



Cleberton Correia Santos
(Organizador)

**Estudos Interdisciplinares
nas Ciências e da Terra
e Engenharias 5**

Cleberton Correia Santos
(Organizador)

Estudos Interdisciplinares nas Ciências
Exatas e da Terra e Engenharias 5

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.ª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof.ª Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.ª Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
E82	<p>Estudos interdisciplinares nas ciências exatas e da terra e engenharias 5 [recurso eletrônico / Organizador Cleberton Correia Santos. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. – (Estudos Interdisciplinares nas Ciências Exatas e da Terra e Engenharias; v. 5)</p> <p>Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-623-2 DOI 10.22533/at.ed.232191109</p> <p>1. Ciências exatas e da Terra. 2. Engenharias. 3. Tecnologia. I.Santos, Cleberton Correia. II. Série.</p> <p style="text-align: right;">CDD 016.5</p>
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

O livro “Estudos Interdisciplinares nas Ciências Exatas e da Terra e Engenharias” de publicação da Atena Editora apresenta em seu 5º volume 37 capítulos com temáticas voltadas à Educação, Agronomia, Arquitetura, Matemática, Geografia, Ciências, Física, Química, Sistemas de Informação e Engenharias.

No âmbito geral, diversas áreas de atuação no mercado necessitam ser elucidadas e articuladas de modo a ampliar sua aplicabilidade aos setores econômicos e sociais por meio de inovações tecnológicas. Neste volume encontram-se estudos com temáticas variadas, dentre elas: estratégias regionais de inovação, aprendizagem significativa, caracterização fitoquímica de plantas medicinais, gestão de riscos, acessibilidade, análises sensoriais e termodinâmicas, redes neurais e computacionais, entre outras, visando agregar informações e conhecimentos para a sociedade.

Os agradecimentos do Organizador e da Atena Editora aos estimados autores que empenharam-se em desenvolver os trabalhos de qualidade e consistência, visando potencializar o progresso da ciência, tecnologia e informação a fim de estabelecer estratégias e técnicas para as dificuldades dos diversos cenários mundiais.

Espera-se com esse livro incentivar alunos de redes do ensino básico, graduação e pós-graduação, bem como outros pesquisadores de instituições de ensino, pesquisa e extensão ao desenvolvimento estudos de casos e inovações científicas, contribuindo na aprendizagem significativa e desenvolvimento socioeconômico rumo à sustentabilidade e avanços tecnológicos.

Cleberton Correia Santos

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
DETERMINAÇÃO DA ALTURA MANOMÉTRICA DOS SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE FLUIDOS DO REATOR TUBULAR PRESENTE NO MÓDULO DIDÁTICO DE CINÉTICA E CÁLCULO DE REATORES	
Shara Katerine Moreira Jorge Leal Rosilanny Soares Carvalho Daiane Antunes Pinheiro Vitor Soares	
DOI 10.22533/at.ed.2321911091	
CAPÍTULO 2	12
ESTATÍSTICA COMO ELEMENTO NORTEADOR DO TRABALHO COM CONCEITOS MATEMÁTICOS NOS ANOS INICIAIS	
Daiani Finatto Bianchini Cátia Maria Nehring	
DOI 10.22533/at.ed.2321911092	
CAPÍTULO 3	26
AÇÃO CATALÍTICA DO CATALISADOR DE 2ª GERAÇÃO DE GRUBBS NA AUTO-METÁTESE DA PIPERINA	
Aline Aparecida Carvalho França Vanessa Borges Vieira Thais Teixeira da Silva Sâmia Dantas Braga Ludyane Nascimento Costa John Cleiton dos Santos Denise Araújo Sousa Alexandre Diógenes Pereira Benedito dos Santos Lima Neto Francielle Aline Martins José Luiz Silva Sá José Milton Elias de Matos	
DOI 10.22533/at.ed.2321911093	
CAPÍTULO 4	35
ACUMULADOR DE ENERGIA SOLAR PARA SECAGEM DAS AMENDOAS DE CACAU	
Luiz Vinicius de Menezes Soglia Jorge Henrique de Oliveiras Sales Pedro Henrique Sales Giroto	
DOI 10.22533/at.ed.2321911094	
CAPÍTULO 5	47
ÁLGEBRA LINEAR NA ESCOLA E NA HISTÓRIA: UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DOS PRINCIPAIS TÓPICOS ENSINADOS	
Leandro Teles Antunes dos Santos Erasmus Tales Fonseca Patrícia Milagre de Freitas	
DOI 10.22533/at.ed.2321911095	

