

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)



As Diversidades de Debates na Pesquisa em Matemática 2

**Atena**
Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)



As Diversidades de Debates na Pesquisa em Matemática 2


Atena
Editora
Ano 2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Chefe: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Geraldo Alves
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof^a Dr^a Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof^a Dr^a Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Prof^a Dr^a Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof^a Dr^a Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof^a Dr^a Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
D618	As diversidades de debates na pesquisa em matemática 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. – (As diversidades de debates na pesquisa em matemática; v. 2) Formato: PDF Requisitos de sistemas: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-847-2 DOI 10.22533/at.ed.472192012 1. Matemática – Pesquisa – Brasil. 2. Pesquisa – Metodologia. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série. CDD 510.7
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A matemática nos dias de hoje, tem se mostrado uma importante ferramenta para todo cidadão, logo, não é somente restrita a comunidade científica que se dedica a esta área. Diante de toda as informações a que somos expostos a todo tempo, cabe a cada pessoa ser capaz de analisar, interpretar e inferir sobre elas de maneira consciente.

Esta obra, intitulada “A diversidade em debates de pesquisa em matemática” traz em seu conteúdo uma série de trabalhos que corroboram significativamente para o olhar da pesquisa matemática em prol da discussão das diversidades. Discussões essas que são pertinentes em tempos atuais, pois apontam para o desenvolvimento de pesquisas que visam aprimorar propostas voltadas à inclusão e a sociedade.

Ao leitor, indubitavelmente os trabalhos aqui apresentados ressaltam a importância do desenvolvimento de temas diversos na disciplina de Matemática.

Que a leitura desta obra possa fomentar o desenvolvimento de ações práticas voltadas às diversidades na Educação, tornando o Ensino da Matemática cada vez mais voltado a formação cidadã.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL POR MEIO DO USO DE MATERIAL CONCRETO: REFLEXÕES SOBRE O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM	
Andrey Alves do Couto Ana Cristina Gomes de Jesus	
DOI 10.22533/at.ed.4721920121	
CAPÍTULO 2	12
UM ESTUDO SOBRE O USO DA CALCULADORA NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA	
Rodolfo França de Lima Dirceu Lima dos Santos Adriano Pilla Zeilmann	
DOI 10.22533/at.ed.4721920122	
CAPÍTULO 3	25
CONTEXTUALIZANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA: INVENTÁRIO FLORESTAL	
Gabriele Cristina Lupchuk Izabel Passos Bonete	
DOI 10.22533/at.ed.4721920123	
CAPÍTULO 4	37
NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES: UM NOVO OLHAR SOBRE OS NÚMEROS REAIS	
Suemilton Nunes Gervázio	
DOI 10.22533/at.ed.4721920124	
CAPÍTULO 5	47
SEXUALIDADE EM FOCO: ATUAÇÃO DO PIBID INTERDISCIPLINAR NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA	
Ariston Rodrigo Silva Lima Tiago Martins Pereira de Carvalho Jaqueline Carvalho Machado Vinícius Vieira da Silva Dutra Lucas dos Santos Passos Luciana Aparecida Siqueira Silva	
DOI 10.22533/at.ed.4721920125	
CAPÍTULO 6	57
TÁBUAS DE FRAÇÕES: APRENDIZAGEM CRIATIVA NO ENSINO FUNDAMENTAL	
Márcio Lima do Nascimento Lucas Batista Paixão Ferreira	
DOI 10.22533/at.ed.4721920126	
CAPÍTULO 7	66
UMA INCOMENSURABILIDADE ARITMÉTICO-GEOMÉTRICA E A EXTENSÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS PARA OS NÚMEROS REAIS	
Marcos Garcia de Souza	
DOI 10.22533/at.ed.4721920127	

CAPÍTULO 8	81
REPUTAR A DIDÁTICA NA AULA DE MATEMÁTICA: O REFLEXIONAR UM REFERENCIAL SIGNIFICATIVO PARA (RE)INTRODUZIR OS FUNDAMENTOS DAS QUATRO OPERAÇÕES ARITMÉTICAS	
José Maione Silva Lemos Sidney Allessandro. da Cunha Damasceno	
DOI 10.22533/at.ed.4721920128	
CAPÍTULO 9	92
JOGOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: A INCLUSÃO DE ALUNOS COM DEFICIÊNCIA VISUAL	
Janaína Fonseca Barbosa Aline Maria de Lucena Wiliana Maria Torres da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.4721920129	
CAPÍTULO 10	98
ENSINANDO GEOMETRIA COM MASSA DE MODELAR: UMA EXPERIÊNCIA FORMATIVA	
Ewerson Tavares da Silva Ricardo Vieira Nascimento Filho Barbarah Soares de Moraes Diana Bonne Caetano Moura Maxwell Gonçalves Araújo Glen Cezar Lemos Franciane José da Silva Ana Cristina Gomes de Jesus	
DOI 10.22533/at.ed.47219201210	
CAPÍTULO 11	108
MATEMÁTICA E AFRICANIDADE NA ESCOLA QUILOMBOLA	
Alexander Cavalcanti Valença	
DOI 10.22533/at.ed.47219201211	
CAPÍTULO 12	119
JOGO COM CARTAS PARA O ENSINO DA OPERAÇÃO DE SOMA NO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS	
Lourival Divino Faria Bruno Diniz Faria Rezende	
DOI 10.22533/at.ed.47219201212	
CAPÍTULO 13	126
O USO DO CUBO MÁGICO COMO RECURSO PEDAGÓGICO PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO	
Juliana Moreno Oliveira Gizele Geralda Parreira Luciano Duarte da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.47219201213	

CAPÍTULO 14	134
EFEITO DA MÁ ESPECIFICAÇÃO DE MODELOS NAS COMBINAÇÕES DE PREVISÃO EM SÉRIES TEMPORAIS COM LONGA DEPENDÊNCIA	
Cleber Bisognin	
Letícia Menegotto	
Liane Werner	
DOI 10.22533/at.ed.47219201214	
CAPÍTULO 15	149
PERFIL DOS PARTICIPANTES EM CRIMES DE VIOLÊNCIA DOMÉSTICA, NO RIO GRANDE DO SUL (LEI Nº 11.340 - LEI MARIA DA PENHA)	
Helena Simeonidis Grillo	
Patrícia Klarmann Ziegelmann	
DOI 10.22533/at.ed.47219201215	
CAPÍTULO 16	162
P_{DCCA} APLICADO ENTRE TEMPERATURA AMBIENTE E UMIDADE RELATIVA DO AR: MÉDIAS DISTINTAS	
Andrea de Almeida Brito	
Aloísio Machado da Silva Filho	
Ivan Costa da Cunha Lima	
Gilney Figueira Zebende	
DOI 10.22533/at.ed.47219201216	
CAPÍTULO 17	167
O EFEITO DO USO DE UM <i>APPLET</i> NA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM DENOMINADORES NUMA TURMA DO 7.º ANO DE ESCOLARIDADE DO ENSINO BÁSICO	
Ana Paula Lima Gandra	
Ana Paula Aires	
Paula Catarino	
DOI 10.22533/at.ed.47219201217	
SOBRE O ORGANIZADOR	179
ÍNDICE REMISSIVO	180

