AS CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA NO SÉCULO XXI 2

JÚLIO CÉSAR RIBEIRO
CARLOS ANTÔNIO DOS SANTOS
(ORGANIZADORES)

Atena Editora
Ano 2019

Júlio César Ribeiro

Carlos Antônio dos Santos

(Organizadores)

As Ciências Exatas e da Terra no Século XXI 2

Atena Editora
2019

2019 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Karine Lima
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

C569 As ciências exatas e da terra no século XXI [recurso eletrônico] : volume 2 / Organizadores Júlio César Ribeiro, Carlos Antônio dos Santos. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-680-5
DOI 10.22533/at.ed.805190710

1. Ciências exatas e da terra – Pesquisa – Brasil. I. Ribeiro, Júlio César. II. Santos, Carlos Antônio dos. III. Série.

CDD 507

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2019

APRESENTAÇÃO

A obra “As Ciências Exatas e da Terra no Século XXI,” que encontra-se em seu segundo volume, foi idealizada para compilar trabalhos que demonstrassem os novos desdobramentos da pesquisa científica no século XXI. Em seus 24 capítulos, procura-se apresentar ao leitor discussões alinhadas a eixos temáticos, como agricultura, engenharia, educação, estatística e tecnologias, havendo também espaço para perspectivas multidisciplinares a partir de trabalhos que permeiam diferentes segmentos da grande área. Na primeira parte da obra, que trata sobre agricultura, são apresentados estudos relacionados à fertilidade do solo, precipitação pluviométrica, necessidade hídrica de plantas, estudos fitoquímicos, recuperação, reuso e restauração de áreas degradadas, dentre outros. Na segunda parte, são abordados estudos sobre gerenciamento de resíduos da construção civil, uso do sensoriamento remoto, e comparação entre diferentes métodos de nivelamento.

Na terceira parte, estão agrupados trabalhos que envolvem vertentes econômicas, experiências educacionais, e uso da realidade virtual no processo de aprendizagem.

Na quarta e última parte, são contemplados estudos acerca de questões tecnológicas, envolvendo linguagem estatística, e aplicação de moedas digitais.

Com grande relevância, os trabalhos aqui apresentados estarão disponíveis ao grande público e colaborarão para a difusão de conhecimentos no âmbito técnico e acadêmico.

Os organizadores e a Atena Editora agradecem pelo empenho dos autores que não mediram esforços ao compartilhar, em sua melhor forma, os resultados de seus estudos por meio da presente obra. Desejamos que as informações difundidas por meio desta obra possam informar e provocar reflexões significativas, contribuindo para o fortalecimento desta grande área e de suas vertentes.

Júlio César Ribeiro

Carlos Antônio dos Santos

SUMÁRIO

CAPÍTULO 22

O TEOREMA DA COMPLETUDE

Angela Leite Moreno
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Alfenas – Alfenas – MG.

Michele Martins Lopes
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC
Universidade Estadual de Campinas – Campinas – SP.

RESUMO: Neste trabalho apresentamos detalhadamente o Teorema da Completude, que diz que, dado um espaço métrico qualquer, podemos encontrar um outro espaço métrico de tal modo que o primeiro esteja densamente imerso no segundo, sendo que a métrica utilizada no segundo é similar quando levamos em conta apenas os elementos do primeiro espaço. A importância desse resultado reside no fato de que, a hipótese de um espaço ser completo é essencial para alguns resultados, como do Teorema do Ponto Fixo, do Princípio da Contração de Banach, do Teorema de Baire, do Teorema de Banach-Steinhauss, do Teorema de Banach-Steinhauss #2, entre tantos outros resultados cuja hipótese de completude do espaço métrico é essencial.
PALAVRAS-CHAVE: Análise Funcional, Espaços Métricos, Espaços Métricos Completos, Sequências de Cauchy.

ABSTRACT: In this work we present in detail the Completeness Theorem, which says that given any metric space we can find another metric space such that the former is densely immersed in the second, and the metric used in the second is similar when we take into account only the elements of the first space. The importance of this result lies in the fact that the hypothesis of being complete is essential in some results such as the Fixed Point Theorem, Banach's Contraction Principle, Baire's Theorem, Banach-Steinhauss Theorem, Banach's Theorem-Steinhauss# 2, among many other results whose hypothesis of completeness of metric space is essential.
KEYWORDS: Functional Analysis, Metric Spaces, Complete Metric Spaces, Cauchy Sequences.

1 I INTRODUÇÃO

A Análise Funcional é um ramo da Matemática Abstrata que se originou da Análise Clássica, sendo que os métodos e resultados analíticos funcionais são importantes em vários campos da Matemática e suas aplicações. Seu desenvolvimento se deu através de problemas de Álgebra Linear, Equações Diferenciais Ordinárias, Cálculo de Variações, Teoria da Aproximação e, em especial, das Equações Integrais Lineares.