CAPÍTULO 6	58
UMA POSSIBILIDADE DE CONCEBER A MATEMÁTICA E REALIDADE - MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO	
Morgana Scheller Lariça de Frena Alan Felipe Bepler Tayana Cruz de Souza	
DOI 10.22533/at.ed.2321911096	
CAPÍTULO 7	71
LETRAMENTO MATEMÁTICO: A ALFABETIZAÇÃO MATEMÁTICA A PARTIR DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS	
Pamela Suelen Pantoja Egues Cristiane Ruiz Gomes	
DOI 10.22533/at.ed.2321911097	
CAPÍTULO 8	79
MÉTODO DE MÚLTIPLAS ESCALAS APLICADO AO OSCILADOR DE VAN DER POL	
Higor Luis Silva Denner Miranda Borges	
DOI 10.22533/at.ed.2321911098	
CAPÍTULO 9	86
ANALISE DE VIABILIDADE DE EMPREENDIMENTOS IMOBILIÁRIOS COM O USO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	
Ianyqui Falcão Costa	
DOI 10.22533/at.ed.2321911099	
CAPÍTULO 10	103
DESENVOLVIMENTO DE APLICAÇÃO MÓVEL EDUCATIVA PARA ACOMPANHANTES DE PARTURIENTES	
Adriana Parahyba Barroso Jocileide Sales Campos Edgar Marçal	
DOI 10.22533/at.ed.23219110910	
CAPÍTULO 11	113
ASPECTOS DO CICLO DE VIDA DE DADOS EM PROCESSOS DE CONSTRUÇÃO DE ONTOLOGIAS BIOMÉDICAS	
Jeanne Louize Emygdio Eduardo Ribeiro Felipe Maurício Barcellos Almeida	
DOI 10.22533/at.ed.23219110911	
CAPÍTULO 12	126
AVALIAÇÃO DA CAPACIDADE ANTIOXIDANTE DE VINHOS UTILIZANDO TÉCNICAS ELETROANALÍTICAS E ESPECTROFOTOMÉTRICAS	
Isaide de Araujo Rodrigues Deracilde Santana da Silva Viégas Ziel dos Santos Cardoso Ana Maria de Oliveira Brett	
DOI 10.22533/at.ed.23219110912	

CAPÍTULO 13 138

AVALIAÇÃO DE ADITIVOS ANTIOXIDANTES COMO INIBIDORES DA CORROSÃO PROVOCADA PELO BIODIESEL DE DIFERENTES MATÉRIAS-PRIMAS

José Geraldo Rocha Junior
Marcelle Dias dos Reis
Luana de Oliveira Santos
Andressa da Silva Antunes
Cristina Maria Barra
Sheisi Fonseca Leite da Silva Rocha
Otavio Raymundo Lã
Rosane Nora Castro
Matthieu Tubino
Acácia Adriana Salomão
Willian Leonardo Gomes da Silva

DOI 10.22533/at.ed.23219110913

CAPÍTULO 14 149

AVALIAÇÃO DO TEOR DE FIBRAS EM IOGURTE SABOR CHOCOLATE ELABORADO COM ADIÇÃO DE BIOMASSA DE BANANA VERDE

Ana Cléia Moreira de Assis Frota
Márcia Facundo Aragão

DOI 10.22533/at.ed.23219110914

CAPÍTULO 15 155

DIAGNÓSTICO DAS PERDAS DE MATERIAIS NA CONSTRUÇÃO CIVIL

Daniel Ramos de Souza
Maycon Mickael Ribeiro Vasconcelos
Evandro Schmitt
Írismar da Silva Genuíno