EFEITO DA MÁ ESPECIFICAÇÃO DE MODELOS NAS COMBINAÇÕES DE PREVISÃO EM SÉRIES TEMPORAIS COM LONGA DEPENDÊNCIA

Cleber Bisognin

UFSM - Universidade Federal de Santa Maria,
Departamento de Estatística
Santa Maria – RS

Letícia Menegotto

UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do
Sul
Porto Alegre - RS

Liane Werner

UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do
Sul, Depto. de Estatística
Porto Alegre - RS

RESUMO: Ao modelarmos processos estocásticos, é possível cometermos equívocos no tipo de processo ou mesmo no número de parâmetros a ser ajustado em determinada série. O objetivo deste trabalho é verificar a influência da má especificação de modelos nas previsões e nas combinações de previsões através das medidas de acurácia quando a série apresenta a propriedade de longa dependência, uma vez que comumente séries temporais que apresentam esta propriedade são confundidas com séries temporais não estacionárias. Utilizando a técnica de Monte Carlo serão realizadas simulações para verificar esta influência, onde será calculada a média das medidas de acurácia calculadas para cada modelo a ser verificado. Analisando

as simulações, observamos que na grande maioria das vezes as combinações de previsões têm melhor capacidade preditiva que o próprio modelo a partir do qual a série for gerada - neste caso, ARFIMA(p, d, q). Finalmente será feita uma aplicação a dados reais, na qual será analisada a série temporal do valor do ativo do Banco Bradesco SA na hora do fechamento da bolsa de valores.

PALAVRAS-CHAVE: Combinação de Previsões, Previsões, Longa Dependência, Má Especificação de Modelos.

ABSTRACT: When modeling stochastic processes, it is possible to make mistakes in the type of process or even the number of parameters to be adjusted in each series. The objective of this work is to verify the influence of poor model specification on predictions and Combination of Forecasts through the accuracy measures when the series presents the long dependence property, since commonly time series presenting this property are confused with not stationary time series. Using the Monte Carlo technique, simulations will be performed to verify this influence, where the average of the calculated accuracy measurements will be calculated for each model to be verified. Looking at simulations, we see that for the most part prediction combinations have better predictive power than the model from which the series is

generated - in this case ARFIMA(p, d, q). Finally an application will be made to real data, which will analyze the time series of the asset value of Banco Bradesco SA at the time of closing of the stock exchange.

KEYWORDS: Combining forecast, Forecasting, Long Memory, Misspecification.

1 | INTRODUÇÃO

De acordo com Abraham e Ledolter (2009), o ser humano está sempre fazendo previsões, que consiste em uma atividade indispensável no planejamento, na definição da estratégia e na tomada de decisões orientadas para o futuro, tanto em nível individual como em nível organizacional.

Uma vez que previsões envolvem eventos futuros e estes, por sua vez, envolvem a incerteza, tem-se que as previsões, em geral, não são perfeitas. O objetivo, ao realizarmos uma previsão, é reduzir o erro da mesma (ABRAHAM; LEDOLTER, 2009). Para produzir uma previsão que apresente um erro pequeno, é necessário utilizar uma técnica de previsão adequada, seja por meio de um modelo ou uma combinação de previsões, e para tanto é preciso obter critérios de acurácia.

Conforme Morettin; Tolo (2006), uma das suposições mais frequentes que se faz a respeito de uma série temporal é que se desenvolva no tempo, aleatoriamente ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável (estacionariedade). Todavia, a maior parte das séries que se encontra na prática apresenta alguma forma de não estacionariedade, pois mudam suas características estocásticas ao longo do tempo de observação, sendo conhecidas por séries não estacionárias. Segundo Box; Jenkins (1976) é possível obter séries estacionárias pela diferenciação (d), valor este assumido como número inteiro. Uma diferenciação fracionária é o caso geral do processo de diferenciação, modelos que usam este procedimento são conhecidos por modelos de longa dependência e nas últimas décadas, tem ocorrido grande interesse no estudo de séries temporais com longa dependência, que iniciaram com os estudos de Hurst em 1951.

Quando as medidas de acurácia são boas, acreditamos que um modelo adequado foi encontrado. Porém, é preciso ter cuidado na especificação do modelo. Para Queiroz (2016) a solução de problemas estatísticos está baseada na teoria da máxima verossimilhança, que tem como suposição básica de que o modelo escolhido para analisar os dados é, de fato, o modelo gerador destes. Quando isso não acontece, ou seja, quando ocorre uma má especificação do modelo, utilizar os procedimentos inferenciais usuais pode resultar em conclusões errôneas, gerando interpretações equivocadas.

Frente a isto, o objetivo deste trabalho é verificar a influência da má especificação de modelos na previsão e nas combinações de previsões através das medidas de

acurácia, tendo como modelo gerador uma série que apresenta longa dependência. Tal objetivo deve-se ao fato que algumas séries temporais, podem ser tratadas como estacionária ou não estacionárias, em outras palavras, quando analisamos tais series com testes de raiz unitária, o p-valor de um teste é aproximadamente 0.1 e de outro menos que 0.05. Utilizaremos a série temporal do valor do ativo do Banco Bradesco SA na hora do fechamento da bolsa de valores para mostrar tal situação.

2 | TÉCNICAS DE PREVISÃO

Nesta seção apresentamos os modelos utilizados para análise e previsão de séries temporais. Serão utilizados os modelos $ARMA(p,q)$, $ARIMA(p,d,q)$, $ARFIMA(p,d,q)$ e Suavização Exponencial, além de três métodos para realizar combinações de previsões, a saber: variância mínima, por regressão e média aritmética.

Inicialmente definimos os processos $ARIMA(p,d,q)$ proposto por Box; Jenkins (1976).

Definição 1: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico satisfazendo a equação

$$\phi(B)(1 - B)^d(X_t - \mu) = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (1)$$

onde: μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o processo ruído branco, B é o operador defasagem ou de retardo, isto é, $B^j(X_t) = X_{t-j}$, para $j \in \mathbb{N}$, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ e são os polinômios de ordem p e q , respectivamente, definidos por.

$$\phi(z) = \sum_{\ell=1}^p (-\phi_\ell)z^\ell, \quad \theta(z) = \sum_{m=1}^q (-\theta_m)z^m, \quad (2)$$

com $\phi_\ell, 1 \leq \ell \leq p$ e $\theta_m, 1 \leq m \leq q$, são constantes reais e $\phi_0 = -1 = \theta_0$. Então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo integrado de média móvel de ordem* (p,d,q) , denotado por $ARIMA(p,d,q)$, onde $d \in \mathbb{Z}_\geq$ é o grau de diferenciação.