Ao observar problemas de diferentes campos de aplicação, matemáticos perceberam que estes desfrutam de características e propriedades que estão relacionadas entre si. Deste modo, no lugar de se trabalhar com cada problema individualmente, pode-se utilizar uma abordagem mais abstrata, na qual detalhes não essenciais são omitidos. Assim, uma grande vantagem da abordagem abstrata está no fato de se concentrar apenas nos fatos essenciais, cuja atenção do pesquisador não é perturbada por fatos irrelevantes. Deste modo, o método se torna mais simples e econômico para tratar sistemas matemáticos, além de uma maior aplicabilidade a diversos problemas.

A abordagem abstrata normalmente se inicia com um conjunto de axiomas, de forma que não é necessário se preocupar com a natureza dos elementos que estão sendo trabalhados. A teoria consiste em sequências lógicas que decorrem destes axiomas, então são elencados teoremas, proposições e lemas que servem de base para diversas aplicações, pois não foi preciso se preocupar com as limitações destas aplicações no momento de elencá-los.

Como o estudo de espaços métricos é essencial na Análise Funcional, pois estes desempenham um papel similar ao representando pela reta real no Cálculo, além de fornecer uma base para o estudo da área. Assim, esses espaços generalizam a reta e foram elaborados para possibilitar o tratamento, de modo unificado, problemas importantes de vários ramos da Análise.

Um espaço métrico é um conjunto sobre o qual definimos uma função que mede a “distância” entre seus elementos. Essa distância, aqui denominada métrica, é definida por axiomas que são sugeridos devido à certas propriedades básicas sobre distâncias entre pontos da reta. Deste modo, iniciamos definindo espaços métricos e apresentando alguns resultados e exemplos mais utilizados, para mostrarmos que podemos mudar o modo como calculamos as distâncias dentro de um espaço e, com isso, alterar algumas propriedades dele, conforme seja conveniente.

O foco deste trabalho é discutir a completude de um espaço métrico: uma propriedade que o espaço pode ou não ter, mas que é essencial ao desenvolvimento da Análise Funcional. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar o Teorema da Completude, que diz que qualquer espaço métrico pode ser densamente imerso em um outro que seja completo.

2 I ESPAÇOS MÉTRICOS

Do mesmo modo como calculamos distâncias dentro do conjunto dos números reais, este conceito pode ser estendido para qualquer espaço desde que esteja associado a uma função cujo contradomínio é o conjunto dos números reais positivos que satisfaça algumas características. Mas, quais características uma função deve satisfazer para ser considerada uma distância? Assim temos nossa primeira definição:

Definição 1 (Distância ou Métrica): Suponhamos que seja um conjunto não vazio.

Diremos que uma função $\rho: X \times X \to [0, +\infty)$ é uma distância ou métrica sobre se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

(i) Para todo $a \in X$ temos que $\rho(a,a) = 0$.

(ii) Para quaisquer $a, b \in X$ se que $\rho(a,b) = 0$, então a=b

(iii) *Simetria:* Para quaisquer $a, b \in X$ se que $\rho(a,b) = \rho(b,a)$.

(iii) *Desigualdade Triangular:* Para quaisquer $a, b \in X$ temos que

$$\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b).$$

Diremos que um par ordenado (X, ρ) é um e*spaço métrico* se X for um conjunto e $\rho: X \times X \to [0, +\infty)$ for uma métrica sobre X.

Notemos que, a partir da Desigualdade Triangular, obtemos a Desigualdade Triangular Generalizada:

$$\rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \cdots + \rho(x_{n-1}, x_n).$$

Um subespaço (Y, ρ) de (X, ρ) é obtido ao tomarmos um subconjunto $Y \subset X$ e a restrição de ρ a $Y \times Y$. Assim a métrica em Y é a restrição $\tilde{}\rho = \rho|_{Y \times Y}$.

Assim, temos que $\tilde{}\rho$ é a métrica induzida em Y por p.

Exemplo 1 A reta real. Aqui, consideramos o conjunto dos números reais IR munido da métrica usual:

$$\rho(x,y) = |x - y|.$$

Observe no exemplo a seguir que um mesmo espaço pode ter diferentes métricas e, com isso, temos diferentes espaços métricos:

Exemplo 2. O Plano Euclidiano IR^2. Ao considerarmos no Plano Euclidiano os pontos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, temos que a métrica euclidiana é dada por

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Também podemos considerar a métrica do módulo:

$$\rho_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Ou, ainda, a métrica do máximo:

$$\rho_2(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

Mas também podemos usar a métrica discreta:

$$\rho_{01}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x_1,x_2) = (y_1,y_2), \\ 0, & (x_1,x_2) \neq (y_1,y_2). \end{cases}$$

Entretanto, os espaços podem ser bem mais gerais:

Exemplo 3 Espaço das sequências reais. Seja S o conjunto das sequências de números reais e definamos sobre S a seguinte função

$$\rho((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

é um espaço métrico.