DOI 10.22533/at.ed.23219110915

CAPÍTULO 16 164

ESTUDO DE AQUECIMENTOS NOTURNOS SIMULTANEAMENTE À DIMINUIÇÃO DA UMIDADE SOBRE A CIDADE DO RIO DE JANEIRO

Hana Carolina Vieira da Silveira
Ana Cristina Pinto de Almeida Palmeira

DOI 10.22533/at.ed.23219110916

CAPÍTULO 17 175

EXTRAÇÃO, PURIFICAÇÃO E AVALIAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO LÍQUIDO CELOMÁTICO DE MINHOCA DA ESPÉCIE *Eisenia andrei*

Taisa Werle
Jordana Finatto
Ketlin Fernanda Rodrigues
Gabriela Vettorello
Ani Carolina Weber
Sabrina Grando Cordeiro
Verônica Vanessa Brandt
Ytan Andreine Schweizer
Valeriano Antônio Coberllini
Elisete Maria de Freitas
Eduardo Miranda Ethur
Lucélia Hoehne

DOI 10.22533/at.ed.23219110917

CAPÍTULO 18	188
A ABORDAGEM HISTÓRICA DE MATRIZ, DETERMINANTE E SISTEMAS LINEARES NOS LIVROS DIDÁTICOS	
Daniel Martins Nunes Fábio Mendes Ramos Fabricia Gracielle Santos	
DOI 10.22533/at.ed.23219110918	
CAPÍTULO 19	195
A QUÍMICA DA MARCHETARIA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE QUÍMICA	
Caroline Ketlyn M. Da Silva Francisca Georgiana M. do Nascimento	
DOI 10.22533/at.ed.23219110919	
CAPÍTULO 20	209
A UTILIZAÇÃO DE TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO SUPERIOR	
Robert Mady Nunes Wilmar Borges Leal Júnior Marcos Dias da Conceição Valber Sardi Lopes Greice Quele Mesquita Almeida Andrea Barboza Proto Helaís Santana Lourenço Mady Suzane Aparecida Cordeiro	
DOI 10.22533/at.ed.23219110920	
CAPÍTULO 21	221
SOLUÇÃO PARA EQUAÇÃO INTEGRAL DE SCHRÖDINGER DE UMA ONDA ESPALHADA VIA MÉTODO DE FREDHOLM	
Pedro Henrique Sales Giroto Jorge Henrique de Oliveiras Sales	
DOI 10.22533/at.ed.23219110921	
CAPÍTULO 22	233
ESTUDO MORFOLÓGICO E CRISTALOGRAFICO DE DIFERENTES TIPOS DE CIMENTO PORTLAND	
Bento Francisco dos Santos Júnior Fabiane Santos Serpa Eduardo Ubirajara Rodrigues Batista Thuany Reis Sales Adriele Santos Souza Antonio Vieira Matos Neto	
DOI 10.22533/at.ed.23219110922	
CAPÍTULO 23	248
FATORES SOCIOECONÔMICOS DO PERFIL DO EMPREENDEDOR BRASILEIRO	
Felipe Kupka Feliciano Antonio Marcos Feliciano César Panisson Édis Mafra Lapolli	
DOI 10.22533/at.ed.23219110923	

CAPÍTULO 24	262
IDENTIFICAÇÃO DE DANOS ESTRUTURAIS USANDO REDES NEURAIS ARTIFICIAIS BASEADA EM UM MODELO DE DANO CONTÍNUO	
Rosilene Abreu Portella Corrêa Cleber de Almeida Corrêa Junior Jorge Luiz Pereira	
DOI 10.22533/at.ed.23219110924	
CAPÍTULO 25	274
APLICAÇÃO DA TEORIA DE REDES PARA ANÁLISE LOGÍSTICA DOS <i>HUBPORTS</i> DA CABOTAGEM BRASILEIRA	
Carlos César Ribeiro Santos Hernane Borges de Barros Pereira Anderson da Silva Palmeira Marcelo do Vale Cunha	
DOI 10.22533/at.ed.23219110925	
CAPÍTULO 26	287
IMPREGNAÇÃO INCIPIENTE DE HSiW EM ZEÓLITA Y PARA PRODUÇÃO DE ACETATO DE BUTILA	
Mateus Freitas Paiva Juliane Oliveira Campos de França Elon Ferreira de Freitas José Alves Dias Sílvia Cláudia Loureiro Dias	
DOI 10.22533/at.ed.23219110926	
CAPÍTULO 27	298
MULTISCALE SPATIAL INFLUENCE ON METABOLITES IN JABUTICABA	
Gustavo Amorim Santos Luciane Dias Pereira Suzana da Costa Santos Pedro Henrique Ferri	
DOI 10.22533/at.ed.23219110927	
CAPÍTULO 28	310
O ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DA LINGUAGEM TEATRAL	
Fabiana Geresa Leindeker da Silva Tamires Bon Vieira Monalisa da Silva Leonardo Geziel de Matos Dada Carla Daniela Guasseli da Silva Engel	
DOI 10.22533/at.ed.23219110928	
CAPÍTULO 29	319
O ESTUDO DE PIRÂMIDES COM A UTILIZAÇÃO DO “VOLPIR”	
Renato Darcio Noleto Silva Cinthia Cunha Maradei Pereira Fábio José da Costa Alves	
DOI 10.22533/at.ed.23219110929	

