



AS CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA NO SÉCULO XXI 2

**JÚLIO CÉSAR RIBEIRO
CARLOS ANTÔNIO DOS SANTOS
(ORGANIZADORES)**

Atena
Editora
Ano 2019

Júlio César Ribeiro
Carlos Antônio dos Santos
(Organizadores)

As Ciências Exatas e da Terra no Século XXI 2

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Karine Lima
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Faria – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie di Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
C569	As ciências exatas e da terra no século XXI [recurso eletrônico] : volume 2 / Organizadores Júlio César Ribeiro, Carlos Antônio dos Santos. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-680-5 DOI 10.22533/at.ed.805190710 1. Ciências exatas e da terra – Pesquisa – Brasil. I. Ribeiro, Júlio César. II. Santos, Carlos Antônio dos. III. Série. CDD 507
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A obra “As Ciências Exatas e da Terra no Século XXI,” que encontra-se em seu segundo volume, foi idealizada para compilar trabalhos que demonstrassem os novos desdobramentos da pesquisa científica no século XXI. Em seus 24 capítulos, procura-se apresentar a o leito de discussões alinhadas a eixos temáticos, como agricultura, engenharia, educação, estatística e tecnologias, havendo também espaço para perspectivas multidisciplinares a partir de trabalhos que permeiam diferentes segmentos da grande área. Na primeira parte da obra, que trata sobre agricultura, são apresentados estudos relacionados à fertilidade do solo, precipitação pluviométrica, necessidade hídrica de plantas, estudos fitoquímicos, recuperação, reuso e restauração de áreas degradadas, dentre outros. Na segunda parte, são abordados estudos sobre gerenciamento de resíduos da construção civil, uso do sensoriamento remoto, e comparação entre diferentes métodos de nivelamento.

Na terceira parte, estão agrupados trabalhos que envolvem vertentes econômicas, experiências educacionais, e uso da realidade virtual no processo de aprendizagem.

Na quarta e última parte, são contemplados estudos acerca de questões tecnológicas, envolvendo linguagem estatística, e aplicação de moedas digitais.

Com grande relevância, os trabalhos aqui apresentados estarão disponíveis ao grande público e colaborarão para a difusão de conhecimentos no âmbito técnico e acadêmico.

Os organizadores e a Atena Editora agradecem pelo empenho dos autores que não mediram esforços ao compartilhar, em sua melhor forma, os resultados de seus estudos por meio da presente obra. Desejamos que as informações difundidas por meio desta obra possam informar e provocar reflexões significativas, contribuindo para o fortalecimento desta grande área e de suas vertentes.

Júlio César Ribeiro
Carlos Antônio dos Santos

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
DISPONIBILIDADE DE ZN EM SOLOSSUPER ADUBADOS EM ÁREAS DE AGRICULTURA FAMILIAR	
Ingrid Luciana Rodrigues Gomes	
Maria Tairane Silva	
Idamar da Silva Lima	
Airon José da Silva	
Carlos Alexandre Borges Garcia	
Silvânio Silvério Lopes da Costa	
Marcos Cabral de Vasconcellos Barreto	
DOI 10.22533/at.ed.8051907101	
CAPÍTULO 2	9
ALTERAÇÕES QUÍMICAS DO SOLO IRRIGADO COM DILUIÇÕES DE ÁGUA PRODUZIDA TRATADA EM CASA DE VEGETAÇÃO	
Ricardo André Rodrigues Filho	
Rafael Oliveira Batista	
Ana Beatriz Alves de Araújo	
Juli Emille Pereira de Melo	
Rayane Alves de Arruda Santos	
Ana Luiza Veras de Souza	
Antônio Diego da Silva Teixeira	
Emmila Priscila Pinto do Nascimento	
Taís Mendonça da Trindade	
Wellyda Keorle Barros de Lavôr	
Igor Apolônio de Oliveira	
Elioneide Jandira de Sales	
DOI 10.22533/at.ed.8051907102	
CAPÍTULO 3	24
DETERMINAÇÃO RÁPIDA DE MN, ZN, FE E MG EM MELADO DE CANA POR ESPECTROMETRIA DE ABSORÇÃO ATÔMICA COM CHAMA (F AAS)	
Suelen Andolfatto	
Camila Kulek de Andrade	
Maria Lurdes Felsner	
DOI 10.22533/at.ed.8051907103	
CAPÍTULO 4	36
COMPARAÇÃO DA PRECIPITAÇÃO PLUVIOMÉTRICA DE 12 CIDADES PARAENSES	
Whesley Thiago dos Santos Lobato	
Antonio Maricélio Borges de Souza	
Maurício Souza Martins	
Luã Souza de Oliveira	
Bruno Maia da Silva	
Maria Sidalina Messias de Pina	
Daniella Amor Cunha da Silva	
Antonio Elson Ferreira Borges	
Arthur da Silva Monteiro	
Lucas Guilherme Araujo Soares	
Caio Douglas Araújo Pereira	
Lívia Tálita da Silva Carvalho	
DOI 10.22533/at.ed.8051907104	

CAPÍTULO 5 48

NECESSIDADES HÍDRICAS E ÍNDICES DE CRESCIMENTO DA CULTURA DO GERGELIM
(*SESAMUM INDICUM L.*) BRS ANAHÍ IRRIGADO

Isaac Alves da Silva Freitas
José Espínola Sobrinho
Anna Kézia Soares de Oliveira
Ana Beatriz Alves de Araújo
Roberto Vieira Pordeus
Poliana Marias da Costa Bandeira
Priscila Pascali da Costa Bandeira
Tecla Ticiane Félix da Silva
Fernanda Jéssika Carvalho Dantas
Alcimar Galdino de Lira
Alricélia Gomes de Lima
Kadidja Meyre Bessa Simão

DOI 10.22533/at.ed.8051907105

CAPÍTULO 6 58

APLICAÇÃO DA ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS EM EMPRESAS DO SETOR AGROFLORESTAL

Robert Armando Espejo
Rildo Vieira de Araújo
Michel Constantino
Reginaldo Brito da Costa
Paula Martin de Moraes
Vanessa Aparecida de Moraes Weber
Fabricio de Lima Weber
Fabiano Dotto

DOI 10.22533/at.ed.8051907106

CAPÍTULO 7 68

ECOPRODUÇÃO DE PAPEL A PARTIR DE RESÍDUOS TÊXTEIS: PROPOSTA E AVALIAÇÃO DA
VIABILIDADE DE SIMBIOSE INDUSTRIAL

Júlia Terra Miranda Machado
Lilian Bechara Elabras Veiga
Maria Gabriela von Bochkor Podcameni