Exemplo 4 Espaço das sequências limitadas ℓ^∞ Seja ℓ^∞ o conjunto das sequências limitadas de números reais, assim

$$\ell^\infty = \{(x_n) : \sup\{|x_n| : n \in IN\} < \infty\}.$$

Em ℓ^∞ definimos a seguinte distância

$$\rho\left((x_j),(y_j)\right) = \sup\{|x_j - y_j| : j = 1,2,\ldots\}.$$

(ℓ^∞, ρ) é um espaço métrico.

Exemplo 5 Espaço ℓ^p Suponhamos que p>1 Definimos o espaço ℓ^p o sendo o conjunto

$$\ell^p = \left\{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\right\}.$$

Em ℓ^p definimos a seguinte distância

$$\rho((x_n),(y_n)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

(ℓ^p, ρ) é um espaço métrico.

No caso em que p=2 temos um espaço que foi introduzido e estudado por D. Hilbert em 1912. Este espaço está relacionado com equações integrais e é denominado Espaço de Hilbert.

Exemplo 6 Espaços das Funções $C[a,b]$ O conjunto de todas as funções reais contínuas do intervalo fechado [a,b], denotado por C[a,b], dado por $C[a,b] = \{f: C[a,b] \rightarrow IR: f \text{ é contínua}\}$, com a métrica

$$\rho(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)|: x \in [a,b]\}$$

é um espaço métrico.

3 I CONJUNTOS ABERTOS E CONJUNTOS FECHADOS

Para seguirmos as discussões precisamos dos conceitos de conjuntos abertos e conjuntos fechados. Para isso, veremos algumas definições auxiliares.

Definição 3 (Bola Aberta em um Espaço Métrico) Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico, que $a \in X$ e que r>0 seja um número real. Diremos que o conjunto $B(a,r) = \{a \in X: \rho(a,x) < r\}$ é uma bola aberta com centro em a e raio r.

Definição 4 (Bola Fechada em um Espaço Métrico) Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico, que $a \in X$ e que r>0. Diremos que o conjunto $B[a,r] = \{a \in X: \rho(a,x) \leq r\}$ é uma bola fechada com centro em a e raio r.

Definição 5 (Conjunto Aberto em um Espaço Métrico) Suponhamos que (X,p) métrico e A um subconjunto de X. Diremos que A é aberto se, dado $x_0 \in A$ existir , $r > 0,\ r = r(x_0)$, tal que $B(x_0,r) \subset A$.

Observação 1 Suponhamos que seja um espaço métrico. Não é difícil provarmos alguns resultados, por isso não os mostraremos aqui:

1. A união de dois conjuntos abertos em X é um conjunto aberto em X.
2. A interseção de dois conjuntos abertos em X é um conjunto aberto em X
3. A união qualquer de conjuntos abertos em X é um conjunto aberto em X.
4. A interseção finita de conjuntos abertos em X é um conjunto aberto em X

Definição 6 (Conjunto Fechado em um Espaço Métrico) Suponhamos que (X,p) métrico e F um subconjunto de X. Diremos que F é fechado se F^c for aberto em (X,p).

Observação 2 Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico. Do mesmo modo temos que:

1. A união de dois conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X.
2. A interseção de dois conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X.
3. A união finita conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X.
4. A interseção qualquer de conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X.

Definição 7 (Interior de um Conjunto) Sejam (X,p) um espaço métrico e A um subconjunto de X. O interior do conjunto A, denotado por int A, é o conjunto dos pontos $x_0 \in X$ com a seguinte característica: existe $r > 0,\ r = r(x_0),$ tal que $B(x_0, r) \subset A$. Em outras palavras, é o maior aberto contido em A, ou seja, é a união de todos os abertos de (X,p) contidos em A.

Definição 8 (Fecho de um Conjunto) Sejam (X,p) um espaço métrico e A um subconjunto de X. O fecho do conjunto A, denotado por $\overline{A}$, é o conjunto de todos os pontos $x_0 \in X$ com a seguinte propriedade: para qualquer $r > 0$, $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

4 I CONVERGÊNCIA EM ESPAÇOS MÉTRICOS

As sequências desempenham um papel importante dentro da Análise Matemática, sendo que é a métrica dentro do conjunto dos números reais que nos permite definir o conceito de convergência. Vejamos como isso acontece:

Definição 11 (Sequência Convergente) Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico e que (x_n) seja uma sequência em (X,p). Diremos que (x_n) converge para $x \in X$ se $\rho(x_n, x) \to 0$ quando $n \to \infty$. Quando (x_n) não for convergente diremos que (x_n) diverge.