CAPÍTULO 30 333

O USO DO CELULAR NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM: UMA ANÁLISE A PARTIR DAS CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS DE VYGOTSKY

Jerry Wendell Rocha Salazar
Delcineide Maria Ferreira Segadilha

DOI 10.22533/at.ed.23219110930

CAPÍTULO 31 345

BREVE ANÁLISE DA FERRAMENTA CONSTRUCT 2® COMO OBJETO DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA

Monys Martins Nicolau
Eryslânia Abrantes Lima
Solon Diego Garcia Moreira
Amanda Oliveira de Miranda
Saymon Bezerra de Sousa Maciel
Elder Gonçalves Pereira

DOI 10.22533/at.ed.23219110931

CAPÍTULO 32 355

PERCEPÇÃO DOCENTE SOBRE AS DIFICULDADES DOS ACADÊMICOS NA ELABORAÇÃO DE RELATÓRIOS EXPERIMENTAIS DE QUÍMICA

Klenicy Kazumy de Lima Yamaguchi
Hudinilson Kendy de Lima Yamaguchi
Vera Lúcia Imbiriba Bentes

DOI 10.22533/at.ed.23219110932

CAPÍTULO 33 366

PROPOSTA DE UM INSTRUMENTO PARA LEVANTAMENTO DE REQUISITOS FUNCIONAIS PARA A CONSTRUÇÃO DE UMA FERRAMENTA DE GESTÃO DO CONHECIMENTO NA INDÚSTRIA DE SOFTWARE

Gisele Caroline Urbano Lourenço
Mariana Oliveira
Danieli Pinto
Nelson Tenório
Pedro Henrique Lobato
Amanda Vidotti

DOI 10.22533/at.ed.23219110933

CAPÍTULO 34 376

O *SOFTWARE* GEOGEBRA: MEDIADOR DA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS DE GEOMETRIA DE UMA ALUNA NÃO ALFABETIZADA

Taiane de Oliveira Rocha Araújo
Maria Deusa Ferreira da Silva

DOI 10.22533/at.ed.23219110934

CAPÍTULO 35 385

RESOLUÇÃO CINÉTICA DINÂMICA DE AMINAS BENZÍLICAS SUBSTITUÍDAS UTILIZANDO CATALISADOR DE Pd SUPORTADO EM MgCO₃

Fernanda Amaral de Siqueira
Camila Rodrigues Cabreira
Pedro Henrique Kamogawa Chaves

DOI 10.22533/at.ed.23219110935

CAPÍTULO 36	396
SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE QUÍMICA ORGÂNICA UTILIZANDO JOGOS DIGITAIS: UMA VISÃO TEÓRICA	
Francisco Glauber de Brito Silva Leonardo Alcântara Alves	
DOI 10.22533/at.ed.23219110936	
CAPÍTULO 37	407
ANÁLISE DA RESISTÊNCIA À PUNCTURA DO COBRE POR ENSAIO PADRONIZADO DE ULTRAMICRODUREZA	
Eduardo Braga Costa Santos Denise Dantas Muniz Eliandro Pereira Teles Danielle Guedes de Lima Cavalcante Ricardo Alves da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.23219110937	
SOBRE O ORGANIZADOR	419
ÍNDICE REMISSIVO	420