DOI 10.22533/at.ed.8051907107

CAPÍTULO 8 81

ESTUDO TEÓRICO SOBRE COMO REALIZAR UM PROCESSO DE OBTENÇÃO DE MELADO DE
ALGAROBA (*PROSOPIS JULIFLORA SW DC*)

Karina da Silva Falcão
Alan Henrique Texeira
Clóvis Gouveia da Silva
Mirela Mendes de Farias
Zildomar Aranha de Carvalho Filho

DOI 10.22533/at.ed.8051907108

CAPÍTULO 9 89

ESTUDO QUÍMICO E FARMACOLÓGICO DE *ARTOCARPUS ALTILIS* (PARKINSON) FOSBERG

Alice Joana da Costa
Mônica Regina Silva de Araújo
Beatriz Dias
Chistiane Mendes Feitosa
Renata Paiva dos Santos
Daniele Alves Ferreira
Felipe Pereira Silva de Araújo

DOI 10.22533/at.ed.8051907109

CAPÍTULO 10 101

ESTUDO FITOQUÍMICO DE *HYMENAEA COURBARIL* E AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE TRIPANOCIDA

Breno Memic Sequeira
Romeu Machado Rocha Neto
Lúzio Gabriel Bocalon Flauzino
Daniele da Silva Ferreira
Lizandra Guidi Magalhães
Patrícia Mendonça Pauletti
Ana Helena Januário
Márcio Luis Andrade e Silva
Wilson Roberto Cunha

DOI 10.22533/at.ed.80519071010

CAPÍTULO 11 115

ESTUDO SOBRE R&R PARA PRODUTOS DO LABORATÓRIO PILOTO DE QUÍMICA INDUSTRIAL

Karina da Silva Falcão
Lígia de Oliveira Franzosi Bessa
Manoel Teodoro da Silva
Renata Rayane da Silva Santana

DOI 10.22533/at.ed.80519071011

CAPÍTULO 12 123

SÍNTESE ORGÂNICA, INORGÂNICA E DE NANOMATERIAIS ASSISTIDA POR MICRO-ONDAS:
UMA MINI REVISÃO

Jorddy Neves Cruz
Sebastião Gomes Silva
Fernanda Wariss Figueiredo Bezerra
Oberdan Oliveira Ferreira
Jose de Arimateia Rodrigues do Rego
Marcos Enê Chaves Oliveira
Daniel Santiago Pereira
Antonio Pedro da Silva Souza Filho
Eloisa Helena de Aguiar Andrade
Mozaniel Santana de Oliveira

DOI 10.22533/at.ed.80519071012

CAPÍTULO 13 132

PROJETO DE RECUPERAÇÃO, REUSO E RESTAURAÇÃO DE ÁREA DEGRADADA POR MINERAÇÃO DE AGREGADOS PARA PAVIMENTAÇÃO NO MUNICÍPIO DE MORRO REDONDO/RS

Thiago Feijó Bom
Pedro Andrade Coelho
Matheus Acosta Flores
Angélica Cirolini
Alexandre Felipe Bruch
Marciano Carneiro

DOI 10.22533/at.ed.80519071013

CAPÍTULO 14 145

AHP – PROPOSTA PARA APLICAÇÃO NO GERENCIAMENTO DE RCC EM CANTEIROS DE OBRAS VERTICAIS E ALGUNS ASPETOS DIVERGENTES

Romão Manuel Leitão Carrapato Direitinho
José da Costa Marques Neto
Rodrigo Eduardo Córdoba

DOI 10.22533/at.ed.80519071014

CAPÍTULO 15 158

COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE NIVELAMENTO GEOMÉTRICO, TRIGONOMÉTRICO E POR GNSS EM UMA RODOVIA

Kézia de Castro Alves
Francisca Vieira Nunes
Guilherme Ferreira Gonçalves
Fábio Campos Macedo
Pedro Rogério Giongo

DOI 10.22533/at.ed.80519071015

CAPÍTULO 16 166

USO DE SENSORIAMENTO REMOTO ORBITAL NO MAPEAMENTO DA VARIABILIDADE ESPACIAL DE MILHETO

Antônio Aldisio Carlos Júnior
Neyton de Oliveira Miranda
Jonatan Levi Ferreira de Medeiros
Suedêmio de Lima Silva
Paulo César Moura da Silva
Erllan Tavares Costa Leitão
Ana Beatriz Alves de Araújo
Priscila Pascali da Costa Bandeira
Poliana Maria da Costa Bandeira
Gleydson de Freitas Silva
Isaac Alves da Silva Freitas
Thaís Cristina de Souza Lopes

DOI 10.22533/at.ed.80519071016

CAPÍTULO 17 179

A EDUCAÇÃO BRASILEIRA E SUAS VERTENTES ECONÔMICAS

Gustavo Tavares Corte
Beatriz Valentim Mendes
Steven Dutt-Ross

DOI 10.22533/at.ed.80519071017

CAPÍTULO 18	189
SABERES INFORMAIS SOBRE CIÊNCIAS COMO PONTE PARA O CONHECIMENTO FORMAL	
Deíne Bispo Miranda	
Paulo Coelho Dias	
Maria Cristina Madeira Da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.80519071018	
CAPÍTULO 19	199
CLUBE DE CIÊNCIAS: RELATO DE EXPERIÊNCIAS E IMPRESSÕES DOS ALUNOS	
Teresinha Guida Miranda	
Alice Silau Amoury Neta	
Jussara da Silva Nascimento Araújo	
Danielle Rodrigues Monteiro da Costa	
Normando José Queiroz Viana	
Alessandra de Rezende Ramos	
DOI 10.22533/at.ed.80519071019	
CAPÍTULO 20	212
O USO DE REALIDADE VIRTUAL NO ENSINO DE CIÊNCIAS COMO FACILITADORA NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM: UMA ABORDAGEM NEUROCIENTÍFICA COGNITIVA NOS TEMAS DE CIÊNCIAS	
Welberth Stefan Santana Cordeiro	
Zara Faria Sobrinha Guimarães	
DOI 10.22533/at.ed.80519071020	
CAPÍTULO 21	222
CRIPTOMOEDAS E UMA APLICAÇÃO PARA MODELOS LINEARES HIPERBÓLICOS	
Lucas José Gonçalves Freitas	
Marcelo dos Santos Ventura	
DOI 10.22533/at.ed.80519071021	
CAPÍTULO 22	226
O TEOREMA DA COMPLETUDE	
Angela Leite Moreno	
Michele Martins Lopes	
DOI 10.22533/at.ed.80519071022	
CAPÍTULO 23	243
REGRESSÃO POLINOMIAL DE TERCEIRA ORDEM NA DEFORMAÇÃO DE ELÁSTICOS DE BORRACHA	
Thales Cerqueira Mendes	
Yasmim Brasileiro de Castro Monteiro	
Luana da Silva Souza	
Lívia Nildete Barauna dos Santos	
Ester Vitória Lopes dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.80519071023	

