Ensino Aprendizagem de Matemática

Eliel Constantino da Silva
(Organizador)

Atena Editora
Ano 2019

Eliel Constantino da Silva
(Organizador)

Ensino Aprendizagem de Matemática

Atena Editora
2019

Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Geraldo Alves
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E59 Ensino aprendizagem de matemática [recurso eletrônico] / Organizador Eliel Constantino da Silva. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-545-7
DOI 10.22533/at.ed.457192008

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino. 3.Professores de matemática – Formação. I. Silva, Eliel Constantino da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2019

APRESENTAÇÃO

Esta obra reúne importantes trabalhos que tem como foco a Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem em salas de aula do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

Os trabalhos abordam temas atuais e relevantes ao ensino e aprendizagem da Matemática, tais como: a relação da Matemática com a música no ensino de frações, livros didáticos e livros literários no ensino de Matemática, uso de instrumentos de desenho geométrico, jogos, animes e mangá como contribuições para o desenvolvimento da Matemática em sala de aula, análise dos problemas que envolvem o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, a ausência do pensamento matemático e argumento dedutivo na Educação Matemática, investigação e modelagem matemática, tendências em Educação Matemática, formação inicial de professores de Matemática e apresentam um aprofundamento da Matemática através dos dígitos verificadores do cadastro de pessoas físicas (CPF), simetria molecular, análise numérica e o Teorema de Sinkhorn e Knopp.

A importância deste livro está na excelência e variedade de abordagens, recursos e discussões teóricas e metodológicas acerca do ensino e aprendizagem da Matemática em diversos níveis de ensino, decorrentes das experiências e vivências de seus autores no âmbito de pesquisas e práticas.

O livro inicia-se com seis capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. Em seguida há 9 capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, seguidos de 4 capítulos que abordam a temática do livro no Ensino Superior. E por fim, encontram-se 10 capítulos que trazem em seu cerne a Matemática enquanto área do conhecimento, sem a apresentação de uma discussão acerca do seu ensino e do processo de aprendizagem.

Desejo a todos os leitores, boas reflexões sobre os assuntos abordados, na expectativa de que essa coletânea contribua para suas pesquisas e práticas pedagógicas.

Eliel Constantino da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 22

SOLUÇÕES FRACAS PARA EQUAÇÃO DE BURGERS COM VISCOSIDADE NULA

Ana Paula Moreira de Freitas
Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia - MG

Santos Alberto Enriquez-Remigio
Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia - MG

RESUMO: As soluções não diferenciáveis para equações diferenciais parciais aparecem na maior parte das aplicações físicas, tais soluções são conhecidas como soluções fracas. Aqui introduz-se o conceito de solução fraca usando a equação de Burgers com viscosidade nula e apresentam-se duas destas soluções para essa equação.
PALAVRAS-CHAVE: Solução Fraca. Equação de Burgers. Método das Curvas Características. Problema de Riemann.

WEAK SOLUTIONS FOR EQUATIONS OF BURGERS WITH ZERO VISCOSITY

ABSTRACT: Non-differentiable solutions for partial differential equations appear in most physical applications, such solutions are known as weak solutions. Here we introduce the concept of weak solution using the Burgers equation with zero viscosity and present two of these solutions for this equation.
KEYWORDS: Weak Solution. Burgers equation. Method of Characteristics Curves. Riemann's problem.

1 I INTRODUÇÃO

É comum a indagação à respeito da existência de uma solução suave (também conhecida como solução clássica) de uma Equação Diferencial Parcial (EDP), isto é, uma solução com derivadas contínuas, quantas forem necessárias, que satisfaça a EDP. Porém, na maioria das aplicações físicas aparecem soluções descontínuas, daí a importância e a necessidade de conhecer os mecanismos de obtenção de tais soluções. Estas soluções são conhecidas como soluções fracas e aqui serão apresentadas duas soluções fracas para a equação de Burgers com viscosidade nula.

2 I METODOLOGIA

A equação de Burgers é um modelo simplificado derivado das Equações de Navier-Stokes e foi introduzida originalmente por J. M. Burgers em seus estudos sobre turbulência em fluidos, aparecendo como um modelo básico em diversos outros fenômenos onde efeitos de advecção não-lineares e difusão linear desempenham papel importante (PASA, 2005).

A equação de Burgers com viscosidade nula, escrita na forma não conservativa é:

$$u_t + uu_x = 0, \ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[\qquad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Já a versão conservativa é dada por:

$$u_t + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0, \ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[\qquad (3)$$

Uma das técnicas para determinação da solução de (3) consiste em transformar a EDP em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Tal técnica é conhecida como Método das Curvas Características.

2.1 Método das Curvas Características

O método das curvas características consiste em transformar o Problema de Valor Inicial associado a um conjunto de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) em um sistema de Problemas de Valor Inicial de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Assim, resolvendo o sistema de EDOs, caso seja possível, obtém-se a solução da EDP.