Definição 12 (Conjunto Limitado e Sequência Limitada) Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico. Diremos que um subconjunto $M \subset X$ é limitado se seu diâmetro, dado por $\delta(M) = \sup\{\rho(x, y): x, y \in M\}$ for finito. Ao considerarmos uma sequência (x_n) em (X,p) diremos que (x_n) é limitada se o conjunto de pontos correspondentes for um subconjunto limitado de X.

Segue diretamente da definição que, quando uma sequência for limitada existirão um real positivo r e um $x_0 \in X$, tais que $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset B(x_0, r)$.

Lema 1 Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico.

a) Toda sequência convergente é limitada e seu limite é único.

b) Se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em X , então $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

Para definirmos completude, precisamos de uma propriedade adicional que um espaço métrico pode ou não ter, que tornará os espaços métricos completos muito mais interessantes e simples do que os espaços métricos não completos.

Definição 11 (Sequência de Cauchy) Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico e que $\{x_n\}$ seja uma sequência em (X,p). Diremos que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy, ou simplesmente de Cauchy, se, dado $\varepsilon > 0$ existir um $n_0 > 0$ tal que $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, para quaisquer $m, n > n_0$.

Os espaços que têm a propriedade de todas as sequências de Cauchy serem convergentes são importantes na organização do espaço e é denominada de completude. Deste modo temos a seguinte definição:

Definição 12 (Espaço Métrico Completo) Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico. Diremos que (X,p) é um espaço métrico completo, ou simplesmente completo, quando toda sequência de Cauchy de (X,p) for convergente.

Os espaços métricos IR e C são espaços métricos completos. Já o espaço métrico Q não é um espaço métrico completo, pois podemos construir sequências de números racionais que convergem para um número irracional.

Note que, dentro de um espaço métrico completo podemos tomar subespaços completos e subespaços incompletos. Por exemplo, o subespaço [0,1] é completo enquanto que o subespaço (0,1] é incompleto – tome a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ em (0,1] e observe que $\frac{1}{n} \to 0 \notin (0,1]$.

Exemplo 7 $(C[a,b],\rho)$ é completo.

Com efeito, seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $C[a,b]$, então dado $\varepsilon > 0$, existirá $n_0 \in IN$, tal que

$$\rho(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

para quaisquer $m,n > n_0$, isto é,

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

para quaisquer $m,n > n_0$. Em particular temos que

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

para todo $t \in [a,b]$ e para quaisquer $m,n > n_0$. Assim temos que a sequência (f_n) é de Cauchy em IR, para cada $t \in [a,b]$ fixo. Como IR é completo, para cada $t \in [a,b]$ temos que

$$f_n(t) \to f(t).$$

Considerando a função assim definida precisamos mostrar que $f_n \to f$ e que $f \in C[a,b]$.

Afirmação 1 $f \in C[a,b]$.

De fato, dado $t_0 \in [a,b]$, temos que

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(t_0)| + |f_n(t_0) - f(t_0)|,$$

Como $f_n(t) \to f(t)$,segue que existem $n_1, n_2 > 0$ tais que

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n > n_1$, e

$$|f_n(t_0) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n > n_2$. Além disso, pela continuidade de f_n temos que existe $\delta > 0$ tal que se $|t - t_0| < \delta$, então

$$|f_n(t_0) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n > n_2$. Logo, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ da primeira desigualdade segue que, se $|t - t_0| < \delta$, então

$$|f(t) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$, com $t, t_0 \in [a, b]$. Portanto f é contínua.

Afirmação 2: $f_n \to f$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $n_0 \in IN$ tal que

$$\rho(f_n, f) = \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. Para isto basta considerarmos que

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

para quaisquer $n > n_0$ e $t \in [a, b]$. Como (f_n) é de Cauchy, existe $n_0 \in IN$ tal que

$$\rho(f_n, f_m) = \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para quaisquer $m, n > n_0$. Em particular

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para quaisquer $m, n > n_0$ e $t \in [a, b]$. Agora, tomando t fixo e fazendo $m \to \infty$ temos que

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para quaisquer $n > n_0$ e $t \in [a,b]$. Logo

$$\rho(f_n, f) = \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$ e $\varepsilon > 0$ dado. Portanto C[a,b] é completo. ■

Porém se alterarmos a métrica pode haver alterações no espaço. Para isto basta tomarmos o mesmo espaço acima com uma outra métrica.