CAPÍTULO 24 254

PICTOGRAMA: ELABORAÇÃO EM LINGUAGEM R

Willian Alves Lion

Beatriz de Oliveira Rodrigues

Felipe de Melo Taveira

Flávio Bittencourt

Adriana Dias

DOI 10.22533/at.ed.80519071024

SOBRE OS ORGANIZADORES..... 265

ÍNDICE REMISSIVO 266

O TEOREMA DA COMPLETUDE

Angela Leite Moreno

Departamento de Matemática, Instituto de
Ciências Exatas

Universidade Federal de Alfenas – Alfenas – MG.

Michele Martins Lopes

Departamento de Matemática Aplicada, IMECC

Universidade Estadual de Campinas – Campinas
– SP.

RESUMO: Neste trabalho apresentamos detalhadamente o Teorema da Completude, que diz que, dado um espaço métrico qualquer, podemos encontrar um outro espaço métrico de tal modo que o primeiro esteja densamente imerso no segundo, sendo que a métrica utilizada no segundo é similar quando levamos em conta apenas os elementos do primeiro espaço. A importância desse resultado reside no fato de que, a hipótese de um espaço ser completo é essencial para alguns resultados, como do Teorema do Ponto Fixo, do Princípio da Contração de Banach, do Teorema de Baire, do Teorema de Banach-Steinhaus, do Teorema de Banach-Steinhaus #2, entre tantos outros resultados cuja hipótese de completude do espaço métrico é essencial.

PALAVRAS-CHAVE: Análise Funcional, Espaços Métricos, Espaços Métricos Completos, Sequências de Cauchy.

ABSTRACT: In this work we present in detail the Completeness Theorem, which says that given any metric space we can find another metric space such that the former is densely immersed in the second, and the metric used in the second is similar when we take into account only the elements of the first space. The importance of this result lies in the fact that the hypothesis of being complete is essential in some results such as the Fixed Point Theorem, Banach's Contraction Principle, Baire's Theorem, Banach-Steinhaus Theorem, Banach's Theorem-Steinhaus# 2, among many other results whose hypothesis of completeness of metric space is essential.

KEYWORDS: Functional Analysis, Metric Spaces, Complete Metric Spaces, Cauchy Sequences.

1 | INTRODUÇÃO

A Análise Funcional é um ramo da Matemática Abstrata que se originou da Análise Clássica, sendo que os métodos e resultados analíticos funcionais são importantes em vários campos da Matemática e suas aplicações. Seu desenvolvimento se deu através de problemas de Álgebra Linear, Equações Diferenciais Ordinárias, Cálculo de Variações, Teoria da Aproximação e, em especial, das Equações Integrais Lineares.

Ao observar problemas de diferentes campos de aplicação, matemáticos perceberam que estes desfrutam de características e propriedades que estão relacionadas entre si. Deste modo, no lugar de se trabalhar com cada problema individualmente, pode-se utilizar uma abordagem mais abstrata, na qual detalhes não essenciais são omitidos. Assim, uma grande vantagem da abordagem abstrata está no fato de se concentrar apenas nos fatos essenciais, cuja atenção do pesquisador não é perturbada por fatos irrelevantes. Deste modo, o método se torna mais simples e econômico para tratar sistemas matemáticos, além de uma maior aplicabilidade a diversos problemas.

A abordagem abstrata normalmente se inicia com um conjunto de axiomas, de forma que não é necessário se preocupar com a natureza dos elementos que estão sendo trabalhados. A teoria consiste em sequências lógicas que decorrem destes axiomas, então são elencados teoremas, proposições e lemas que servem de base para diversas aplicações, pois não foi preciso se preocupar com as limitações destas aplicações no momento de elencá-los.

Como o estudo de espaços métricos é essencial na Análise Funcional, pois estes desempenham um papel similar ao representando pela reta real no Cálculo, além de fornecer uma base para o estudo da área. Assim, esses espaços generalizam a reta e foram elaborados para possibilitar o tratamento, de modo unificado, problemas importantes de vários ramos da Análise.

Um espaço métrico é um conjunto sobre o qual definimos uma função que mede a “distância” entre seus elementos. Essa distância, aqui denominada métrica, é definida por axiomas que são sugeridos devido à certas propriedades básicas sobre distâncias entre pontos da reta. Deste modo, iniciamos definindo espaços métricos e apresentando alguns resultados e exemplos mais utilizados, para mostrarmos que podemos mudar o modo como calculamos as distâncias dentro de um espaço e, com isso, alterar algumas propriedades dele, conforme seja conveniente.

O foco deste trabalho é discutir a completude de um espaço métrico: uma propriedade que o espaço pode ou não ter, mas que é essencial ao desenvolvimento da Análise Funcional. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar o Teorema da Completude, que diz que qualquer espaço métrico pode ser densamente imerso em um outro que seja completo.

2 | ESPAÇOS MÉTRICOS

Do mesmo modo como calculamos distâncias dentro do conjunto dos números reais, este conceito pode ser estendido para qualquer espaço desde que esteja associado a uma função cujo contradomínio é o conjunto dos números reais positivos que satisfaça algumas características. Mas, quais características uma função deve satisfazer para ser considerada uma distância? Assim temos nossa primeira definição:

Definição 1 (Distância ou Métrica): Suponhamos que X seja um conjunto não vazio.

Diremos que uma função $\rho: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ é uma distância ou métrica sobre se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

- (i) Para todo $a \in X$ temos que $\rho(a, a) = 0$.
- (ii) Para quaisquer $a, b \in X$ se que $\rho(a, b) = 0$, então $a=b$
- (iii) *Simetria*: Para quaisquer $a, b \in X$ se que $\rho(a, b) = \rho(b, a)$.
- (iii) *Desigualdade Triangular*: Para quaisquer $a, b \in X$ temos que

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b).$$

Diremos que um par ordenado (X, ρ) é um *espaço métrico* se X for um conjunto e $\rho: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ for uma métrica sobre X .

Notemos que, a partir da Desigualdade Triangular, obtemos a Desigualdade Triangular Generalizada:

$$\rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \dots + \rho(x_{n-1}, x_n).$$

Um subespaço (Y, ρ) de (X, ρ) é obtido ao tomarmos um subconjunto $Y \subset X$ e a restrição de ρ a $Y \times Y$. Assim a métrica em Y é a restrição $\tilde{\rho} = \rho|_{Y \times Y}$.