Para o PVI, (1) e (2), as EDOs associadas e denominadas de equações características, são:

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{du}{dt} = 0, \qquad (4)$$

sujeito as seguintes condições iniciais, respectivamente:

$$x(0) = x_0, \ \ u(0) = u(x(0),0) = u(x_0,0) = u_0(x_0) \qquad (5)$$

em que, $u = \hat{}u(t) = u(x(t),t)$ é função de uma variável independente. Integrando as EDO's obtém-se a curva característica $x = ut + c_1$ e $u = c_2$, sendo c_1 e c_2 constantes. Aplicando as condições iniciais, (5), nas soluções obtidas, tem-se:

$$x(0) = c_1 = x_0, \quad u(0) = u_0(x_0) = c_2 \qquad (6)$$

Logo, tem-se que $x_0 = c_1 = x - ut$ e $u(t) = u(x(t),t) = u_0(x_0)$. Então, $u(x(t),t) = u_0(x - ut)$, e portanto, a solução da equação de Burgers é dada por:

$$u(x,t) = u_0(x - ut) \qquad (7)$$

A curva característica é dada por:

$$x(t) = ut + x_0, \qquad (8)$$

E pode ser reescrita como:

$$t = \frac{x - x_0}{u}, \qquad (9)$$

Observa-se que essas curvas são retas com coeficiente angular $tg\theta = \frac{1}{u}$, quando u varia, os coeficientes angulares das retas características também variam. Logo, as retas podem se cruzar ou não, formando ondas de choque ou ondas de rarefação, respectivamente (Leveque, 1992).

Para a condição inicial:

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l, & se\ x < 0 \\ u_r, & se\ x > 0 \end{cases} \qquad (10)$$

em que u_l e u_r são constantes chamadas de estado inicial à esquerda e à direita, respectivamente. O problema é denominado de Problema de Riemann e a Fig. 1 mostra a representação de sua condição inicial para $u_l > u_r$.

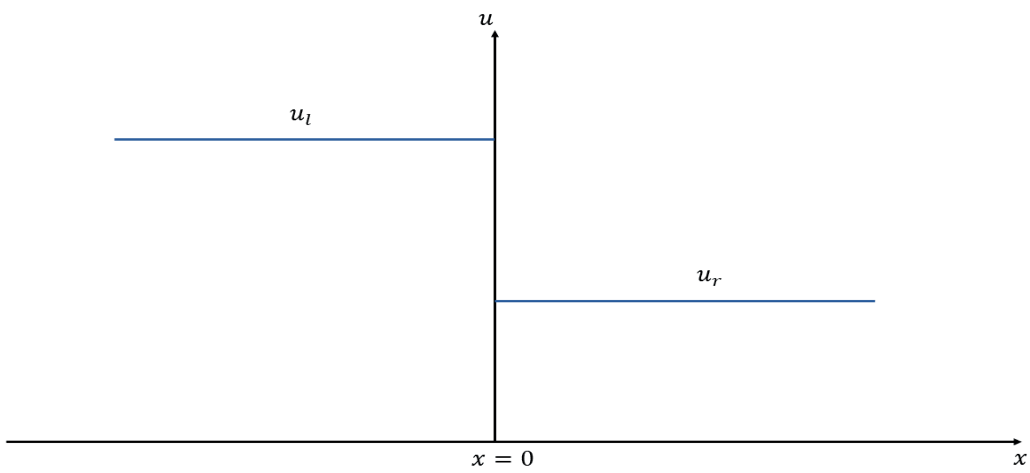

Figura1: Condição inicial para o Problema de Riemann com $u_l > u_r$

2.2 Solução Fraca

Considerando o problema de valor inicial:

$$u_t + \frac{1}{2}\frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \qquad (11)$$

com condição inicial:

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (12)$$

Definindo o conjunto das funções testes, C_0^1 , como $C_0^1 = \{\phi \in C^1 : \{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) : \phi(x,t) \neq 0]\} \subset [a,b] \times [0,T]$, para algum a, b e $T\}$.

Nota-se que ϕ é continuamente diferenciável e anula-se fora de um retângulo no plano $x - t$. $[0,\infty)$. Tais funções são ditas funções com suporte compacto em $\mathbb{R} \times$. Ao suporte de ϕ, denota-se $supp(\phi)$, e é o conjunto no qual ϕ não é identicamente nulo.

Multiplicando a EDP (11) por $\phi \in C_0^1$ e integrando em relação a de a e em relação a x de $-\infty$ a ∞, obtem-se:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u_t + f(u)_x]\phi(x,t)dxdt = 0 \qquad (13)$$

Aplicando integração por partes com o intuito de eliminar as derivadas em u e em $f(u)$ e usando o fato que a função $\phi \in C_0^1$, tem-se:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u\phi_t + f(u)\phi_x]dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0\phi_0 dx = 0 \qquad (14)$$

em que $u_0 = u(x,0)$ é a condição inicial e ϕ_0 é uma notação para $\phi(x,0)$.