Exemplo 8 $(C[-1,1], \rho_1)$ não é completo, em que $\rho_1(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|\, dt$.

Com efeito, consideremos em $(C[-1,1], \rho_1)$ a sequência de funções

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq 0, \\ nt, & 0 < t < \dfrac{1}{n}, \\ 1, & t = 1, \end{cases}$$

cujo gráfico é dado na Figura 1:

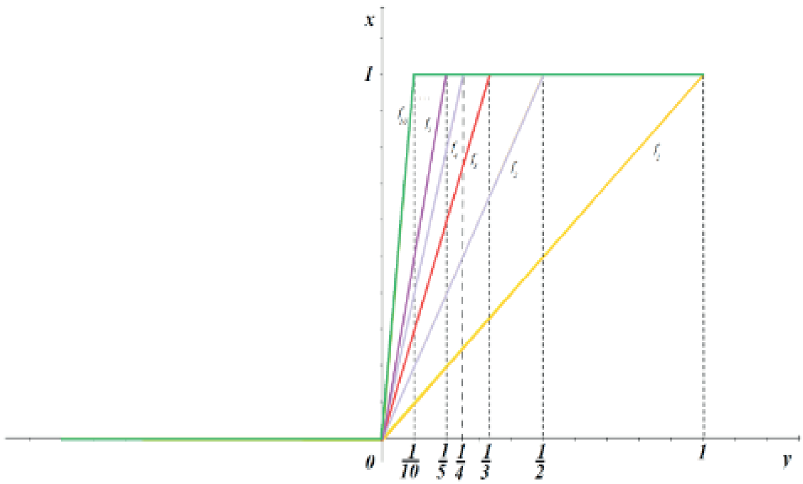

Figura 1- Sequência de funções

Primeiramente provaremos que a sequência (f_n) é de Cauchy, ou seja, que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in IN$ tal que

$$\rho_1(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

para todo $n > n_o$, ou seja, que, para todo $n > n_o$,

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt < \varepsilon,$$

De fato, para verificarmos que a sequência f_n é de Cauchy, tomemos $\varepsilon > 0$ e consideremos $m < n$, pois, com isso, teremos que

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{m},$$

daí

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt \leq \int_{-1}^{0} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt +$$

$$+ \int_{0}^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt + \int_{\frac{1}{m}}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt$$

$$= \int_{-1}^{0} |0 - 0|\, dt + \int_{0}^{\frac{1}{n}} |nt - mt|\, dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |1 - mt|\, dt + \int_{\frac{1}{m}}^{1} |1 - 1|\, dt$$

$$\leq (n-m)\int_{0}^{\frac{1}{n}} t\, dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |1 - mt|\, dt = (n-m)\frac{t^2}{2}\bigg|_{0}^{\frac{1}{n}} + \left[t - \frac{mt^2}{2}\right]_{\frac{1}{m}}^{1}$$

Fazendo $m, n \to \infty$ temos que

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt \to 0.$$

Assim,

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt < \varepsilon,$$

para m e n suficientemente grandes. Logo existe $n_0 > 0$ tal que

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt < \varepsilon,$$

para quaisquer $m, n > n_0$. Portanto $f_n(t)$ é de Cauchy.
Essa sequência é de Cauchy, porém ela é converge para uma função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1, & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

que, como podemos perceber na Figura 2, não é contínua.

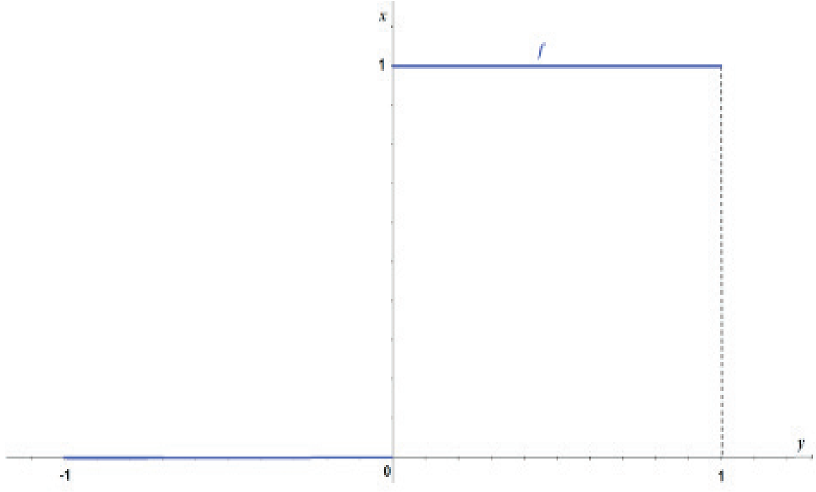

Figura 2 - Gráfico da função *f*.