Assim, temos que $\tilde{\rho}$ é a métrica induzida em Y por ρ .

Exemplo 1 A reta real. Aqui, consideramos o conjunto dos números reais \mathbb{R} munido da métrica usual:

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Observe no exemplo a seguir que um mesmo espaço pode ter diferentes métricas e, com isso, temos diferentes espaços métricos:

Exemplo 2. O Plano Euclidiano \mathbb{R}^2 . Ao considerarmos no Plano Euclidiano os pontos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, temos que a métrica euclidiana é dada por

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Também podemos considerar a métrica do módulo:

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Ou, ainda, a métrica do máximo:

$$\rho_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

Mas também podemos usar a métrica discreta:

$$\rho_{01}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) = (y_1, y_2), \\ 0, & (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2). \end{cases}$$

Entretanto, os espaços podem ser bem mais gerais:

Exemplo 3 Espaço das sequências reais. Seja S o conjunto das sequências de números reais e definamos sobre S a seguinte função

$$\rho((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

é um espaço métrico.

Exemplo 4 Espaço das sequências limitadas ℓ^∞ Seja ℓ^∞ o conjunto das sequências limitadas de números reais, assim

$$\ell^\infty = \{(x_n) : \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}.$$

Em ℓ^∞ definimos a seguinte distância

$$\rho((x_j), (y_j)) = \sup\{|x_j - y_j| : j = 1, 2, \dots\}.$$

(ℓ^∞, ρ) é um espaço métrico.

Exemplo 5 Espaço ℓ^p Suponhamos que $p > 1$ Definimos o espaço ℓ^p o sendo o conjunto

$$\ell^p = \left\{ (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Em ℓ^p definimos a seguinte distância

$$\rho((x_n), (y_n)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}.$$

(ℓ^p, ρ) é um espaço métrico.

No caso em que $p=2$ temos um espaço que foi introduzido e estudado por D. Hilbert em 1912. Este espaço está relacionado com equações integrais e é denominado Espaço de Hilbert.

Exemplo 6 Espaços das Funções $C[a, b]$ O conjunto de todas as funções reais contínuas do intervalo fechado $[a, b]$, denotado por $C[a, b]$, dado por $C[a, b] = \{f: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ é contínua}\}$, com a métrica

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)|: x \in [a, b]\}$$

é um espaço métrico.

3 | CONJUNTOS ABERTOS E CONJUNTOS FECHADOS

Para seguirmos as discussões precisamos dos conceitos de conjuntos abertos e conjuntos fechados. Para isso, veremos algumas definições auxiliares.

Definição 3 (Bola Aberta em um Espaço Métrico) Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico, que $a \in X$ e que $r > 0$ seja um número real. Diremos que o conjunto $B(a, r) = \{x \in X: \rho(a, x) < r\}$ é uma bola aberta com centro em a e raio r .

Definição 4 (Bola Fechada em um Espaço Métrico) Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico, que $a \in X$ e que $r > 0$. Diremos que o conjunto $B[a, r] = \{x \in X: \rho(a, x) \leq r\}$ é uma bola fechada com centro em a e raio r .

Definição 5 (Conjunto Aberto em um Espaço Métrico) Suponhamos que (X, ρ) métrico e A um subconjunto de X . Diremos que A é aberto se, dado $x_0 \in A$ existir , $r > 0$, $r = r(x_0)$, tal que $B(x_0, r) \subset A$.

Observação 1 Suponhamos que X seja um espaço métrico. Não é difícil provarmos alguns resultados, por isso não os mostraremos aqui:

1. A união de dois conjuntos abertos em X é um conjunto aberto em X .
2. A interseção de dois conjuntos abertos em X é um conjunto aberto em X .
3. A união qualquer de conjuntos abertos em X é um conjunto aberto em X .
4. A interseção finita de conjuntos abertos em X é um conjunto aberto em X .

Definição 6 (Conjunto Fechado em um Espaço Métrico) Suponhamos que (X, ρ) métrico e F um subconjunto de X . Diremos que F é fechado se F^c for aberto em (X, ρ) .

Observação 2 Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico. Do mesmo modo temos que:

1. A união de dois conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X .
2. A interseção de dois conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X .
3. A união finita conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X .
4. A interseção qualquer de conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X .

Definição 7 (Interior de um Conjunto) Sejam (X,p) um espaço métrico e A um subconjunto de X . O interior do conjunto A , denotado por $\text{int } A$, é o conjunto dos pontos $x_0 \in X$ com a seguinte característica: existe $r > 0$, $r = r(x_0)$, tal que $B(x_0, r) \subset A$. Em outras palavras, é o maior aberto contido em A , ou seja, é a união de todos os abertos de (X,p) contidos em A .

Definição 8 (Fecho de um Conjunto) Sejam (X,p) um espaço métrico e A um subconjunto de X . O fecho do conjunto A , denotado por \bar{A} , é o conjunto de todos os pontos $x_0 \in X$ com a seguinte propriedade: para qualquer $r > 0$, $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

4 | CONVERGÊNCIA EM ESPAÇOS MÉTRICOS

As sequências desempenham um papel importante dentro da Análise Matemática, sendo que é a métrica dentro do conjunto dos números reais que nos permite definir o conceito de convergência. Vejamos como isso acontece:

Definição 11 (Sequência Convergente) Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico e que (x_n) seja uma sequência em (X,p) . Diremos que (x_n) converge para $x \in X$ se $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Quando (x_n) não for convergente diremos que (x_n) diverge.

Definição 12 (Conjunto Limitado e Sequência Limitada) Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico. Diremos que um subconjunto $M \subset X$ é limitado se seu diâmetro, dado por $\delta(M) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in M\}$ for finito. Ao considerarmos uma sequência (x_n) em (X,p) diremos que (x_n) é limitada se o conjunto de pontos correspondentes for um subconjunto limitado de X .

Segue diretamente da definição que, quando uma sequência for limitada existirão um real positivo r e um $x_0 \in X$, tais que $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset B(x_0, r)$.

Lema 1 Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico.

- a) Toda sequência convergente é limitada e seu limite é único.
- b) Se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ em X , então $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y)$.

Para definirmos completude, precisamos de uma propriedade adicional que um espaço métrico pode ou não ter, que tornará os espaços métricos completos muito mais interessantes e simples do que os espaços métricos não completos.

