui ínfimo nem supremo, pois, não existe menor elemento nem maior.

5 I CORTE DE DEDEKIND

Segundo LIMA (2010, p. 78), a incompletude dos racionais para formar o *contínuum* deve-se ao fato de que “alguns conjuntos limitados de números racionais não possuem supremo (ou ínfimo).” De fato, vimos que não existe um número racional r, tal que $r^2 = 2$. Então, considere os conjuntos E e D limitados por números racionais:

$$E = \{r \in \mathbb{Q}\,;\, r^2 < 2, \text{ com } r > 0\} \quad \text{e} \quad D = \{r \in \mathbb{Q}\,;\, r^2 > 2, \text{ com } r > 0\}.$$

Mostraremos que o conjunto E não tem máximo e o conjunto D não tem mínimo, em $\mathbb{Q}$. De fato, no primeiro caso (E não tem máximo em $\mathbb{Q}$), suponha que existe um número racional positivo s, tal que $s > r$. Vamos mostrar que, mesmo assim, teremos $s^2 < 2$. Em outras palavras, o conjunto E não tem máximo se, para todo $r \in \mathbb{Q}$, é possível encontrar $q \in \mathbb{Q}$, de modo que $(r + q)^2 < 2$.

Com $s > r$ implica $s = r + q$. Sem perda de generalidade, pode-se considerar $q = 1/n$ (uma quantidade bem pequena, o quanto se queira, tomando n bem grande), onde $n \in \mathbb{N}$. Assim, $s = r + 1/n$. Daí:

$$s^2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad (r + 1/n)^2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 2r/n + 1/n^2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad (2r + 1/n)1/n < 2 - r^2.$$

Majorando o termo $(2r + 1/n)1/n$, obtém-se:

$$(2r + 1/n)1/n \leq (2r + 1)1/n.$$

Assim, $(2r + 1)1/n < 2 - r^2$ se, e somente se, $n > (2r + 1)/(2 - r^2)$. Tomando n nessas condições, segue que $s^2 < 2$. Desta forma, o conjunto E não possui elemento máximo. Isto significa que o conjunto E não admite supremo em $\mathbb{Q}$.

Analogamente, no segundo caso (D não tem mínimo em $\mathbb{Q}$), suponha que existe um número racional positivo s, tal que $r > s$. Então, $r = s + 1/n$ ou $s = r - 1/n$. Assim:

$$s^2 = (r - 1/n)^2 = r^2 - 2r/n + 1/n^2.$$

Minorando o termo $r^2 - 2r/n + 1/n^2$, obtém-se:

$$r^2 - 2r/n + 1/n^2 > r^2 - 2r/n.$$

Portanto, $r^2 - 2r/n > 2$ se, e somente se, $n > 2r/(r^2 - 2)$. Tomando n nessas condições, tem-se $s^2 > 2$. Assim, o conjunto D não possui elemento mínimo em .. Isto significa que o conjunto D não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Agora, considere o *corpo ordenado* contido num corpo K. Seja um ponto P_x, sobre uma reta, associado a $x \in K$, tal que $x^2 = 2$. Suponha que P_x realize uma partição $\{E, D\}$ nessa reta, tal que $E = \{r \in \mathbb{Q}; r^2 < 2$, com $r > 0\}$ e $D = \{r \in \mathbb{Q}; r^2 > 2$, com $r > 0\}$, sob as duas condições:

- nenhum ponto está fora desta partição $\{E, D\}$; e
- todo elemento $e \in E$ está à esquerda de todo elemento $d \in D$ e, reciprocamente, todo elemento $d \in D$ está à direita de todo elemento $e \in E$.

Definindo o número $x = \sqrt{2}$ se, e somente se $x^2 = 2$, tem-se: $x = \sqrt{2} \notin E, D$.

Nesse contexto, AYRES (1973, p. 97) menciona que: se x associado ao ponto P_x, que corta a reta, não é um número racional (já demonstramos isso), então, todo número racional está ou no conjunto E ou no conjunto D, porém, nunca em ambos.

Analogamente, se x é um número racional, então, com exceção dele, todo número racional está ou no conjunto E ou no conjunto D, mas não em ambos, conforme ilustrado pela FIGURA 4 a seguir.

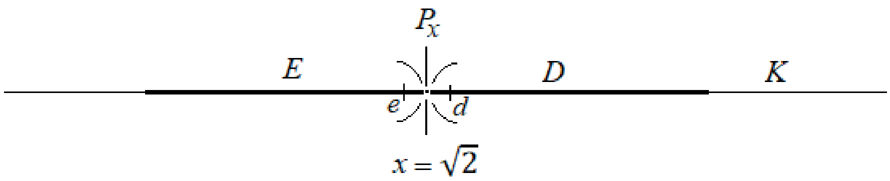

FIGURA 4 – Corte de uma reta no ponto P_x, com separador $x = \sqrt{2}$.