Portanto o espaço $(C[-1,1],\rho_1)$ não é completo com esta métrica. ■

A propriedade de completeza é importante para demonstrarmos diversos resultados. Assim, a pergunta que se coloca é: Será que, dado um espaço métrico (X,p) é possível completá-lo? Ou ainda: será que é possível encontrarmos um espaço métrico completo que possua uma métrica que preserve as distâncias de p na qual o espaço X esteja imerso? Para respondermos a essas perguntas precisamos de alguns conceitos adicionais:

Definição 13 (Isometria) Sejam (X,p) e (Y,σ) espaços métricos. Diremos que a aplicação $T:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ é uma isometria se

$$\sigma\big(T(x_1),T(x_2)\big)=\rho(x_1,x_2),$$

para quaisquer $x_1,x_2\in X$. Neste caso diremos que (X,ρ) e (Y,σ) são isométricos.

Agora temos condições de provar que todo espaço métrico está densamente imerso em um espaço métrico completo. Como sua demonstração é bem complexa, iremos dividir a prova em oito partes.

Teorema 1: Seja (X,p) um espaço métrico. Então existe um espaço métrico completo $(\tilde{X},\tilde{\rho})$ e $W\subset\tilde{X}$ tais que $(W,\tilde{\rho})$ é isométrico a (X,p) e W é denso em $(\tilde{X},\tilde{\rho})$. Além disso, se $(\overline{X},\overline{\rho})$ for outro espaço métrico completo com subconjunto W' tal que $(W',\overline{\rho})$ for isométrico a (X,p) e W' for denso em $(\overline{X},\overline{\rho})$ então $(\tilde{X},\tilde{\rho})$ e $(\overline{X},\overline{\rho})$ serão isométricos.

Demonstração: Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico.

Iremos construir um espaço métrico completo $(\tilde{X},\tilde{\rho})$ a partir de (X,p) de modo que (X,p) esteja densamente imerso em $(\tilde{X},\tilde{\rho})$

Como já vimos, IR munido com a métrica usual é um espaço métrico completo.

Seja S o conjunto de todas as sequências de Cauchy em X e consideremos a seguinte relação sobre S:

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \rho(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Afirmação 1: $\sim$ é uma relação de equivalência sobre S

Com efeito,

- Reflexiva: Para qualquer sequência (x_n) em X temos que

$$\rho(x_n, x_n) = 0,$$

daí $\rho(x_n, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e, daí, $(x_n) \sim (x_n)$. Portanto $\sim$ é reflexiva.

- Simétrica: Para quaisquer sequências (x_n) e (y_n) em X tais que $(x_n) \sim (y_n)$, temos que

$$\rho(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

mas $\rho(x_n, y_n) = \rho(y_n, x_n)$, daí,

$$\rho(y_n, x_n), \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

e, assim, $(y_n) \sim (x_n)$. Portanto $\sim$ é simétrica.

- Transitiva: Para quaisquer sequências (x_n), (y_n) e (z_n) em X tais que $(x_n) \sim (y_n)$ e $(y_n) \sim (z_n)$, temos que

$$\rho(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{e} \qquad \rho(y_n, z_n), \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

assim, dado $\varepsilon > 0$ existem índices n_1 e n_2 tais que

$$\rho(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n \geq n_1$, e

$$\rho(y_n, z_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n \geq n_2$. Assim, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e utilizando a Desigualdade Triangular segue, para todo $n \geq n_0$, que

$$\rho(x_n, z_n) \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Assim $\rho(x_n, z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e, daí $(x_n) \sim (z_n)$. Portanto $\sim$ é transitiva.

Como é reflexiva, simétrica e transitiva segue que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Como toda relação de equivalência determina uma partição, consideremos $\tilde{X}$ o conjunto de todas as classes de equivalência de S.

Notemos que, para cada $x \in X$ temos que a sequência (x,x,x,...) é uma sequência de Cauchy em X e, portanto existe uma classe de equivalência em $\tilde{X}$ tal que x pertence a esta classe. Assim, a partir de agora, designaremos a classe a qual x pertence por a(x).

Observemos também que, se tivermos (x_n), $(y_n) \in \tilde{X}$ então $\rho(x_n, y_n)$ será uma sequência de Cauchy de números reais, pois

$$\begin{aligned}|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| &= |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y_m) + \rho(x_n, y_m) - \rho(x_m, y_m)| \\ &\leq |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y_m)| + |\rho(x_n, y_m) - \rho(x_m, y_m)| \\ &\leq |\rho(y_n, y_m)| + |\rho(x_n, x_m),|\end{aligned}$$

e, como $(x_n), (y_n) \in X$, segue que

$$\rho(x_n, x_m) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{e} \qquad \rho(y_n, y_m) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e, assim $(\rho(x_n, y_n))$ é de Cauchy e, como IR é completo segue que $(\rho(x_n, y_n))$ é convergente.