Durante as últimas décadas, houve muito interesse em estudar séries temporais com a propriedade de longa dependência. Utilizando a definição de longa dependência, Granger; Joyeux (1980), Hosking (1981) e Hosking(1984) apresentam os *processos auto-regressivos fracionalmente integrados de média móvel* - $ARFIMA(p,d,q)$ como um exemplo de processos com a característica de longa dependência. A seguir definimos os processos $ARFIMA(p,d,q)$.

Definição 2: Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser um processo $ARFIMA(p,d,q)$ quando satisfaz a Definição 1 e $0 < d < 0,5$. Então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo fracionalmente integrado de média móvel de ordem*

(p, d, q) , denotado por ARFIMA(p, d, q), onde d é o grau de diferenciação fracionário.

Além destes, os modelos de suavização exponencial, devido a sua simplicidade, facilidade de ajustes e boa acurácia, são os mais utilizados frente a outras técnicas de previsão, segundo Morettin; Toloi (2006). Ainda para os autores, como assumem que os valores extremos da série são flutuações aleatórias, o propósito destes modelos é identificar um padrão básico na série temporal a ser analisada. Estes modelos valorizam mais as últimas observações na série temporal através da ponderação exponencial das mesmas, de acordo com a proximidade ao período da previsão h . Os métodos mais tradicionais de suavização exponencial são: (i) a suavização exponencial simples, para séries que apresentam apenas variações em torno de um nível; (ii) o modelo linear de Holt, para as séries que apresentam a componente de tendência e (iii) os modelos de Holt-Winters, quando a série apresenta tanto a componente de tendência quanto a sazonal (MAKRIDAKIS et al. 1998).

A seguir definimos os modelos lineares de Holt.

Definição 3: Seja uma série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$. No caso dos modelos lineares de Holt consideramos que tal série é formada pela soma do nível, tendência e um erro aleatório, como segue:

$$X_t = L_t + T_t + \varepsilon_t, \text{ para } t = s + 1, \dots, n. \quad (3)$$

As estimativas do nível da série no tempo t , denotado por L_t , da tendência, denotada por T_t , são dadas, respectivamente por

$$L_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (4)$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \quad (5)$$

onde: α é o coeficiente de ponderação exponencial do nível ($0 \leq \alpha \leq 1$) e β é o coeficiente de ponderação exponencial da tendência ($0 \leq \beta \leq 1$).

Além destes modelos, um método comumente utilizado para melhorar a acurácia das previsões é a combinação de previsões. Segundo Costantini; Pappalardo (2010), este método consiste em utilizar um mecanismo para captar os diversos fatores que afetam cada técnica de previsão individual usada como base na obtenção da previsão combinada.

O método da variância mínima, proposto por Bates; Granger (1969) consiste em realizar a combinação linear de duas previsões com diferentes pesos. Neste método a combinação das previsões é obtida atribuindo-se um peso para cada uma das previsões individuais que serão combinadas. Sua estrutura é apresentada conforme equação (6).

$$F_c = wF_1 + (1 - w)F_2 \quad (6)$$

onde w é o peso atribuído a previsão de menor variância e F_1 e F_2 são as

previsões individuais a serem combinadas.

Para a obtenção dos pesos descritos na equação (6) é interessante atribuir menor peso às previsões de maior variabilidade nos erros e considerar a correlação existente entre os erros das duas previsões individuais realizadas. O peso para a previsão com menor variabilidade nos erros é obtido conforme equação (7).

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}, \quad (7)$$

onde ρ é o valor da correlação linear entre os erros das previsões obtidas em F_1 e F_2 , σ_1^2 e σ_2^2 são as variâncias respectivas dos erros de previsão de F_1 e F_2 .

O método mais popular de combinação de previsões individuais é a média aritmética, pois além de ser um dos métodos mais conhecidos é fácil de calcular (MARTINS; WERNER, 2014).

Um fato que chamou a atenção de Granger; Ramanathan (1984) é que a combinação de previsões poderia ter a forma de regressão, usaram então o Método dos Mínimos Quadrados Ordinários (MQO), com a previsão combinada sendo a variável resposta e as previsões individuais as variáveis explicativas.

De acordo com Makridakis et al. (1998), a palavra acurácia refere-se à habilidade do modelo ou da combinação em reproduzir os dados observados (qualidade do ajuste). Porém para avaliar qual técnica de previsão (individual ou combinação) é a mais adequada, faz-se necessário obter medidas de acurácia. Neste trabalho iremos utilizar as medidas de acurácia *Root Mean Squared Error* (RMSE), erro médio absoluto (MAE), erro percentual médio (MPE), erro percentual médio absoluto (MAPE) e erro médio de previsão (ME).

3 | SIMULAÇÕES DE MONTE CARLO

Nesta seção serão apresentados os resultados tendo como base os procedimentos metodológicos de simulação de Monte Carlo. O procedimento consiste em gerar séries temporais (amostras) dos processos ARFIMA(p,d,q), com $0 < d < 0.5$. As séries temporais foram geradas utilizando a rotina *fracdiff.sim*, do pacote *fracdiff* do R Core Team (2018). Após foram ajustados as séries temporais geradas processos ARFIMA(p,d,q), utilizando a rotina *arfima*, do pacote *forecast*, processos ARIMA(p,d,q) e ARMA(p,q), utilizando a rotina *auto.arima*, também do pacote *forecast*, e o modelo de suavização exponencial (Modelo Linear de Holt), utilizando a rotina *HoltWinters*, do pacote *stats*.

No caso dos processos ARFIMA(p,d,q), a rotina seleciona automaticamente os valores de p e q usando o algoritmo Hyndman; Khandakar (2008) e o algoritmo de Haslett; Raftery (1989), que é baseado no método da máxima verossimilhança, para

estimar os parâmetros, incluindo o parâmetro d .

Para a estimação dos parâmetros dos processos dos modelos ARIMA e ARMA foi utilizado a rotina *auto.arima* que calcula a verossimilhança exata via representação de Estado de Espaço do modelo enquanto as inovações são encontradas via Filtro de Kalmann. A estimação dos coeficientes dos polinômios é baseada em Gardner et. al (1980).

Para os modelos de suavização exponencial foi utilizado a rotina *HoltWinters*. A função tenta encontrar valores ótimos para α , e/ou β minimizando o erro quadrado de previsão de um passo à frente quando nenhum dos parâmetros de suavização é informado pelo usuário.