FONTE: elaborada pelo autor.

Aqui, chegamos à insuficiência do corpo ordenado $\mathbb{Q} \subset K$ e, portanto, no óbice do problema da continuidade da reta apresentado por Dedekind.

Segundo CARAÇA (1989, p. 59 – 60): Em 1872, Dedekind publicou uma obra que tratava sobre a *Continuidade e Números Irracionais*. Nesse escrito, ele conseguiu responder à questão que propôs em 1859, acima citada. Em suas palavras:

> (...) nós atribuímos à reta a qualidade de ser completa, sem lacunas, ou seja, contínua. Mas esta continuidade, em que consiste? A resposta a esta pergunta deve compreender em si tudo, e somente ela permitirá desenvolver em bases científicas o estudo de todos os campos contínuos (...). Pensei nisso sem resultado por muito tempo, mas, finalmente achei o que procurava. Consiste ela (...): todo ponto da reta determina uma decomposição da mesma em duas partes, de tal natureza que todo o ponto de uma delas está à esquerda de todo o ponto da outra. Ora, eu vejo a essência da continuidade na inversão desta propriedade e, portanto, no princípio seguinte: 'se uma repartição de todos os pontos da reta em duas classes está à esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e só um ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da reta em duas partes'. (...) A propriedade da reta expressa por este princípio não é mais que um axioma, e é sob a forma deste axioma que nós pensamos a continuidade da reta, que reconhecemos à reta a sua continuidade.

Ainda, conforme o autor, Dedekind resolve o problema da continuidade da reta a partir do *copo ordenado* dos números racionais e propõe um postulado (ou Axioma da Continuidade da Reta).

Axioma de Dedekind - corte. Todo *corte* da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (E, D) *existe* sempre um ponto da reta que a separa as duas classes E e D.

Nesse sentido, com a propriedade da relação de ordem, segundo ÁVILA (2006, p. 58), todo corte (E, D) na reta possui elemento de separação, que pode *pertencer* à classe E, como seu *máximo* (ou *supremo*, neste caso) ou *pertencer* à classe D, como seu ínfimo (ou *mínimo*, nesta situação). Assim, se r é um elemento de separação do corte (E, D), podemos representar por C_r esse corte, isto é: $C_r = (E, D)$.

De acordo com AYRES (1973, p. 98), a partir dessa notação de corte e o axioma de Dedekind, podemos definir corte em $\mathbb{Q}$.

(Corte em $\mathbb{Q}$) Um conjunto de números racionais C_r é um corte, com elemento separador r, quando cumpre as três propriedades a seguir:

i) C_r é um subconjunto próprio (não vazio) de $\mathbb{Q}$;

ii) se $a \in \mathbb{Q}$, com $a < r$, então $a \in C_r$;

iii) para todo $c \in C_r$, existe $b \in C_r$, tal que $c < b$.

Ainda, segundo o autor: "A essência dessas propriedades é que um corte não possui nem um elemento mínimo (primeiro) nem um elemento máximo (último)."

Observe que na propriedade ***i)*** de corte, temos que demonstrar duas coisas, a saber:

1) C_r é um subconjunto próprio de $\mathbb{Q}$; e

2) C_r não é vazio.

Na propriedade ***ii)***, é preciso mostrar que todo número racional menor do que o elemento separador do corte pertence ao corte. Finalmente, a propriedade ***iii)***, menciona que, em todo corte racional, não existe elemento máximo. Em outras palavras, não existe supremo que pertença ao corte.

Proposição 1. Sejam C_r um corte, com elemento separador r, e $c \in \mathbb{Q}$. Então, c é cota superior de C_r se, e somente se, $c \in \mathbb{Q} \setminus C_r$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que c seja cota superior do corte C_r. Então, $c \notin C_r$, pois, do contrário, c seria elemento máximo de C_r, contrariando a condição ***iii)*** de definição de corte. Logo, $c \in \mathbb{Q} \setminus C_r$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $c \in \mathbb{Q} \setminus C_r$. Então, c é cota superior do corte C_r, porque, do contrário, teríamos $c \in \mathbb{Q}$, com $c < r$. Isto implicaria $c \notin C_r$, pela propriedade ***ii)*** da definição de corte, o que é uma contradição.

Proposição 2. Se $r \in \mathbb{Q}$ e $C_r = \{a\,;\, a \in \mathbb{Q}$, com $a < r\}$, então C_r é um corte em $\mathbb{Q}$ e o elemento separador r é a menor cora superior de C_r.