Defina sobre $\tilde{X}$ a aplicação $\tilde{}\rho: \tilde{X} \times \tilde{X} \to \tilde{X}$ dada por

$$\tilde{}\rho(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

em que $(x_n) \in \alpha$ e $(y_n) \in \beta$.

Afirmação 2: $\tilde{}\rho$ está bem definida, ou seja, $\tilde{}\rho(\alpha, \beta)$ independe da escolha de $(x_n) \in \alpha$ e $(y_n) \in \beta$.

De fato, sejam $(x_n), (x'_n) \in \alpha$ e $(y_n), (y'_n) \in \beta$, então

$$(x_n) \sim (x'_n) \qquad \text{e} \qquad (y_n) \sim (y'_n),$$

daí,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y'_n) = 0.$$

Notemos, pela Desigualdade Triangular, que

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(x'_n, y'_n) + \rho(y'_n, y_n)$$

Assim, passando o limite, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(y'_n, y_n)$$

e, como $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y'_n) = 0$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n)$$

Analogamente, provamos que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

Logo temos que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n)$$

Deste modo temos que $\tilde{\rho}$ não depende da escolha de $(x_n) \in \alpha$ e $(y_n) \in \beta$.

Afirmação 3: $\tilde{\rho}$ é uma métrica em $\tilde{X}$.

Com efeito.

- Notemos que, para qualquer $\alpha \in \tilde{X}$, temos

$$\tilde{\rho}(\alpha, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

em que $(x_n) \in \alpha$.

- Para quaisquer $\alpha, \beta \in \tilde{X}$, suponhamos que $\tilde{\rho}(\alpha, \beta) = 0$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0,$$

em que $(x_n) \in \alpha$ e $(y_n) \in \beta$.. Mas isto nos leva a $\alpha = \beta$ devido ao fato de $\tilde{\rho}$ estar bem definida.

- Suponhamos que $\alpha, \beta \in \tilde{X}$, com $(x_n) \in \alpha$ e $(y_n) \in \beta$, daí,

$$\tilde{\rho}(\alpha,\beta) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, x_n) = \tilde{\rho}(\beta,\alpha).$$

Portanto, $\tilde{\rho}(\alpha,\beta) = \tilde{\rho}(\beta,\alpha)$.

- Suponhamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \tilde{X}$, com , $(x_n) \in \alpha$, $(y_n) \in \beta$ e $(z_n) \in \gamma$, então

Portanto,

$$\tilde{\rho}(\alpha,\beta) \leq \tilde{\rho}(\alpha,\gamma) + \tilde{\rho}(\gamma,\beta).$$

Portanto $\tilde{\rho}$ é uma métrica sobre $\tilde{X}$.

Afirmação 4: O espaço métrico $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ é completo.

De fato, se (x^k) for uma sequência de Cauchy em $\tilde{X}$ então tomemos $x \ni x^k = (x_n^l) \in \tilde{x}^k$. Temos que

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}^k, \tilde{x}^l) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n^l, x_n^k).$$

Agora, como $x^k = (x_n^k)$ é uma sequência de Cauchy, para cada $k \in IN$ existe um $n_k \in IN$, com $n_k > k$, tal que

$$\tilde{\rho}(x_{n_k}^k, x_{n_l}^l) < \frac{1}{k}$$

para todo $n \geq n_k$. Escolhemos $x = (x_{n_k}^k)$.

Afirmação 5: x é uma sequência de Cauchy.

Com efeito, se y^k for a sequência constante $(x_{n_k}^k, x_{n_k}^k, x_{n_k}^k, x_{n_k}^k, \ldots)$ e $\tilde{y}^k = [y^k]$ temos que

$$\rho(x_{n_k}^k, x_{n_l}^l) = \tilde{\rho}(\tilde{y}^k, \tilde{y}^l) \leq \tilde{\rho}(\tilde{y}^k, \tilde{x}^k) + \tilde{\rho}(\tilde{x}^k, \tilde{x}^l) + \tilde{\rho}(\tilde{x}^l, \tilde{y}^l) \leq \frac{1}{k} + \tilde{\rho}(\tilde{x}^k, \tilde{x}^l) + \frac{1}{l}$$

Assim

$$\rho(x_{n_k}^k, x_{n_l}^l) \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0.$$

Portanto podemos tomar $\tilde{x}$ a classe de equivalência de X.