Após ajuste de modelos e teste de resíduos (rotina *Box.test*) foram calculadas as previsões dos n valores da série temporal gerada e também serão aplicadas as técnicas de combinação previsão de variância mínima, média aritmética e por regressão, como base nos modelos individuais previamente obtidos combinados dois a dois. As técnicas de combinação de previsão foram implementadas no mesmo *software*.

Calculadas as previsões, o próximo passo é calcular as medidas de acurácia ME (média dos erros de previsão), RMSE (raiz do erro médio quadrático), MAE (erro médio absoluto de previsão), MPE (percentual médio de erro) e pelo MAPE (percentual médio absoluto de erro). As medidas foram calculadas utilizando-se a rotina *accuracy* do pacote *forecast*.

As Tabelas 1 a 5 contemplam os resultados de simulação para o procedimento acima, e apresentam as médias das medidas de acurácia, para as replicações das previsões usando os modelos e as três combinações. Foram geradas séries temporais, para cinco composições dos valores dos parâmetros $d = 0,3$, $p \in \{0, 1\}$, $\phi_1 \in \{-0,8; 0,8\}$, $q \in \{0, 1\}$, $\theta_1 \in \{-0,2; 0,2\}$.

Analisando a Tabela 1, quando geramos amostras dos processos ARFIMA(p, d, q), com $d = 0,3$, $p = 1$, $\phi_1 = -0,8$ e $q = 0$, concluímos que os modelos com menor ME são os modelos ARIMA(p, d, q), a combinação de previsões de variância mínima com os modelos ARMA(p, q) e Holt, e a combinação de previsões por regressão e média dos modelos ARIMA(p, d, q) e ARMA(p, q). Com menor RMSE, MAE e MAPE é a combinação de previsões de variância mínima utilizando os modelos ARIMA(p, d, q) e Holt. Já o menor MPE foi encontrado na combinação por variância mínima do ARIMA(p, d, q) e Holt.

Modelos Ajustados	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
ARFIMA	-0.0002	0.9978	0.7963	-1.0660	8.2262
ARIMA	0.0000	1.0024	0.7996	-1.0519	8.2601
ARMA	-0.0001	0.9974	0.7959	-1.0669	8.2300

Holt	-0.0010	1.6295	1.2831	-2.2506	13.3495
Combinação de Previsões - Variância Mínima					
ARFIMA/ARIMA	0.0006	0.9977	0.7962	-1.0573	8.2265
ARFIMA/ARMA	0.0019	0.9989	0.7974	-1.0457	8.2360
ARFIMA/Holt	-0.0002	0.7434	0.5933	-0.8310	6.1339
ARIMA/ARMA	0.0003	1.0000	0.7977	-1.0521	8.2406
ARIMA/Holt	-0.0006	0.7328	0.5847	-0.8137	6.0455
ARMA/Holt	0.0000	0.7434	0.5934	-0.8270	6.1391
Combinação de Previsões - Regressão					
ARFIMA/ARIMA	0.0002	0.9958	0.7943	-1.0556	8.2047
ARFIMA/ARMA	-0.0001	0.9956	0.7942	-1.0637	8.2093
ARFIMA/Holt	-0.0002	0.7418	0.5919	-0.8328	6.1254
ARIMA/ARMA	0.0000	0.9954	0.7942	-1.0586	8.2046
ARIMA/Holt	0.0015	0.7342	0.5857	-0.7952	6.0571
ARMA/Holt	0.0001	0.7443	0.5941	-0.8277	6.1465
Combinação de Previsões - Média					
ARFIMA/ARIMA	-0.0001	0.9974	0.7962	-1.0598	8.2289
ARFIMA/ARMA	0.0001	0.9959	0.7948	-1.0633	8.2179
ARFIMA/Holt	0.0002	1.0301	0.8157	-1.4743	8.5070
ARIMA/ARMA	0.0000	0.9963	0.7953	-1.0566	8.2141
ARIMA/Holt	-0.0004	1.0273	0.8145	-1.4675	8.4935
ARMA/Holt	-0.0007	1.0314	0.8175	-1.4824	8.5233

Tabela 1 - Medidas de acurácia para séries temporais geradas a partir dos processos ARFIMA(p,d,q), quando $d = 0,3$, $p = 1$, $\phi_1 = -0,8$ e $q = 0$ e $n = 1000$.

Pela análise da Tabela 2, quando geramos amostras dos processos ARFIMA(p,d,q), quando $d = 0,3$, $p = 1$, $\phi_1 = 0,8$ e $q = 0$, concluímos que o modelo com menor ME é o modelo ARMA(p,q) e a combinação de previsões por média dos modelos ARFIMA(p,d,q) e ARMA(p,q). O modelo ARMA(p,q) possui menor RMSE e MAPE, enquanto o modelo ARFIMA(p,d,q) possui menor MAE e a combinação de previsões por variância mínima utilizando os modelos ARIMA(p,d,q) e Holt possui menor MPE.

Modelos Ajustados	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
ARFIMA	-0.0001	0.9976	0.7960	-1.1196	12.0266
ARIMA	0.0004	1.0125	0.8079	-1.4654	13.3490
ARMA	0.0000	0.9973	0.7961	-1.3920	11.8463
Holt	-0.0010	1.0461	0.8348	-1.1510	12.1322
Combinação de Previsões - Variância Mínima					
ARFIMA/ARIMA	-0.0001	0.9984	0.7964	-3.5889	15.1945

ARFIMA/ARMA	0.0024	1.0021	0.7995	-1.7194	12.4937
ARFIMA/Holt	-0.0002	1.1847	0.9454	-1.4550	14.4596
ARIMA/ARMA	0.0002	1.0137	0.8085	-1.8338	13.2070
ARIMA/Holt	-0.0004	1.1928	0.9514	0.7557	15.8453
ARMA/Holt	-0.0001	1.1854	0.9461	-8.9787	22.2009
Combinação de Previsões - Regressão					
ARFIMA/ARIMA	0.0032	0.9992	0.7973	-4.9606	15.2409
ARFIMA/ARMA	0.0002	0.9984	0.7968	-3.2177	14.9527
ARFIMA/Holt	0.0007	1.1836	0.9445	3.6867	19.9684
ARIMA/ARMA	0.0021	0.9987	0.7971	1.2228	14.7097
ARIMA/Holt	0.0435	1.1887	0.9487	-1.6423	14.7383
ARMA/Holt	-0.0007	1.1862	0.9467	-2.3120	14.3208
Combinação de Previsões - Média					
ARFIMA/ARIMA	0.0003	1.0018	0.7994	-2.1029	12.3018
ARFIMA/ARMA	0.0000	0.9990	0.7972	-2.7820	13.8283
ARFIMA/Holt	-0.0001	1.1069	0.8836	-1.8229	13.9846
ARIMA/ARMA	0.0002	1.0015	0.7990	-1.9371	12.2046
ARIMA/Holt	-0.0001	1.1074	0.8836	0.4485	13.9419
ARMA/Holt	0.0003	1.1071	0.8833	-2.2674	13.9702

Tabela 2 - Medidas de acurácia para séries temporais geradas a partir dos processos ARFIMA(p,d,q), quando $d = 0,3$, $p = 1$, $\phi_1 = 0,8$ e $q = 0$ e $n = 1000$.