MÉTODO DE MÚLTIPLAS ESCALAS APLICADO AO OSCILADOR DE VAN DER POL

Higor Luis Silva

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade
de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Denner Miranda Borges

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade
de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

RESUMO: A equação de Van der Pol é um tipo de oscilador auto-excitado que exibe diferentes escalas temporais que se acumulam em um ciclo-limite. Independente das condições iniciais, é demonstrado que o oscilador converge para um ciclo-limite de amplitude definida. Neste trabalho, o método das múltiplas escalas é aplicado para obter a resposta aproximada do oscilador de Van der Pol, validando a teoria das perturbações. Para tal, é realizada uma expansão temporal de segunda ordem, ou seja, em duas escalas temporais.

PALAVRAS-CHAVE: Dinâmica não-linear, Múltiplas escalas, Van der Pol.

MULTIPLE SCALE METHOD APPLIED TO THE VAN DER POL OSCILLATOR

ABSTRACT: The Van der Pol equation is a type of self-excited oscillator that exhibits

different time scales that accumulate in a limit cycle. Regardless of the initial conditions, it is demonstrated that the oscillator converges to a definite amplitude limit cycle. In this work, the multiple scaling method is applied to obtain the approximate response of the Van der Pol oscillator, validating the perturbation theory. For this, a second order temporal expansion is performed, that is, on two time scales.

KEYWORDS: Nonlinear dynamics, Multiple scales, Van der Pol.

1 | INTRODUÇÃO

A equação de Van der Pol, ou Oscilador de Van der Pol, recebe este nome em homenagem a Balthasar van der Pol, físico e engenheiro eletricitista holandês que propôs o oscilador durante os anos de trabalho na Philips. É relatado que Van der Pol descobriu oscilações estáveis em circuitos elétricos utilizando tubos de vácuo para controlar a corrente elétrica nos transmissores e receptores do circuito. Estas oscilações estáveis são conhecidas atualmente como ciclos-limite.

Guckenheimer *et al.* (2003) citam os feitos de Van der Pol como importantes avanços nos campos de rádio e telecomunicações na primeira metade do século vinte. Segundo os autores, os experimentos realizados por

Van der Pol, sob diferentes condições iniciais, convergiam para a mesma órbita de amplitude finita. Este comportamento, que demonstrava-se diferente das soluções obtidas para equações lineares, levou o mesmo a propor a sua famosa equação diferencial não-linear. Van der Pol (1960) referencia esta equação como equação livre de Van der Pol. Posteriormente, outras importantes características advindas da equação são descritas por Van der Pol (1926), gerando as atualmente conhecidas como “oscilações relaxadas”.

Neste trabalho, o método das múltiplas escalas é aplicado para obter a resposta aproximada do oscilador de Van der Pol, validando a teoria das perturbações. Para tal, é realizada uma expansão temporal de segunda ordem, ou seja, em duas escalas temporais.

2 | FORMULAÇÃO

Considere um sistema massa-mola com movimento oscilatório unidimensional sob ação de uma força restauradora. Para este sistema, tem-se a equação diferencial para a posição u do oscilador, dada na forma geral $\ddot{x} + f(x) = 0$, onde $f(u)$ pode ser uma função linear ou não. A partir dessa equação, pode-se assumir equações do tipo oscilador harmônico, equação de Duffing, entre outros. Portanto, $f(u)$ é um caso geral onde pode-se identificar o tipo de linearidade que a equação diferencial pode assumir em um determinado sistema físico.

Em seguida, reescrevendo essa expressão em um sistema de coordenadas convenientes, tal que $x = u - u_0$, com u_0 sendo a posição de equilíbrio do oscilador, obtém-se a equação diferencial reescrita na forma $\ddot{x} + f(x + u_0) = 0$.

Verifica-se que f pode ser expandido em série de Taylor em torno do ponto u_0 . Com este procedimento, busca-se soluções aproximadas. Logo,

$$f(x + u_0) = \sum_{n=1}^N \alpha_n x^n, \quad \text{com} \quad \alpha_n = \frac{1}{n} f^{(n)}(u_0) \quad (1)$$

e $f^{(n)}$ denotando as n -ésimas derivadas no ponto u_0 . As condições iniciais são dadas pelas posição e velocidades iniciais. A partir das condições iniciais, determina-se as soluções de maneira única.