Afirmação 6: $\tilde{\rho}(\tilde{x}_l, \tilde{x}) \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$.

De fato, temos que

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_l, \tilde{x}) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_k^l, x_{n_k}^l)$$

e que, dado $\varepsilon > 0$ existe um índice $n_0 \in IN$ tal que

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \rho\left(x_{n_l}^l, x_{n_k}^k\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $l, k \geq n_0$. Tomando $l \geq n_0$ e $k = \max\{n_0, n_l\}$, temos que

$$\rho\left(x_k^l, x_{n_k}^l\right) \leq \rho\left(x_k^l, x_{n_l}^l\right) + \rho\left(x_{n_l}^l, x_{n_k}^k\right) < \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Logo,

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_l, \tilde{x}) < \varepsilon,$$

para $l \geq n_0$ e, assim

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}(\tilde{x}_l, \tilde{x}) = 0.$$

Agora, seja

$$\tilde{X}_0 = \{[(x)]: x \in X\} \subset \tilde{X}$$

e consideremos a aplicação $T: X \to \tilde{X}$ dada por

$$T(x) = [(x)].$$

Claramente temos que T é uma isometria de X em $\tilde{X}$.

Afirmação 7: $\tilde{X}_0$ é denso em $\tilde{X}$.

Com efeito, se $\tilde{x} = [(x)] \in \tilde{X}$ então tomemos a sequência em $\tilde{X}_0$ dada por $\widetilde{x_n} = [(x_n, x_n, x_n, \ldots)]$. Notemos que, como (x_n) é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe um índice $n_0 \in IN$ tal que

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

para quaisquer $m, n > n_0$. Assim

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon,$$

para quaisquer $m, n > n_0$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = 0.$$

Afirmação 8: $\tilde{X}$ é único, a mesmo de isometria.

De fato, suponhamos que existam $\tilde{X}$ e $\overline{X}$ espaços métricos completos e isometrias $T: X \to \tilde{X}$ e $U: X \to \overline{X}$, cujas imagens sejam densas. Definamos

$$V = U \circ T^{-1}: \tilde{X} \to \overline{X}.$$

Como U e T são isometrias, segue que $U \circ T^{-1}$ é uma isometria e, portanto, $\tilde{X}$ e são isométricos. ■

Com isso temos que qualquer espaço métrico está densamente imerso em um espaço métrico completo. Note que os espaços (X, ρ) e $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ são isométricos, ou seja, calcular a distância em um espaço é o mesmo que calcular a distância em outro espaço.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, A. N. **Análise I**. Notas de Aula. São Xarlos: ICMC, 2007. Disponível em <http:conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/analise.pdf>. Acesso em: 17 out 2016.

HÖNIG, C. S. Aplicações da Topologia à Análise. 1ª ed. IMPA. Rio de Janeiro, 1976.

HÖNIG, C. S. **Análise Matemática**, IME/USP, 1987.

KREYSIG, E. **Introdutory Functional Analysis with Applications.** John Wiley & Sons. Inc, 1978.

MUNKRES, J. R. **Topology**, 2 ed, Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

NACHBIN, L.. **Introdução à Análise Funcional:** Espaços de Banach e Cálculo Diferencial, Série de Matemática - monografia no. 17. Washington D. C.: The General Secretariat of the Organization of American States, 1976.

SOBRE OS ORGANIZADORES

Júlio César Ribeiro - Engenheiro-Agrônomo formado pela Universidade de Taubaté - SP (UNITAU); Técnico Agrícola pela Fundação Roge - MG; Mestre em Tecnologia Ambiental pela Universidade Federal Fluminense (UFF); Doutor em Agronomia - Ciência do Solo pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Pós-Doutorado no Laboratório de Estudos das Relações Solo-Planta do Departamento de Solos da UFRRJ. Possui experiência na área de Agronomia (Ciência do Solo), com ênfase em ciclagem de nutrientes, nutrição mineral de plantas, fertilidade, química e poluição do solo, manejo e conservação do solo, e tecnologia ambiental voltada para o aproveitamento de resíduos da indústria de energia na agricultura. E-mail para contato: jcragronomo@gmail.com

Carlos Antônio dos Santos - Engenheiro-Agrônomo formado pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica - RJ; Especialista em Educação Profissional e Tecnológica pela Faculdade de Educação São Luís, Jaboticabal-SP; Mestre em Fitotecnia pela UFRRJ. Atualmente é Doutorando em Fitotecnia na mesma instituição e desenvolve trabalhos com ênfase nos seguintes temas: Produção Vegetal, Horticultura, Manejo de Doenças de Hortaliças. E-mail para contato: carlosantoniokds@gmail.com

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

E

F

G

H

I

L

M

N

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-680-5
9 788572 476805