Demonstração: Parte ***i)*** da definição de corte: o conjunto $\mathbb{Q}$ é ilimitado inferior e superiormente. Logo, não tem ínfimo nem supremo. Assim, existem $p, q \in \mathbb{Q}$, tais que:

- $p < r$ e, portanto, $C_r \neq \varnothing$; e
- $r < q$, segue que $C_r \neq \mathbb{Q}$.

Portanto, C_r é um subconjunto próprio não vazio de $\mathbb{Q}$.

Parte ***ii)*** da definição de corte: seja $s \in C_r$. Então, $s < r$. Assim, para todo $a \in \mathbb{Q}$, tal que $a < s$ implica $a < s < r$. Logo, $a \in C_r$.

Parte ***iii)*** da definição de corte: para todo $s \in C_r$, temos: $s < r$. Daí, existe $d \in \mathbb{Q}$, tal que $s < d < r$. Para isso, basta tomar $d = (s + r)/2$.

Sendo $d < r$ implica $d \in C_r$. Isto significa que, para todo $s \in C_r$ existe $d \in C_r$, tal que $s < d$. Portanto, s não é elemento máximo de C_r. Isto justifica que r é a menor cota superior de C_r.

Vimos que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não satisfaz o axioma da continuidade de Dedekind, pois, os conjuntos $E = \{r \in \mathbb{Q}\ ;\ r^2 < 2\}$ e $D = \{r \in \mathbb{Q}\ ;\ r^2 > 2\}$ de número racionais carecem, respectivamente, de elementos máximo e mínimo. Logo, há "lacunas" no conjunto $\mathbb{Q}$ e, portanto, não forma um *contínuum*, isto é, *não completam* à reta, embora seja muito denso nela.

Dessa forma, Dedekind resolve o óbice da insuficiência dos números racionais assinalado pela incomensurabilidade. Em outras palavras, ele resolve o problema da continuidade (ou completude) da reta.

6 I NÚMERO REAL

A definição de corte de Dedekind, a partir do conjunto do número racionais, possibilita definir número que não são racionais.

Dessa forma, CARAÇA (1989, p. 62) menciona a necessidade de uma definição para esses números de separação, que não pertencem ao conjunto dos números racionais.

Definição. Chama-se *número real* ao elemento separador x do corte C_x (de Dedekind na reta), tal que:

i) se x é um número racional, o corte chama-se *racional*; e

ii) se x não é racional, o corte chama-se número *irracional* e seu elemento separador será um número irracional.

O conjunto constituído por todos os números que não são racionais chama-se *conjunto dos números irracionais* e denota-se por $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

CARAÇA (1989, p. 63) destaca que para se definir um *número racional a*/*b* são necessários *dois números inteiros a* e *b*, com $b \neq 0$ e não é necessário "percorrer" o infinito. Mas, para definir um número real, de acordo com Dedekind, são necessárias *duas classes* (conjuntos infinitos), ou seja, há necessidade do conceito de infinito.

Ao conjunto de todos os números *racionais* reunido com todos os números *irracionais*, chama-se *conjunto dos números reais*. Em símbolos, indica-se por $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

Com isso, tem-se o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ que representa um "contínuo numérico", de modo que os números irracionais vêm a preencher as "lacunas" de descontinuidade existentes no conjunto dos números racionais.

Por não haver "lacunas" no conjunto $\mathbb{R}$, a reta passa a ser o *modelo geométrico* que exatamente o representa, conforme ilustrado na FIGURA 5 a seguir.

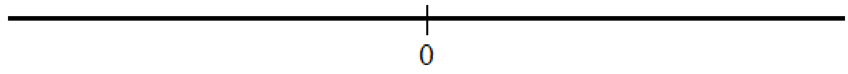

FIGURA 5 – Modelo geométrico do conjunto dos números reais .

FONTE: elaborada pelo autor.

O zero é um número real que separa as classes (ou os conjuntos) $\mathbb{R}^- = \{a\ ;\ a < 0\}$ e $^+ = \{b\ ;\ 0 < b\}$ do corte $(\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+)$, conforme representado na FIGURA 6 a seguir.

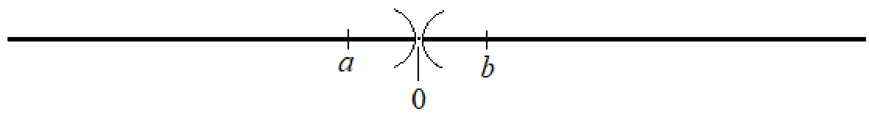

FIGURA 6 – Representação das classes $\mathbb{R}^- = \{a\ ;\ a < 0\}$ e $\mathbb{R}^+ = \{b\ ;\ b > 0\}$ do corte $(\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+)$ na reta.