Definição 11 (Sequência de Cauchy) Suponhamos que (X,p) seja um espaço métrico e que $\{x_n\}$ seja uma sequência em (X,p) . Diremos que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy, ou simplesmente de Cauchy, se, dado $\varepsilon > 0$ existir um $n_0 > 0$ tal que $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, para quaisquer $m, n > n_0$.

Os espaços que têm a propriedade de todas as sequências de Cauchy serem convergentes são importantes na organização do espaço e é denominada de

completude. Deste modo temos a seguinte definição:

Definição 12 (Espaço Métrico Completo) Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico. Diremos que (X, ρ) é um espaço métrico completo, ou simplesmente completo, quando toda sequência de Cauchy de (X, ρ) for convergente.

Os espaços métricos \mathbb{R} e \mathbb{C} são espaços métricos completos. Já o espaço métrico \mathbb{Q} não é um espaço métrico completo, pois podemos construir sequências de números racionais que convergem para um número irracional.

Note que, dentro de um espaço métrico completo podemos tomar subespaços completos e subespaços incompletos. Por exemplo, o subespaço $[0, 1]$ é completo enquanto que o subespaço $(0, 1]$ é incompleto – tome a sequência $(\frac{1}{n})$ em $(0, 1]$ e observe que $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin (0, 1]$.

Exemplo 7 $(C[a, b], \rho)$ é completo.

Com efeito, seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $C[a, b]$, então dado $\varepsilon > 0$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\rho(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

para quaisquer $m, n > n_0$, isto é,

$$\max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

para quaisquer $m, n > n_0$. Em particular temos que

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

para todo $t \in [a, b]$ e para quaisquer $m, n > n_0$. Assim temos que a sequência (f_n) é de Cauchy em \mathbb{R} , para cada $t \in [a, b]$ fixo. Como \mathbb{R} é completo, para cada $t \in [a, b]$ temos que

$$f_n(t) \rightarrow f(t).$$

Considerando a função assim definida precisamos mostrar que $f_n \rightarrow f$ e que $f \in C[a, b]$.

Afirmção 1 $f \in C[a, b]$.

De fato, dado $t_0 \in [a, b]$, temos que

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(t_0)| + |f_n(t_0) - f(t_0)|,$$

Como $f_n(t) \rightarrow f(t)$, segue que existem $n_1, n_2 > 0$ tais que

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n > n_1$, e

$$|f_n(t_0) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n > n_2$. Além disso, pela continuidade de f_n temos que existe $\delta > 0$ tal que se $|t - t_0| < \delta$, então

$$|f_n(t_0) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n > n_2$. Logo, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ da primeira desigualdade segue que, se $|t - t_0| < \delta$, então

$$|f(t) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$, com $t, t_0 \in [a, b]$. Portanto f é contínua.

Afirmção 2: $f_n \rightarrow f$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(f_n, f) = \max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. Para isto basta considerarmos que

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

para quaisquer $n > n_0$ e $t \in [a, b]$. Como (f_n) é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(f_n, f_m) = \max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para quaisquer $m, n > n_0$. Em particular

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para quaisquer $m, n > n_0$ e $t \in [a, b]$. Agora, tomando t fixo e fazendo $m \rightarrow \infty$ temos que

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para quaisquer $n > n_0$ e $t \in [a, b]$. Logo

$$\rho(f_n, f) = \max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$ e $\varepsilon > 0$ dado. Portanto $C[a, b]$ é completo. ■

Porém se alterarmos a métrica pode haver alterações no espaço. Para isto basta tomarmos o mesmo espaço acima com uma outra métrica.

Exemplo 8 ($C[-1, 1], \rho_1$) não é completo, em que $\rho_1(f, g) = \int_{-1}^1 |f(t) - g(t)| dt$.

Com efeito, consideremos em $(C[-1, 1], \rho_1)$ a sequência de funções

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq 0, \\ nt, & 0 < t < \frac{1}{n}, \\ 1, & t = 1, \end{cases}$$

cujo gráfico é dado na Figura 1:

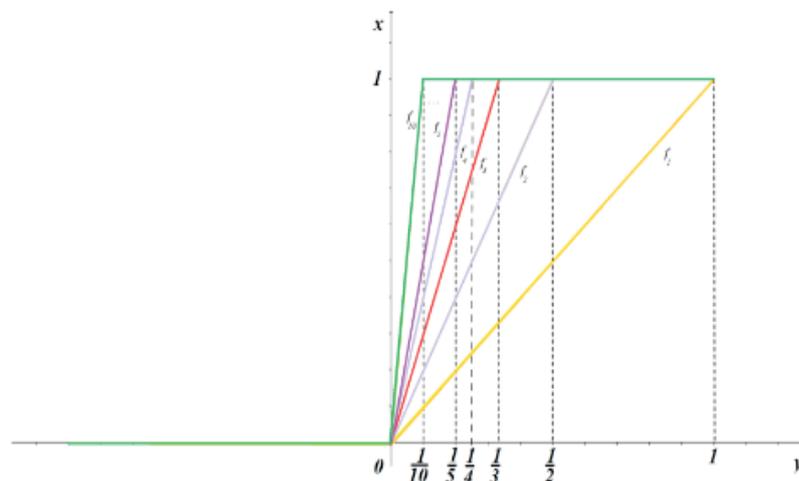


Figura 1- Sequência de funções

Primeiramente provaremos que a sequência (f_n) é de Cauchy, ou seja, que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho_1(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$, ou seja, que, para todo $n > n_0$,

$$\int_{-1}^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt < \varepsilon,$$

De fato, para verificarmos que a sequência f_n é de Cauchy, tomemos $\varepsilon > 0$ e consideremos $m < n$, pois, com isso, teremos que

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{m},$$

daí

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt &\leq \int_{-1}^0 |f_n(t) - f_m(t)| dt + \\ &+ \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - f_m(t)| dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |f_n(t) - f_m(t)| dt + \int_{\frac{1}{m}}^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt \\ &= \int_{-1}^0 |0 - 0| dt + \int_0^{\frac{1}{n}} |nt - mt| dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |1 - mt| dt + \int_{\frac{1}{m}}^1 |1 - 1| dt \\ &\leq (n - m) \int_0^{\frac{1}{n}} t dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |1 - mt| dt = (n - m) \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{n}} + \left[t - \frac{mt^2}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

Fazendo $m, n \rightarrow \infty$ temos que

$$\int_{-1}^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt \rightarrow 0.$$

Assim,

$$\int_{-1}^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt < \varepsilon,$$

para m e n suficientemente grandes. Logo existe $n_0 > 0$ tal que

$$\int_{-1}^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt < \varepsilon,$$

para quaisquer $m, n > n_0$. Portanto $f_n(t)$ é de Cauchy.