No método das múltiplas escalas, a ideia principal é aplicar uma transformação na equação diferencial em estudo, sendo ela linear ou não, gerando uma série de equações diferenciais lineares acopladas. Nesse sentido, o método define n variáveis T_n de tempo, dadas por $T_n = \varepsilon^n t$, onde estas variáveis são interpretadas como diferentes escalas de tempo (múltiplas escalas) e tomadas como independentes, desde que o parâmetro ε assuma um valor pequeno (ex: $\varepsilon = 1$).

Para estas diferentes escalas de tempo, observa-se que as derivadas na variável t também devem ser reescritas em termos das derivadas de T_k na forma

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (2)$$

As derivadas são separáveis pela expansão dos termos de acordo com diferentes ordens de potências de ε . Deste modo, pode-se assumir, então, uma solução para a equação do sistema massa mola, levando-se em conta a expansão dada pela Eq. 1, na forma

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \mathbf{x}_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon \mathbf{x}_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + O(\varepsilon^2) \quad (3)$$

Substituindo as devidas substituições na equação $\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0) = 0$, obtém-se para cada ordem n em ε uma equação diferencial linear para a componente x_n na série da Eq. 3:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 D_0^2 \mathbf{x}_0 + \omega_0^2 \mathbf{x}_0 &= \mathbf{0}, & \varepsilon^1 D_0^2 \mathbf{x}_1 + \omega_0^2 \mathbf{x}_1 &= -2D_0 D_1 \mathbf{x}_0 - \alpha_2 \mathbf{x}_0^2 \quad \text{e} \\ \varepsilon^n D_0^2 \mathbf{x}_n + \omega_0^2 \mathbf{x}_n &= \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \end{aligned}$$

As soluções das equações de ordens menores aparecem como os termos não homogêneos, $F_n(x_1, \dots, x_{n-1})$ nas equações das ordens maiores. Portanto, este é um método iterativo; por exemplo, a solução da ordem zero influi na solução da primeira ordem, enquanto a solução da segunda ordem está definida pelos efeitos das soluções das ordens zero e um, e assim por diante.

3 | RESULTADOS

Utilizando o método das múltiplas escalas, será utilizada uma perturbação em duas escalas de tempo para avaliar a equação do oscilado de Van der Pol, dada por:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4)$$

Para uma melhor adequação à notação utilizada na formulação desenvolvida anteriormente, o parâmetro μ será mudado para ε , resultando em $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$.

Na teoria da perturbação por múltiplas escalas, assume-se que a solução é da forma descrita na Eq. 3. Para facilidade de escrita, a variável $x(t, \varepsilon)$ será escrita apenas como x , de forma a evitar qualquer confusão. Assim, é preciso diferenciar ambos os lados da Eq. 3 em relação a t para substituir nos valores de \dot{x} e \ddot{x} . Utilizando a regra da cadeia em derivadas parciais no lado direito da Eq. 3 e as escalas de tempo dadas por $T_n = \varepsilon^n t$, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \dots = \left(\frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial x_0}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) + \dots \\ &= D_0 x_0 + \varepsilon (D_1 x_0 + D_0 x_1) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (5)$$

Utilizando o mesmo processo para \ddot{x} , e substituindo os resultados na Eq. 4 e agrupando os termos semelhantes de potência ε , a equação se torna

$$D_0^2 x_0 + x_0 + (D_0^2 x_1 + x_1 + 2D_1 D_0 x_0 + (x_0^2 - 1)D_0 x_0) \varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (6)$$

Como $\varepsilon \neq 0$, para o lado esquerdo da Eq. 6 ser zero, os coeficientes de potência de ε precisam ser zero. Assim, separando as equações, tem-se:

$$\begin{cases} O(\varepsilon^0) : D_0^2 x_0 + x_0 = 0 & (7a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} O(\varepsilon^1) : D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_1 D_0 x_0 - (x_0^2 - 1)D_0 x_0 & (7b) \end{cases}$$