FONTE: elaborada pelo autor.

A classe (ou o conjunto) $\mathbb{R}^- = \{a\ ;\ a < 0\}$ chama-se *semirreta negativa* e os número reais associados aos pontos que pertencem a ela, chamam-se número reais *negativos*. De modo semelhante, a classe (ou o conjunto) $\mathbb{R}^+ = \{b\ ;\ b > 0\}$ chama-se semirreta *positiva* e os números reais que correspondem aos pontos dessa semirreta, chamam-se números reais *positivos*.

Em virtude da completeza da reta estruturada no axioma de Dedekind, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ chama-se *corpo ordenado completo*.

No contexto da tipologia funcional, o que faltava para a aplicação $\alpha : \mathbb{Q} \to P$, onde P é o conjunto dos pontos de uma reta, ser sobrejetiva, agora, o conjunto $\mathbb{R}$ cumpre este papel e, desse modo, existe uma função $\alpha : \mathbb{R} \to P$ bijetiva.

Ademais, segundo GUEDES (1996, p. 9), o axioma de Dedekind pode ser escrito em termos de ínfimo e supremo, conforme descrito a seguir.

Postulado do Ínfimo. Todo subconjunto (não vazio) de $\mathbb{R}$, limitado inferiormente, possui um ínfimo em $\mathbb{R}$.

De modo semelhante:

Postulado do Supremo. Todo subconjunto (não vazio) de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, admite um supremo em $\mathbb{R}$.

Segundo LIMA (2010, p. 80): “todo corpo ordenado completo é arquimediano.” Isso significa que o conjunto dos números reais tem a seguinte propriedade.

Teorema 1. (Arquimediano) $\mathbb{R}$ é aquimediano, ou seja, vale qualquer uma das propriedades a seguir:

i) dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $0 < a < b$, existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$, tal que $na > b$;

ii) para todo $a \in \mathbb{R}$, com $0 < a$, existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < 1/n < a$.

Demonstração: ***i)*** Suponha, por absurdo, que $na \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere o conjunto dos múltiplos de a:

$$M(a) = \{na\ ;\ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Esse conjunto não é vazio, pois, sendo $0 < a$, temos: $1a \in \mathbb{N}$. Além disso, $M(a)$ é limitado superiormente por b. Então, pelo Postulado do Supremo, $M(a)$ admite supremo.

Seja s o supremo de $M(a)$. Como o conjunto $\mathbb{N}$ tem a propriedade $n \in \mathbb{N}$ implica $n + 1 \in \mathbb{N}$, segue, para todo $n \in \mathbb{N}$, que:

$$na \leq s \Rightarrow (n+1)a \leq s \Rightarrow na + a \leq s \Rightarrow na \leq s - a.$$

Mas, por hipótese, $0 < a$. Logo, $s - a$ é uma cota superior de $M(a)$ menor do que o supremo s, o que é um absurdo! Assim, existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$, tal que $na > b$.

ii) Temos: $0 < a$. Então, por ***i)***, existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$, tal que $na > b$, com $b > 0$. Fazendo $b = 1$, segue que: $na > 1$. Como $0 < 1/n$, temos: $0 < 1/n < a$.

Teorema 2. (Densidade) Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ são ambos densos em $\mathbb{R}$.

Demonstração: ***i)*** Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$. Então, $b - a > 0$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < 1/n < b - a$ e, portanto, $1 < nb - na$.

Como a diferença $(nb - na)$ é maior do que 1. Então, existe pelo menos um $m \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$na < m < nb \quad \text{ou} \quad a < m/n < b, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Isso significa que existem infinitos números racionais entre os números reais a e b. Portanto, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

ii) Densidade de $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ em $\mathbb{R}$.

Para obter um número irracional, considere $1/n < (b - a)/\sqrt{2}$, isto é, $\sqrt{2}/n < (b - a)$. Assim, os números da forma $m\sqrt{2}/n$, , com $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ são irracionais e dividem a reta com espaçamento de tamanho $\sqrt{2}/n$, pois:

$$(m+1)\sqrt{2}/n \ -\ m\sqrt{2}/n = \sqrt{2}/n.$$

Como $\sqrt{2}/n < (b - a)$, então, algum $m\sqrt{2}/n$ deve estar entre a e b, isto é, $a < m\sqrt{2}/n < b$, para algum $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Agora, se $m_0 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ for o menor, tal que $b \leq m_0\sqrt{2}/n$, então o número irracional $(m_0 - 1)\sqrt{2}/n$ está entre a e b, ou seja, $a < (m_0 - 1)\sqrt{2}/n < b$. Dessa forma, há infinitos números irracionais entre dois números reais. Portanto, o conjunto $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ é denso em $\mathbb{R}$.