Essa sequência é de Cauchy, porém ela é converge para uma função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1, & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

que, como podemos perceber na Figura 2, não é contínua.

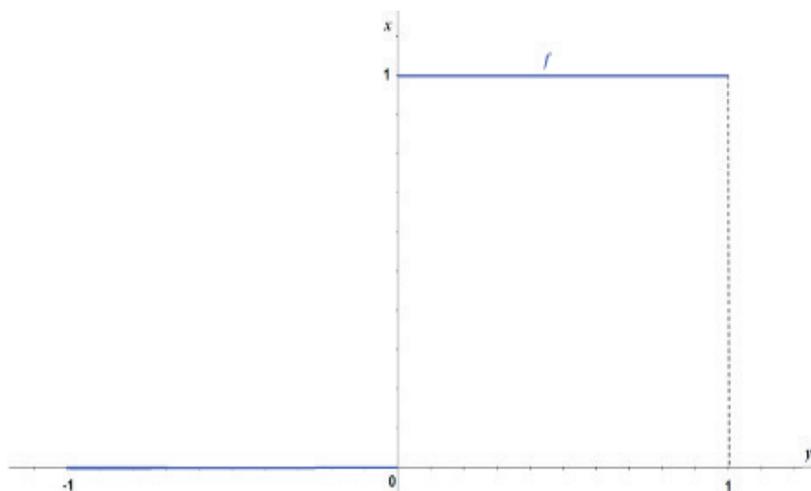


Figura 2 - Gráfico da função f .

Portanto o espaço $(C[-1,1], \rho_1)$ não é completo com esta métrica. ■

A propriedade de completude é importante para demonstrarmos diversos resultados. Assim, a pergunta que se coloca é: Será que, dado um espaço métrico (X, ρ) é possível completá-lo? Ou ainda: será que é possível encontrarmos um espaço métrico completo que possua uma métrica que preserve as distâncias de ρ na qual o espaço X esteja imerso? Para respondermos a essas perguntas precisamos de alguns conceitos adicionais:

Definição 13 (Isometria) Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos. Diremos que a aplicação $T: (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ é uma isometria se

$$\sigma(T(x_1), T(x_2)) = \rho(x_1, x_2),$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in X$. Neste caso diremos que (X, ρ) e (Y, σ) são isométricos.

Agora temos condições de provar que todo espaço métrico está densamente imerso em um espaço métrico completo. Como sua demonstração é bem complexa, iremos dividir a prova em oito partes.

Teorema 1: Seja (X, ρ) um espaço métrico. Então existe um espaço métrico completo $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ e $W \subset \tilde{X}$ tais que $(W, \tilde{\rho})$ é isométrico a (X, ρ) e W é denso em $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$. Além disso, se $(\bar{X}, \bar{\rho})$ for outro espaço métrico completo com subconjunto W' tal que $(W', \bar{\rho})$ for isométrico a (X, ρ) e W' for denso em $(\bar{X}, \bar{\rho})$ então $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ e $(\bar{X}, \bar{\rho})$ serão isométricos.

Demonstração: Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico.

Iremos construir um espaço métrico completo $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ a partir de (X, ρ) de modo que (X, ρ) esteja densamente imerso em $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$

Como já vimos, \mathbb{R} munido com a métrica usual é um espaço métrico completo.

Seja S o conjunto de todas as seqüências de Cauchy em X e consideremos a seguinte relação sobre S :

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \rho(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Afirmação 1: \sim é uma relação de equivalência sobre S

Com efeito,

- Reflexiva: Para qualquer sequência (x_n) em X temos que

$$\rho(x_n, x_n) = 0,$$

daí $\rho(x_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e, daí, $(x_n) \sim (x_n)$. Portanto \sim é reflexiva.

- Simétrica: Para quaisquer sequências (x_n) e (y_n) em X tais que $(x_n) \sim (y_n)$, temos que

$$\rho(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

mas $\rho(x_n, y_n) = \rho(y_n, x_n)$, daí,

$$\rho(y_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

e, assim, $(y_n) \sim (x_n)$. Portanto \sim é simétrica.

- Transitiva: Para quaisquer sequências (x_n) , (y_n) e (z_n) em X tais que $(x_n) \sim (y_n)$ e $(y_n) \sim (z_n)$, temos que

$$\rho(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{e} \quad \rho(y_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

assim, dado $\varepsilon > 0$ existem índices n_1 e n_2 tais que

$$\rho(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n \geq n_1$, e

$$\rho(y_n, z_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n \geq n_2$. Assim, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e utilizando a Desigualdade Triangular segue, para todo $n \geq n_0$, que

$$\rho(x_n, z_n) \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Assim $\rho(x_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e, daí $(x_n) \sim (z_n)$. Portanto \sim é transitiva.

Como é reflexiva, simétrica e transitiva segue que \sim é uma relação de equivalência.

Como toda relação de equivalência determina uma partição, consideremos \tilde{X} o conjunto de todas as classes de equivalência de S .

Notemos que, para cada $x \in X$ temos que a sequência (x, x, x, \dots) é uma sequência de Cauchy em X e, portanto existe uma classe de equivalência em \tilde{X} tal que x pertence a esta classe. Assim, a partir de agora, designaremos a classe a qual x pertence por $a(x)$.

Observemos também que, se tivermos $(x_n), (y_n) \in \tilde{X}$ então $\rho(x_n, y_n)$ será uma sequência de Cauchy de números reais, pois

$$\begin{aligned} |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| &= |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y_m) + \rho(x_n, y_m) - \rho(x_m, y_m)| \\ &\leq |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y_m)| + |\rho(x_n, y_m) - \rho(x_m, y_m)| \\ &\leq |\rho(y_n, y_m)| + |\rho(x_n, x_m)| \end{aligned}$$

e, como $(x_n), (y_n) \in X$, segue que

$$\rho(x_n, x_m) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{e} \quad \rho(y_n, y_m) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

e, assim $(\rho(x_n, y_n))$ é de Cauchy e, como \mathbb{R} é completo segue que $(\rho(x_n, y_n))$ é convergente.

Defina sobre \tilde{X} a aplicação $\tilde{\rho}: \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\rho}(\alpha, \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$$

em que $(x_n) \in \alpha$ e $(y_n) \in \beta$.

Afirmção 2: $\tilde{\rho}$ está bem definida, ou seja, $\tilde{\rho}(\alpha, \beta)$ independe da escolha de $(x_n) \in \alpha$ e $(y_n) \in \beta$.