Pela Tabela 3, quando geramos amostras dos processos ARFIMA(p,d,q), quando $d = 0,3$, $p = 0$, $q = 1$ e $\theta_1 = 0,2$, verificamos que o modelo ARIMA(p,d,q) e a combinação por regressão dos modelos ARFIMA(p,d,q) e ARMA(p,q) possuem menor ME, a combinação por média dos modelos ARFIMA(p,d,q) e Holt possui menores RMSE, MAE e MAPE, enquanto a combinação por regressão dos modelos ARIMA(p,d,q) e Holt tem menor MPE.

Modelos Ajustados	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
ARFIMA	0.0006	0.9985	0.7967	-1.0285	8.1506
ARIMA	0.0000	1.0034	0.8002	-1.0077	8.1807
ARMA	0.0001	0.9982	0.7969	-1.0301	8.1384
Holt	0.0007	1.0993	0.8697	-0.9323	8.8585
Combinação de Previsões - Variância Mínima					
ARFIMA/ARIMA	-0.0001	0.9976	0.7964	-1.0268	8.1329
ARFIMA/ARMA	0.0008	0.9968	0.7957	-1.0193	8.1267
ARFIMA/Holt	-0.0001	0.8740	0.6975	-0.9154	7.1440
ARIMA/ARMA	-0.0006	1.0023	0.7996	-1.0200	8.1733
ARIMA/Holt	-0.0003	0.8876	0.7084	-0.8978	7.2432

ARMA/Holt	-0.0001	0.8898	0.7101	-0.9316	7.2750
Combinação de Previsões - Regressão					
ARFIMA/ARIMA	0.0005	0.9959	0.7953	-1.0187	8.1292
ARFIMA/ARMA	0.0000	0.9974	0.7960	-1.0326	8.1400
ARFIMA/Holt	0.0003	0.8743	0.6977	-0.9076	7.1291
ARIMA/ARMA	0.0003	0.9964	0.7954	-1.0225	8.1295
ARIMA/Holt	0.0037	0.8856	0.7067	-0.8535	7.2144
ARMA/Holt	0.0000	0.8890	0.7094	-0.9246	7.2476
Combinação de Previsões - Média					
ARFIMA/ARIMA	-0.0002	0.9968	0.7957	-1.0200	8.1394
ARFIMA/ARMA	0.0002	0.9969	0.7957	-1.0284	8.1302
ARFIMA/Holt	0.0001	0.8463	0.6736	-0.8135	6.8733
ARIMA/ARMA	0.0006	0.9968	0.7954	-1.0134	8.1374
ARIMA/Holt	0.0004	0.8546	0.6806	-0.8049	6.9493
ARMA/Holt	-0.0001	0.8524	0.6788	-0.8199	6.9314

Tabela 3 - Medidas de acurácia para séries temporais geradas a partir dos processos ARFIMA(p,d,q), quando $d = 0,3$, $p = 0$, $q = 1$, $\theta_1 = 0,2$ e $n = 1000$.

Através da Tabela 4, quando geramos amostras dos processos ARFIMA(p,d,q), com $d = 0,3$, $p = 0$, $q = 1$ e $\theta_1 = -0,2$, constatamos que o modelo Holt, a combinação de previsões por variância mínima dos modelos ARFIMA(p,d,q) e Holt e a combinação de previsões por regressão dos modelos ARFIMA(p,d,q) e ARMA(p,q) e dos modelos ARMA(p,q) e Holt possuem menor ME. A combinação de previsões por média dos modelos ARFIMA(p,d,q) e Holt possui menor RMSE, MAE, MPE e MAPE.

Analisando a Tabela 5, quando geramos amostras dos processos ARFIMA(p,d,q), quando $d = 0,3$, $p = 1$, $\phi_1 = 0,8$, $q = 1$ e $\theta_1 = -0,2$, observamos que o modelo ARIMA(p,d,q), a combinação de previsões por variância mínima dos modelos ARIMA(p,d,q) e Holt e a combinação de previsões por média dos modelos ARIMA(p,d,q) e ARMA(p,q) e dos modelos ARMA(p,q) e Holt possuem menor ME. A combinação de previsões por média dos modelos ARFIMA(p,d,q) e ARMA(p,q) possui menor RMSE, a combinação de previsões por regressão dos modelos ARFIMA(p,d,q) e ARMA(p,q) possui menor MAE, enquanto os menores valores de MPE e MAPE ocorrem na combinação de previsões por variância mínima dos modelos ARIMA(p,d,q) e ARMA(p,q).

Modelos Ajustados	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
ARFIMA	0.0001	0.9979	0.7964	-1.0469	8.1889
ARIMA	-0.0005	1.0013	0.7989	-1.0171	8.1995
ARMA	0.0001	0.9977	0.7964	-1.0466	8.1839

Holt	0.0000	1.0975	0.8739	-0.8456	8.9308
Combinção de Previsões - Variância Mínima					
ARFIMA/ARIMA	-0.0005	0.9967	0.7953	-1.0475	8.1866
ARFIMA/ARMA	-0.0008	0.9977	0.7960	-1.0515	8.1781
ARFIMA/Holt	0.0000	0.9598	0.7659	-1.0030	7.8554
ARIMA/ARMA	-0.0002	0.9987	0.7967	-1.0242	8.1886
ARIMA/Holt	-0.0001	0.9488	0.7574	-0.9539	7.7708
ARMA/Holt	0.0002	0.9613	0.7676	-1.0059	7.8788
Combinção de Previsões - Regressão					
ARFIMA/ARIMA	0.0008	0.9980	0.7965	-1.0286	8.1682
ARFIMA/ARMA	0.0000	0.9966	0.7955	-1.0480	8.1818
ARFIMA/Holt	0.0004	0.9581	0.7645	-1.0036	7.8737
ARIMA/ARMA	0.0005	0.9960	0.7952	-1.0333	8.1689
ARIMA/Holt	0.0046	0.9479	0.7568	-0.9043	7.7581
ARMA/Holt	0.0000	0.9618	0.7676	-1.0141	7.8986
Combinção de Previsões - Média					
ARFIMA/ARIMA	-0.0002	0.9979	0.7965	-1.0308	8.1736
ARFIMA/ARMA	-0.0003	0.9975	0.7963	-1.0536	8.1892
ARFIMA/Holt	0.0007	0.8348	0.6655	-0.7557	6.8197
ARIMA/ARMA	0.0002	0.9969	0.7949	-1.0286	8.1638
ARIMA/Holt	-0.0018	0.8349	0.6657	-0.7659	6.8285
ARMA/Holt	-0.0004	0.8357	0.6667	-0.7739	6.8465

Tabela 4 - Medidas de acurácia para séries temporais geradas a partir dos processos ARFIMA(p,d,q), quando $d = 0,3$, $p = 0$, $q = 1$ e $\theta_1 = -0,2$ e $n = 1000$.