Seja uma nova variável (τ), definida como $\tau = \varepsilon t$. A Eq. 7a é uma equação de um oscilador harmônico simples. A solução geral pode ser escrita na seguinte forma $x_0(t, \tau) = r(\tau) \cos(t + \phi(\tau))$. Derivando essa expressão para encontrar $D_0 x_0$ e $D_1 D_0 x_0$, e substituindo na Eq. 7b, obtém-se a seguinte forma expandida:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + x_1 &= -2r(\tau) \phi'(\tau) \cos(t + \phi(\tau)) - 2r'(\tau) \sin(t + \phi(\tau)) + \\ &\quad - r^3(\tau) \cos^2(t + \phi(\tau)) \sin(t + \phi(\tau)) + r(\tau) \sin(t + \phi(\tau)) \end{aligned} \quad (8)$$

É possível simplificar a notação na Eq. 8 definindo $\theta = t + \phi(\tau)$ e aplicando identidades trigonométricas, resultando:

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2r\phi' \cos \theta + \left(-2r' - \frac{1}{4}r^3 + r\right) \sin \theta - \frac{1}{4}r^3 \sin 3\theta \quad (9)$$

Ambos os termos $\cos \theta$ e $\sin \theta$ são termos ressonantes na Eq. 9. Assim, para evitar termos seculares na solução, é preciso definir os coeficientes de $\cos \theta$ e $\sin \theta$ como iguais a zero no lado direito da Eq. 9, uma vez que essas são as próprias soluções da equação diferencial homogênea associada no lado esquerdo da Eq. 9. Portanto, obtém-se que:

$$\begin{cases} -2r\phi' = 0 & (10a) \\ -2r' - \frac{1}{4}r^3 + r = 0 \rightarrow r' = \frac{1}{8}r(4 - r^2) & (10b) \end{cases}$$

A Eq. 10b pode ser escrita como um campo vetorial. Por outro lado, para resolvê-la para seus pontos fixos, que são os pontos para o qual $r' = 0$; e dizendo que $r' = f(r)$, implica dizer que $r(4 - r^2) = 0$. Dessa forma, obtém-se $r' = 0$ ou $r' = \pm 2$. Entretanto, é de interesse apenas no domínio de $r \geq 0$.

A Figura 1 mostra claramente o retrato de fase do campo vetorial do oscilador de Van der Pol em estudo. Na Fig. 1a, percebe-se que as trajetórias que começam acima de 2 convergem para um ciclo-limite de amplitude 2. Por outro lado, na Fig. 1b percebe-se que todas as trajetórias que começam próximas à origem também convergem para um ciclo-limite de amplitude 2. Assim, $r' = 0$ é um ponto fixo instável, enquanto $r' = 2$ é um ponto fixo estável. Portanto, $r(\tau) \rightarrow 2$ à medida em que $t \rightarrow \infty$. A partir da Eq. 10a, tem-se que $\phi' = 0$, então $\phi(\tau) = \phi_0$, onde ϕ_0 é uma constante. Desse modo, $x_0(t, \tau) \rightarrow 2 \cos(t + \phi_0)$ e, conseqüentemente, tem-se que

$$x(t) \rightarrow 2 \cos(t + \phi_0) + O(\varepsilon) \quad (11)$$

à medida em que $t \rightarrow \infty$. Assim, $x(t)$ se aproxima de um ciclo-limite estável de raio $2 + O(\varepsilon)$.