De fato, sejam $(x_n), (x'_n) \in \alpha$ e $(y_n), (y'_n) \in \beta$, então

$$(x_n) \sim (x'_n) \quad \text{e} \quad (y_n) \sim (y'_n),$$

daí,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x'_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y'_n) = 0.$$

Notemos, pela Desigualdade Triangular, que

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(x'_n, y'_n) + \rho(y'_n, y_n)$$

Assim, passando o limite, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x'_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y'_n, y_n)$$

e, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y'_n) = 0$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n)$$

Analogamente, provamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$$

Logo temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n)$$

Deste modo temos que $\tilde{\rho}$ não depende da escolha de $(x_n) \in \alpha$ e $(y_n) \in \beta$.

Afirmção 3: $\tilde{\rho}$ é uma métrica em \tilde{X} .

Com efeito.

- Notemos que, para qualquer $\alpha \in \tilde{X}$, temos

$$\tilde{\rho}(\alpha, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

em que $(x_n) \in \alpha$.

- Para quaisquer $\alpha, \beta \in \tilde{X}$, suponhamos que $\tilde{\rho}(\alpha, \beta) = 0$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0,$$

em que $(x_n) \in \alpha$ e $(y_n) \in \beta$. Mas isto nos leva a $\alpha = \beta$ devido ao fato de $\tilde{\rho}$ estar bem definida.

- Suponhamos que $\alpha, \beta \in \tilde{X}$, com $(x_n) \in \alpha$ e $(y_n) \in \beta$, daí,

$$\tilde{\rho}(\alpha, \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, x_n) = \tilde{\rho}(\beta, \alpha).$$

Portanto, $\tilde{\rho}(\alpha, \beta) = \tilde{\rho}(\beta, \alpha)$.

- Suponhamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \tilde{X}$, com $(x_n) \in \alpha$, $(y_n) \in \beta$ e $(z_n) \in \gamma$, então

Portanto,

$$\tilde{\rho}(\alpha, \beta) \leq \tilde{\rho}(\alpha, \gamma) + \tilde{\rho}(\gamma, \beta).$$

Portanto $\tilde{\rho}$ é uma métrica sobre \tilde{X} .

Afirmção 4: O espaço métrico $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ é completo.

De fato, se (x^k) for uma sequência de Cauchy em \tilde{X} então tomemos $x \ni x^k = (x_n^k) \in \tilde{x}^k$. Temos que

$$\tilde{\rho}(x^k, x^l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n^k, x_n^l).$$

Agora, como $x^k = (x_n^k)$ é uma sequência de Cauchy, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um $n_k \in \mathbb{N}$, com $n_k > k$, tal que

$$\tilde{\rho}(x_{n_k}^k, x_{n_l}^l) < \frac{1}{k}$$

para todo $n \geq n_k$. Escolhemos $x = (x_{n_k}^k)$.

Afirmção 5: x é uma sequência de Cauchy.

Com efeito, se y^k for a sequência constante $(x_{n_k}^k, x_{n_k}^k, x_{n_k}^k, x_{n_k}^k, \dots)$ e $\tilde{y}^k = [y^k]$ temos que

$$\rho(x_{n_k}^k, x_{n_l}^l) = \tilde{\rho}(y^k, \tilde{y}^l) \leq \tilde{\rho}(y^k, x^k) + \tilde{\rho}(x^k, x^l) + \tilde{\rho}(x^l, \tilde{y}^l) \leq \frac{1}{k} + \tilde{\rho}(x^k, x^l) + \frac{1}{l}$$

Assim

$$\rho(x_{n_k}^k, x_{n_l}^l) \xrightarrow{k, l \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto podemos tomar \tilde{x} a classe de equivalência de x .

Afirmção 6: $\tilde{\rho}(x_l, \tilde{x}) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$.

De fato, temos que

$$\tilde{\rho}(x_l, \tilde{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_l^l, x_{n_k}^k)$$

e que, dado $\varepsilon > 0$ existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \rho(x_{n_l}^l, x_{n_k}^k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $l, k \geq n_0$. Tomando $l \geq n_0$ e $k = \max\{n_0, n_l\}$, temos que

$$\rho(x_k^l, x_{n_k}^k) \leq \rho(x_k^l, x_{n_l}^l) + \rho(x_{n_l}^l, x_{n_k}^k) < \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Logo,

$$\tilde{\rho}(x_l, \tilde{x}) < \varepsilon,$$

para $l \geq n_0$ e, assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(x_n, \tilde{x}) = 0.$$

Agora, seja

$$\tilde{X}_0 = \{[(x)]: x \in X\} \subset \tilde{X}$$

e consideremos a aplicação $T: X \rightarrow \tilde{X}$ dada por

$$T(x) = [(x)].$$

Claramente temos que T é uma isometria de X em \tilde{X} .

Afirmção 7: \tilde{X}_0 é denso em \tilde{X} .

Com efeito, se $\tilde{x} = [(x)] \in \tilde{X}$ então tomemos a sequência em \tilde{X}_0 dada por $\tilde{x}_n = [(x_n, x_n, x_n, \dots)]$. Notemos que, como (x_n) é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

para quaisquer $m, n > n_0$. Assim

$$\tilde{\rho}(x_n, \tilde{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon,$$

para quaisquer $m, n > n_0$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(x_n, \tilde{x}) = 0.$$

Afirmação 8: \tilde{X} é único, a menos de isometria.

De fato, suponhamos que existam \tilde{X} e \bar{X} espaços métricos completos e isometrias $T: X \rightarrow \tilde{X}$ e $U: X \rightarrow \bar{X}$, cujas imagens sejam densas. Definamos

$$V = U \circ T^{-1}: \tilde{X} \rightarrow \bar{X}.$$

Como U e T são isometrias, segue que $U \circ T^{-1}$ é uma isometria e, portanto, \tilde{X} e \bar{X} são isométricos. ■

Com isso temos que qualquer espaço métrico está densamente imerso em um espaço métrico completo. Note que os espaços (X, ρ) e $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ são isométricos, ou seja, calcular a distância em um espaço é o mesmo que calcular a distância em outro espaço.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, A. N. **Análise I**. Notas de Aula. São Carlos: ICMC, 2007. Disponível em <<http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/analise.pdf>>. Acesso em: 17 out 2016.

HÖNIG, C. S. *Aplicações da Topologia à Análise*. 1ª ed. IMPA. Rio de Janeiro, 1976.

HÖNIG, C. S. **Análise Matemática**, IME/USP, 1987.

KREYSIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. John Wiley & Sons. Inc, 1978.

MUNKRES, J. R. **Topology**, 2 ed, Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

NACHBIN, L. **Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial**, Série de Matemática - monografia no. 17. Washington D. C.: The General Secretariat of the Organization of American States, 1976.