4 | APLICAÇÃO A DADOS REAIS

A seguir analisamos a série temporal do valor do ativo do Banco Bradesco SA na hora do fechamento da bolsa de valores utilizando a metodologia desenvolvida neste trabalho. A etapa da obtenção de dados neste artigo, consistiu em resgatar dados históricos do site Yahoo Finanças (<https://br.financas.yahoo.com/>). Serão utilizadas as 1853 observações diárias disponíveis, de 04/01/2010 a 27/06/2017 (dados acessados em 04/08/2017). Uma vez que se busca uma técnica adequada prever o valor do ativo do Banco, obteve-se as previsões utilizando os modelos de Suavização Exponencial, ARFIMA(p,d,q), ARIMA(p,d,q) e ARMA(p,q) e suas respectivas combinações, utilizando dois modelos base.

Modelos Ajustados	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
ARFIMA	0.0002	0.9979	0.7965	-3.9851	19.9434
ARIMA	0.0000	1.0106	0.8058	0.2030	17.2564

ARMA	0.0001	0.9969	0.7957	-4.0811	20.5178
Holt	0.0009	1.0915	0.8706	0.5765	20.2942
Combinação de Previsões - Variância Mínima					
ARFIMA/ARIMA	0.0002	0.9973	0.7958	5.8007	24.2898
ARFIMA/ARMA	0.0048	1.0030	0.8003	-30.4502	45.4219
ARFIMA/Holt	0.0002	1.4316	1.1431	-5.9641	29.9762
ARIMA/ARMA	0.0002	1.0110	0.8065	0.0863	17.0525
ARIMA/Holt	0.0000	1.4355	1.1455	-0.1687	26.1373
ARMA/Holt	-0.0002	1.4300	1.1412	-6.4398	32.0171
Combinação de Previsões - Regressão					
ARFIMA/ARIMA	0.0045	0.9970	0.7956	-4.2765	20.8610
ARFIMA/ARMA	0.0001	0.9967	0.7957	-0.8420	19.9359
ARFIMA/Holt	0.0006	1.4319	1.1433	-1.3433	24.5153
ARIMA/ARMA	0.0031	0.9965	0.7949	-2.6315	17.9124
ARIMA/Holt	0.0477	1.4343	1.1449	2.1888	27.7956
ARMA/Holt	-0.0008	1.4279	1.1398	7.0087	33.1381
Combinação de Previsões - Média					
ARFIMA/ARIMA	-0.0003	1.0009	0.7981	-0.5809	21.3508
ARFIMA/ARMA	0.0002	0.9964	0.7954	-2.0612	17.6468
ARFIMA/Holt	0.0004	1.2619	1.0068	-0.3275	23.5462
ARIMA/ARMA	0.0000	0.9997	0.7978	-3.8775	20.1004
ARIMA/Holt	0.0009	1.2627	1.0073	-25.1495	49.3979
ARMA/Holt	0.0000	1.2593	1.0050	-0.7913	22.2157

Tabela 5 - Medidas de acurácia para séries temporais geradas a partir dos processos ARFIMA(p,d,q), quando $d = 0,3$, $p = 1$, $\phi_1 = 0,8$, $q = 1$ e $\theta_1 = -0,2$ e $n = 1000$.

A Figura 1 apresenta o gráfico da série temporal e da função de autocorrelação amostral. Podemos perceber, pelo gráfico da série temporal e pela sua função de autocorrelação amostral que a série pode ser tratada como estacionária com a propriedade de longa dependência, mas também pode ser tratada como não estacionária. Foram aplicados os testes de raiz unitária de Dickey-Fuller [p-valor=0.1551], e de Phillips-Perron [p-valor=0.04145]. Os resultados de ambos foram inconclusivos ao testar a hipótese nula que a série temporal é não estacionária versus ser estacionária. Os testes foram realizados usando, respectivamente, as rotinas *adf.test* e *pp.test*, do pacote *tseries* do R Core Team (2018).

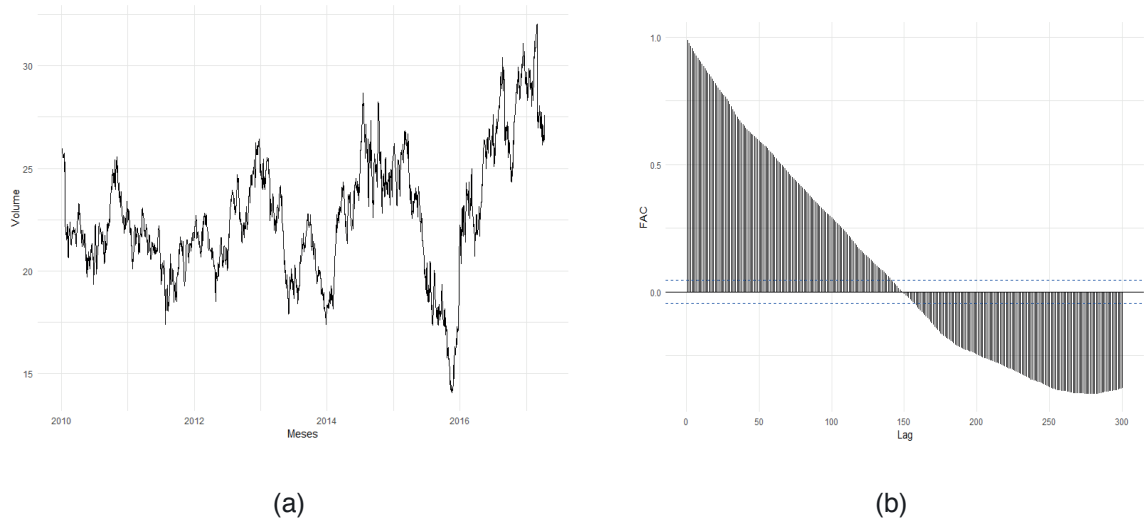


Figura 1 - Valor de Fechamento dos Ativos do Banco Bradesco SA, de 04/01/2010 a 27/06/2017: (a) gráfico da série temporal; (b) função de autocorrelação amostral.

A seguir apresentamos os modelos ajustados a série temporal do valor do ativo do Banco Bradesco SA na hora do fechamento da bolsa de valores.