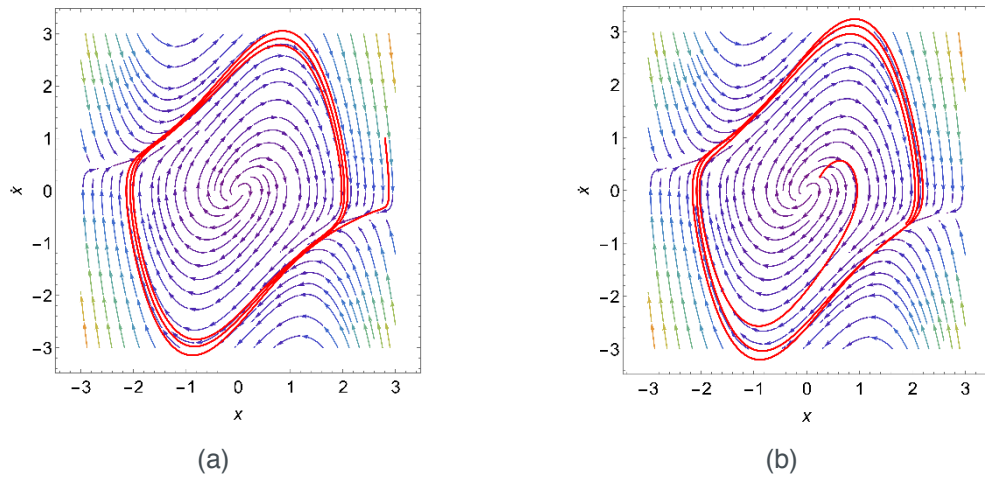


Figura 1: Retrato de fase: (a) Condição inicial acima de 2; (b) Condição inicial próxima da origem.

4 | CONCLUSÕES

A equação de Van der Pol é uma equação não-linear fraca, que não pode ser resolvida na forma explícita. O método das múltiplas escalas, dentro da teoria das perturbações, é capaz de produzir uma boa aproximação para a solução da equação. Foi demonstrado que o método das múltiplas escalas pode ser utilizado para calcular o ciclo-limite do oscilador de Van der Pol.

Neste trabalho, uma expansão de segunda ordem é utilizada para obter-se a solução aproximada. Foi demonstrado que, para quaisquer valores de condições iniciais, a solução é um ciclo-limite de amplitude definida. Para expansões de ordem elevada, o método de múltiplas escalas pode tornar-se algebricamente complicado. Contudo, o método é uma poderosa ferramenta matemática para obter soluções aproximadas de equações diferenciais, como a de Van der Pol, que não possuem solução exata.

5 | AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte financeiro da CNPq, CAPES e FAPEMIG.

6 | DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

REFERÊNCIAS

Guckenheimer, J., Hoffman, K., e Weckesser, W. **The forced van der Pol equation I: The slow flow and its bifurcations**. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, Vol. 2, No. 1, 2003, pp, 1-35.

Van der Pol, B. **A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations.** Radio Rev. 1 (1920) 701-710, 754-762; Selected Scientific Papers, Vol. I, 1920.

Van der Pol, B. **LXXXVIII. On relaxation oscillations.** The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 2, No. 11, 1926, pp. 978-992.

SOBRE O ORGANIZADOR

CLEBERTON CORREIA SANTOS- Graduado em Tecnologia em Agroecologia, mestre e doutor em Agronomia (Produção Vegetal). Tem experiência nas seguintes áreas: agricultura familiar, indicadores de sustentabilidade de agroecossistemas, uso e manejo de resíduos orgânicos, propagação de plantas, manejo e tratos culturais em horticultura geral, plantas medicinais exóticas e nativas, respostas morfofisiológicas de plantas ao estresse ambiental, nutrição de plantas e planejamento e análises de experimentos agropecuários.

(E-mail: cleber_frs@yahoo.com.br) – ORCID: 0000-0001-6741-2622

ÍNDICE REMISSIVO

A

Acompanhante de parto 103
Álgebra linear 47, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56
Aminas benzílicas 388, 389

B

Biodiesel 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148

C

Capacidade antioxidante 126
Construção Civil 86, 87, 88, 98, 155, 157, 158, 163, 236, 237, 255

E

Energia solar 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 45, 46
Estatística 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 46, 89, 95, 149, 153, 173, 215, 278, 360

F

Formação docente 22, 24, 358, 364, 402, 403

G

Gestão do Conhecimento 248, 260, 366, 368, 370, 372, 373, 374

L

Letramento matemático 71, 72, 73, 74, 75, 77, 78
Líquido celomático 175, 176, 177, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186

M

Metátese 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33
Múltiplas escalas 79, 80, 81, 82, 84

O

Ontologias biomédicas 113, 115, 120, 122

P

Perdas 3, 8, 9, 46, 141, 142, 146, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163

R

Redes Neurais 262, 264, 273

S

Secagem 35, 36, 37, 38, 39, 45, 46, 144, 289, 296

Sistemas lineares 50, 53, 188, 190, 192, 193

T

Teor de fibras 149, 150, 151, 153

V

Vermicompostagem 175, 176, 187

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-623-2