SOBRE OS ORGANIZADORES

Júlio César Ribeiro - Engenheiro-Agrônomo formado pela Universidade de Taubaté - SP (UNITAU); Técnico Agrícola pela Fundação Roge - MG; Mestre em Tecnologia Ambiental pela Universidade Federal Fluminense (UFF); Doutor em Agronomia - Ciência do Solo pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Pós-Doutorado no Laboratório de Estudos das Relações Solo-Planta do Departamento de Solos da UFRRJ. Possui experiência na área de Agronomia (Ciência do Solo), com ênfase em ciclagem de nutrientes, nutrição mineral de plantas, fertilidade, química e poluição do solo, manejo e conservação do solo, e tecnologia ambiental voltada para o aproveitamento de resíduos da indústria de energia na agricultura. E-mail para contato: jcragronomo@gmail.com

Carlos Antônio dos Santos - Engenheiro-Agrônomo formado pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica - RJ; Especialista em Educação Profissional e Tecnológica pela Faculdade de Educação São Luís, Jaboaticabal-SP; Mestre em Fitotecnia pela UFRRJ. Atualmente é Doutorando em Fitotecnia na mesma instituição e desenvolve trabalhos com ênfase nos seguintes temas: Produção Vegetal, Horticultura, Manejo de Doenças de Hortaliças. E-mail para contato: carlosantoniokds@gmail.com

ÍNDICE REMISSIVO

A

Açúcares 25, 26, 28, 34, 81, 82, 83, 84, 85, 87

Agricultura de precisão 7, 167

Água residuária 10, 11, 20

AHP 145, 146, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157

Algaroba 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88

Amostragem em suspensão 24, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33

Análise 1, 2, 3, 6, 10, 16, 17, 19, 22, 23, 24, 27, 32, 33, 37, 38, 39, 42, 47, 48, 49, 50, 51, 57, 58, 60, 61, 65, 66, 67, 70, 82, 95, 96, 99, 101, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 116, 117, 119, 127, 138, 140, 144, 157, 163, 165, 170, 171, 172, 179, 180, 183, 184, 190, 194, 196, 197, 198, 199, 206, 207, 211, 219, 221, 226, 227, 231, 242, 246

Análise envoltória de dados 58, 60, 67

Análise funcional 226, 227, 242

Artocarpus altilis 89, 90, 91, 92, 94, 96, 97, 99, 100

Atividade antiparasitária 102

Avanços 78, 123, 202, 213

B

Bitcoin 222, 223, 224, 225

C

Canteiros de obras 145, 146, 155, 156

Celulose 58, 59, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 72, 75, 76, 77, 78, 79, 126

Chuva 36, 37, 38, 39, 41, 42, 45, 47, 76

Ciclo educacional 179, 183

Ciclo vegetativo 7, 49, 53, 55, 56

Códigos linguísticos 189

Commodities 58, 59

Construção civil vertical 145

Curso agrotécnico 189

E

Educação 9, 68, 69, 79, 89, 158, 179, 180, 182, 183, 184, 185, 186, 189, 190, 191, 192, 193, 197, 201, 202, 203, 209, 210, 211, 212, 213, 221, 245, 263, 265

Ensino 67, 92, 179, 180, 182, 183, 185, 186, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 243, 245, 252, 255, 256, 263

Ensino de ciências 189, 200, 201, 209, 211, 212, 214, 215, 217, 218, 219, 220, 221, 252

Espaço não formal 199, 201, 209, 210

Espaços métricos 226, 227, 228, 231, 232, 236, 242
Evapotranspiração 16, 37, 49, 51, 52, 53, 55, 56, 169

F

F AAS 24, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 35
Fitoquímica 90, 99, 100
Fósforo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 14

G

Geoestatística 167, 171
Gerenciamento de RCC 145, 146, 147, 148, 151, 154, 155
Gráficos 117, 119, 254, 255, 256, 263

H

Hymenaea courbaril 101, 102, 104, 105, 112, 113

I

Imagens 135, 136, 137, 166, 167, 168, 169, 170, 172, 173, 176, 177, 217, 242, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261
Índices de vegetação 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 175, 176
Indústria de papel 68, 70, 75
Indústria têxtil 68, 70, 75, 79
Investimento 179, 180, 183, 184, 185, 222

L

Leap-Frog 158, 159, 160
Lei de Hooke 243, 245, 246, 247, 248, 251, 252
Letramento científico 199, 203, 209, 210

M

Medição 115, 116, 117, 118, 119, 121, 122, 160, 161
Melado de cana 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 84
Metais 3, 9, 12, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 126, 176
Meteorologia 36, 37, 39, 53
Micro-ondas 26, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129
Moda sustentável 68, 79
Modelos hiperbólicos 222, 223, 225
Moraceae 89, 90, 91, 100

N

Não-linearidade 243, 251
Nivelamento 74, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165
Nutrição de plantas 1

O

Oportunidade 179, 180, 182, 185, 186, 191, 256

P

Papel 2, 58, 59, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 128, 192, 206, 213, 216, 227, 231, 246, 249

Parâmetros 24, 27, 28, 30, 33, 48, 49, 50, 52, 54, 55, 56, 115, 116, 119, 137, 160, 163, 168, 174, 175, 177, 191, 222, 223, 224, 255, 263

Perímetro irrigado 1, 3, 8

Petróleo 1, 9, 10, 11, 13, 22, 23

Prosopis 81, 82, 87, 88

Q

Química verde 33, 123, 128

R

Recuperação 11, 132, 133, 134, 137, 138, 139, 140, 143, 144

Regressão polinomial 243, 246, 251

Renda 49, 81, 179, 180, 181, 182, 184, 185, 186

Resíduos sólidos 68, 71, 76, 77, 80, 146, 147, 148, 155, 156

Restauração 132, 133, 134, 137, 138, 139, 143, 244, 245

Reuso 10, 22, 71, 72, 80, 132, 133, 137, 138, 140, 141, 142, 143

S

Saneantes 115, 117, 118, 121

Sequências de Cauchy 226

Simbiose industrial 68, 70, 71, 77, 78

Síntese 90, 104, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 220

T

Topografia 138, 139, 143, 158, 159, 165

Trading 222, 223

Trypanosoma cruzi 101, 102, 103, 111, 112

V

Validação de métodos 24, 34

Variáveis 22, 38, 60, 61, 64, 65, 66, 67, 117, 175, 178, 179, 181, 182, 183, 185, 186, 194, 204, 211, 222, 224, 254, 256

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-680-5