Modelo 1 - ARFIMA(p,d,q), com $\hat{d} = 0,0458$, $p = 1$, onde $\phi_1 = 0,9890$ e $q = 0$. Para este modelo, obtivemos uma variância estimada dos resíduos igual a $\hat{\sigma}^2 = 0,2104$, AIC=2375,877 e para o teste de Box – Pierce [p-valor=0.6571].

Modelo 2 - ARIMA(p,d,q), com $p=0=q$ e $d=1$. Para este modelo, obtivemos uma variância estimada dos resíduos igual a $\hat{\sigma}^2 = 0,2115$, AIC=2381,62 e para o teste de Box - Pierce [p-valor=0.4938].

Modelo 3 - ARMA(p,q), com $p=1$, $q=0$, onde $\hat{\phi}_1 = 0,9790$. Para este modelo, obtivemos uma variância estimada dos resíduos igual a $\hat{\sigma}^2 = 0,2125$, AIC=2348,86 e para o teste de Box - Pierce [p-valor=0.6587].

Modelo 4 - Modelo Linear de Holt: as estimativas para os parâmetros são: $\hat{\alpha} = 0,9856$, $\hat{\beta} = 0,00564$. Para este modelo obtivemos uma estimativa da variância dos resíduos de $\hat{\sigma}^2 = 0,2129$ e, para o teste de Box - Pierce [p-valor=0.9738].

As Tabelas 6 a 9 apresentam as medidas de acurácia dos Modelos 1 a 4 ajustados e a combinação de previsões combinadas dois a dois. Analisando tais tabelas, verificamos que o Modelo 2 apresenta menor ME, em valor absoluto. A combinação dos Modelos 2 e 3, por variância mínima, apresenta menor MAE e MAPE, com $w = 0.9110$. A combinação dos Modelos 1 e 3, por regressão, apresenta menor RMSE, com $\hat{\beta}_1 = -15,86$, $\hat{\beta}_2 = 16,86$, e R^2 ajustado de 0,986. Por último a combinação dos modelos 3 e 4, por média, apresenta menor MPE, em valor absoluto.

Modelo Ajustado	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
Modelo 1	0.0010	0.4586	0.3348	-0.0369	1.4855
Modelo 2	0.0000	0.4596	0.3342	-0.0208	1.4828

Modelo 3	-0.0010	0.4585	0.3348	-0.0458	1.4857
Modelo 4	0.0132	0.4615	0.3361	0.0475	1.4911

Tabela 6 - Medidas de Acurácia dos Modelos 1 a 4.

Combinações de Previsão	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
Modelos 1 e 2	0.0009	0.4585	0.3346	-0.0350	1.4848
Modelos 1 e 3	0.0402	0.4607	0.3362	0.1395	1.4886
Modelos 1 e 4	0.0026	0.4586	0.3345	-0.0250	1.4843
Modelos 2 e 3	0.0006	0.4594	0.3342	-0.0201	1.4826
Modelos 2 e 4	0.0004	0.4599	0.3345	-0.0192	1.4840
Modelos 3 e 4	0.0009	0.4586	0.3345	-0.0326	1.4845

Tabela 7 - Medidas de Acurácia para as Combinações de Previsão: Variância Mínima.

Combinações de Previsão	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
Modelos 1 e 2	0.0008	0.4588	0.3342	-0.0272	1.4829
Modelos 1 e 3	0.0000	0.4586	0.3348	-0.0414	1.4856
Modelos 1 e 4	0.0069	0.4591	0.3345	0.0049	1.4840
Modelos 2 e 3	-0.0001	0.4588	0.3342	-0.0317	1.4830
Modelos 2 e 4	0.0070	0.4603	0.3349	0.0151	1.4858
Modelos 3 e 4	0.0060	0.4591	0.3345	0.0004	1.4840

Tabela 8 - Medidas de Acurácia para as Combinações de Previsão: Média.

Combinações de Previsão	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
Modelos 1 e 2	0.0004	0.4585	0.3346	-0.0373	1.4849
Modelos 1 e 3	-0.0006	0.4584	0.3347	-0.0466	1.4858
Modelos 1 e 4	0.0010	0.4586	0.3345	-0.0324	1.4845
Modelos 2 e 3	0.0004	0.4585	0.3346	-0.0378	1.4849
Modelos 2 e 4	0.0043	0.4599	0.3345	-0.0025	1.4840
Modelos 3 e 4	0.0010	0.4586	0.3345	-0.0325	1.4845

Tabela 9 - Medidas de Acurácia para as Combinações de Previsão: Regressão.

A Figura 2 apresenta as Predições e as Previsões da Série Temporal do valor do ativo do Banco Bradesco SA na hora do fechamento da bolsa de valores, utilizando o modelo e as combinações de previsão com menores medidas de acurácia. Observa-se que os modelos e combinação de previsões captam o comportamento dos dados

e as previsões apresentadas possuem pouca variação entre si.