Outra maneira de demonstrar a densidade de $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ em $\mathbb{R}$.

Pelo item ***i)***, sabe-se que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Então, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$, existem $r, s \in \mathbb{Q}$, tais que $a < r < s << b$.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é denso e, portanto, existem $(r+s)/2 \in \mathbb{Q}$, tais que $r < (r+s)/2 < s$ ou $r < r + (s-r)/2 < s$, ou ainda, $r < r + (s-r)\lambda < s$, com $r + (s-r)\lambda \in \mathbb{Q}$ e $0 < \lambda < 1$.

Portanto, $a < r + (s-r)\lambda < b$, com $0 < \lambda < 1$.

Agora, note que $\sqrt{2}/n > \sqrt{2}/(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, pondo $\lambda = \sqrt{2}/(n+1)$, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se infinitos números irracionais λ, tais que: $a < r + (s-r)\sqrt{2}/(n+1) < b$.

Definindo $d = r + (s-r)\sqrt{2}/(n+1)$, obtém-se infinitos números irracionais d, de modo que $a < d < b$.

Exemplo 5. Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$, com $r < s$. Prove que o número $r + (s-r)/\sqrt{2}$ é irracional e $r < r + (s-r)/\sqrt{2} < s$.

Resolução: i) Suponha, por absurdo, que o número $a = r + (s-r)/\sqrt{2}$ seja racional. Então, $a - r = (s-r)/\sqrt{2}$ é racional e, portanto, $\sqrt{2} = (s-r)/(a-r)$, com $a \neq r$ é racional, o que é um absurdo! Portanto, o número $r + (s-r)/\sqrt{2}$ é irracional.

ii) Dado que o número $\sqrt{2}$ é irracional, então, pela propriedade arquimediana de $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, tem-se $1 \in \mathbb{N}$, tal que $1 \cdot \sqrt{2} > 1$ e, portanto, $1 > 1/\sqrt{2}$ ou $0 < 1/\sqrt{2} < 1$. Como $r < s$, então $s - r > 0$.

Multiplicando $0 < 1/\sqrt{2} < 1$ por $(s-r)$, obtém-se:

$$0 < (s-r)/\sqrt{2} < (s-r).$$

Somando r nessa última desigualdade, tem-se $r < r + (s-r)/\sqrt{2} < s$.

7 I CONCLUSÃO

A identificação da insuficiência dos números racionais, por meio do Teorema de Pitágoras aplicado num quadrado, para determinar a razão entre a diagonal e o lado desse quadrado, contribuiu para o despertar da investigação do conceito de incomensurabilidade.

Devido à natureza secreta da Escola Pitagórica que adotava como lema: “Tudo é número”, esse problema foi abandonado pelos pitagóricos, pois, poderia se pensar que o Teorema de Pitágoras não era uma verdade geral na matemática.

Esse paradigma continuou por um longo período e somente no séc. XIX foi que vários matemáticos procuraram compreender a distinção entre a continuidade e os números racionas, alguns pensavam que se tratava da propriedade de densidade, porém, o conjunto dos números racionais é denso, mas não forma um contínuum.

Finalmente, no ano de 1859, o matemático Dedekind indagou-se do que havia na grandeza geométrica contínua que a distinguiria dos números racionais. Ele percebeu que o conjunto dos números racionais podia ser estendido para formar um *continuum* de números reais e, para isso, criou o conceito de corte na reta, cujos ressudados de sua pesquisa resultou à sua obra: *Continuidade e Números Irracionais*.

Assim, Dedekind resolve o óbice da insuficiência dos números racionais assinalado pela incomensurabilidade e, portanto, desvenda a natureza da continuidade (ou completude) da reta.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo S. de Souza. **Análise Matemática para a Licenciatura**. 3ª ed. São Paulo, 2006.

AYRES, Frank. ***Álgebra Moderna***. São Paulo, 1973.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ª ed. São Paulo, 1996.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9ª ed. Lisboa, 1989.

FERREIRA, Jamil. **A Construção dos Números**. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

GUESDES, D. de Figueiredo. **Análise I**. 2ª ed. Campinas-SP, 1996.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**, v.1. 12ª ed. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2010.

SOBRE O ORGANIZADOR

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves - Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

ÍNDICE REMISSIVO

A

C

D

E

F

G

I

J

L

M