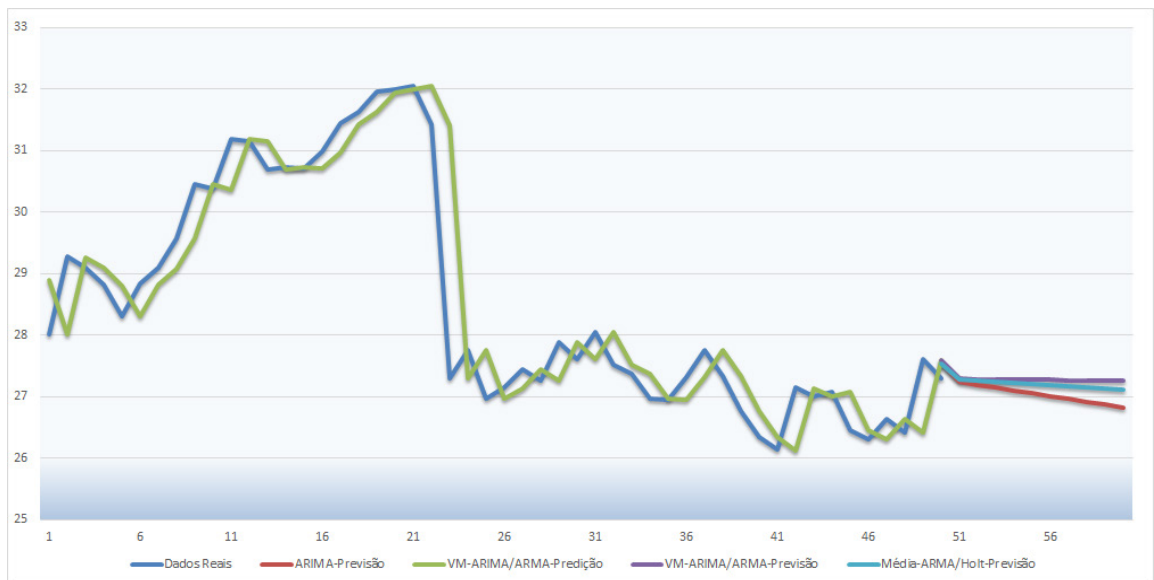


Figura 2 - Previsão da Série Temporal do valor do ativo do Banco Bradesco SA na hora do fechamento da bolsa de valores.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao concluirmos nossas análises, podemos verificar que na maioria dos casos as menores medidas de acurácia, nas simulações de Monte Carlo, foram obtidas através de combinação de previsões. Cabe ressaltar que, em alguns casos as menores medidas médias foram obtidas quando a previsão foi feita somente com um modelo, e nestes casos, em apenas uma situação o modelo ARFIMA(p, d, q) obteve menores medidas de acurácia médias. Ou seja, mesmo tendo uma série gerada a partir deste processo, as combinações exerceram melhor papel preditivo do que o modelo propriamente dito. O mesmo pode ser observado na aplicação em dados reais, uma vez que quatro das cinco menores medidas de acurácia são obtidas com combinações de previsões.

Desta forma, é possível concluir com base nas simulações de Monte Carlo e aplicação realizada neste artigo, que mesmo tendo um problema na especificação do modelo, como é o caso da aplicação utilizando a série temporal do valor do ativo, podemos obter boas previsões.

Neste caso, a combinação de previsões pode ser uma ótima alternativa para aperfeiçoar a previsão, uma vez que, como na maioria dos casos apresentados na seção de simulações de Monte Carlo deste trabalho, é possível aprimorar a capacidade preditiva do modelo visto que as mesmas apresentam menores medidas de acurácia quando comparadas com previsões geradas utilizando-se apenas um modelo.

REFERÊNCIAS

- ABRAHAM, B.; LEDOLTER, J. **Statistical methods for forecasting**. John Wiley & Sons, 2009.
- BATES, J. M.; GRANGER, C. W. J. The Combining of Forecasts. **Operational Research Quarterly**, v.20, n.4, p. 451-468, 1969.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time Series Analysis**. Forecasting and Control. Holden-Day. San Francisco, 1976.
- COSTANTINI, M.; PAPPALARDO, C. A hierarchical procedure for the combination of forecasts. **International Journal of Forecasting**, v.26, n.4, p.725–743, 2010.
- GARDNER, G.; HARVEY, A. C.; Phillips, G. D. Algorithm as 154: An algorithm for exact maximum likelihood estimation of autoregressive-moving average models by means of Kalman filtering. **Journal of the Royal Statistical Society**. Series C (Applied Statistics), v.29, n.3, p.311–322, 1980.
- GRANGER, C. W.; JOYEUX, R. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. **Journal of time series analysis**, v.1, n.1, p. 15–29, 1980.
- GRANGER, C. W. J.; RAMANATHAN, R. Improved Methods of Forecasting. **Journal of Forecasting**, v.3, n.2, p.197-204, 1984.
- HASLETT, J.; RAFTERY, A. E. (1989). Space-time modelling with long-memory dependence: Assessing Ireland's wind power resource. **Journal of the Royal Statistical Society**. Series C (Applied Statistics), v. 38, n. 1, p. 1-50, 1989.
- HOSKING, J. R. Fractional differencing. **Biometrika**, v.68, n.1, p.165-176, 1981
- HOSKING, J. R. Modeling persistence in hydrological time series using fractional differencing. **Water resources research**, v.20, n.12, p.1898–1908, 1984.
- HYNDMAN, R. J.; KHANDAKAR, Y. Automatic Time Series Forecasting: The forecast package for R. **Journal of Statistical Software**,v.27,n.3, p.1-22, 2008.
- MARTINS, V. L. M.; WERNER, L. Comparação de previsões individuais e suas combinações: um estudo com séries industriais. **Production**, v.24, n.3, p. 618-627, July/Sept. 2014.
- MAKRIDAKIS, S.; WHEELWRIGHT, S. C.; HYNDMAN, R. J. **Forecasting. Methods and Applications**. 3rd Edition. John Wiley & Sons. New York, 1998.
- MORETTIN,P.; TOLOI,C. **Análise de séries temporais**. Edgard Blucher, 2006.
- R CORE TEAM **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. R. Foundation for Statistical Computing, Vienna. 2018.<https://www.R-project.org>
- QUEIROZ, F. **Estudo sobre má especificação na família de posição e escala**. 66 f. Monografia (Especialização) - Curso de Estatística. Natal: UFRN, 2016.

SOBRE O ORGANIZADOR

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves - Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Africanidade 108, 114, 116, 118

Aprendizado 2, 4, 17, 93, 94, 108, 112, 119, 122, 123, 127

Aprendizagem 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 28, 36, 57, 58, 59, 65, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 90, 91, 92, 93, 94, 98, 101, 104, 106, 107, 108, 109, 120, 121, 122, 126, 127, 132, 133, 167, 168, 169, 170, 171, 176, 177, 178

Aprendizagem criativa 57

C

Calculadora 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 121, 123, 171

Cartas 119, 120, 121, 122, 123, 125

Corte 36, 66, 72, 74, 75, 76, 77, 79, 177

Cubo mágico 126, 127, 128, 129, 130, 132, 133

D

Deficiência visual 92, 93, 94

E

Ensino-aprendizagem 2, 12, 28, 36, 57, 81, 82, 84, 85, 86, 90, 101, 104, 106, 107, 108, 121, 122, 127

Etnomatemática 108, 111, 112, 118

F

Frações 40, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 102, 167, 169, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177

G

Geometria espacial 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 35, 98, 99, 100, 104, 106

I

Inclusão 27, 92, 93, 168

Incomensurabilidade 66, 67, 69, 76, 79, 80

Interdisciplinaridade 25, 27, 28, 35, 36, 47, 55, 179

J

Jogos 9, 11, 15, 35, 92, 93, 94, 95, 96, 112, 113, 119, 120, 121, 122, 123, 126, 127, 133

L

Longa dependência 134, 135, 136, 144

M

Material concreto 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 31, 35, 98, 101, 104

Médias diárias 162, 163, 164

N

Números reais 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 66, 69, 76, 77, 78, 79

O

Objetos matemáticos 57, 58, 60, 65

Operações da aritmética 81, 90

P

Perfil criminal 149

Previsões 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148

R

Raciocínio lógico-matemático 126, 128, 129, 133

Reflexionar 81, 82, 83, 86, 90

S

Sexualidade 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56

Sólidos geométricos 4, 6, 7, 9, 98, 99, 101, 102, 103, 106

T

Temas transversais 47, 53

Transcendência 37, 43, 44

V

Variáveis climatológicas 162

Violência doméstica 149, 150, 154, 156, 161