Definição 1. Se u satisfaz a equação (14) para todo $\phi \in C_0^1$, então a função u é denominada de solução fraca para o problema de valor inicial (11) e (12).

Proposição 1. Se u é uma solução para o problema de valor inicial (11) e (12), então u satisfaz (14) para todo $\phi \in C_0^1$.

Proposição 2. Se u é continuamente diferenciável em relação a *x* e *t* e satisfaz a equação (14) para todo, $\phi \in C_0^1$ então u é uma solução clássica do problema de valor inicial (11) e (12).

Podem existir soluções fracas que não são soluções clássicas para o problema de valor inicial (11) e (12), pois funções que satisfazem a equação (14) podem não ser diferenciáveis. E podem existir soluções fracas que não são soluções físicas (BEZERRA; CUMINATO, 2003)

2.3 Solução Fraca para o Problema de Riemann Associado a Equação de Burgers

Uma solução fraca, u , obtida pelo método das curvas características para o PVI (1) e (10) é:

$$u(x,t)=\begin{cases} u_l, & se\ x \leq \frac{t}{2} \\ u_r, & se\ x > \frac{t}{2} \end{cases} \qquad (15)$$

A verificação disso será feita para o caso $u_l < u_r$ e $u_l > u_r$.

O desenvolvimento para mostrar que (15) é solução fraca para a equação (1) sujeita à condição inicial (10) para os casos $u_l > u_r$ e $u_l < u_r$ e $u_l < u_r$ utilizam a definição 1 e as proposições 1 e 2, mostradas acima, de Yamashita (2014).

Caso $u_l > u_r$:

De (3) tem-se que $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, então $f'(u) = u$. Isso implica que os coeficientes angulares das curvas características, satisfazem $\frac{1}{u_l} < \frac{1}{u_r}$, que indica que as curvas características se cruzam em algum momento, formando ondas de choque (Leveque, 1992).

Seja *R* igual a:

$$R = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[u\phi_t + f(u)\phi_x]dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0\phi_0 dx$$

Substituindo o valor de f e integrando em $[0,T]\times[a,b]$ ($supp(\phi) \subset [a,b]\times[0,T]$), tem-se:

$$R = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x]dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0\phi_0 dx = \int_0^{T}\int_a^{b}[u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x]dxdt + \int_a^{b} u_0\phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T}\int_a^{t/2}[u_l\phi_t + \frac{u_l^2}{2}\phi_x]dxdt + \int_0^{T}\int_{t/2}^{b}[u_r\phi_t + \frac{u_r^2}{2}\phi_x]dxdt + \int_a^{0} u_0(x)\phi_0 dx + \int_0^{b} u_0(x)\phi_0 dx \qquad (16)$$

A seguir considera-se $u_l = 1$ e $u_r = 0$, respeitando a restrição de que $u_l > u_r$ e não altera o processo do cálculo do valor de *R*.

Como $u \neq 0$ em $\{(x,t)/a \leq x \leq \frac{t}{2}\ e\ 0 \leq t \leq T\}$, então a expressão (16) pode ser reescrita como segue:

$$R = \int_0^{T}\int_a^{t/2}[\phi_t + \frac{\phi_x}{2}]dxdt + \int_a^{0} u_0(x)\phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T}\int_a^{t/2}\phi_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^{T}\int_a^{t/2}\phi_x dxdt + \int_a^{0}\phi_0 dx$$

Sejam:

$$A = \int_0^T \int_a^{t/2} \phi_t \, dxdt$$
$$B = \int_0^T \int_a^{t/2} \frac{\phi_x}{2} dxdt$$

Então:

$$R = A + B + \int_a^0 \phi_0 dx \qquad (17)$$

Por outro lado:

$$B = \int_0^T \int_a^{t/2} \frac{\phi_x}{2} dxdt \; = \int_0^T \frac{[\phi\left(\frac{t}{2}, t\right) - \phi(a,t)]}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^T [\phi\left(\frac{t}{2}, t\right) - \phi(a,t)]dt$$

Lembrando que $\phi(a,t) = 0$ e fazendo $x = {}^{t}/_{2}$, tem-se:

$$B = \frac{1}{2}\int_0^{T/2} \phi(x, 2x)\, 2dx = \int_0^{T/2} \phi(x, 2x)\, dx$$

E usando a mudança da ordem de integração na integral *A*, tem-se:

$$A = \int_a^0 \int_0^T \phi_t \, dtdx + \int_0^{T/2} \int_{2x}^T \phi_t \, dtdx +$$
$$A = \int_a^0 [\phi(x,T) - \phi(x,0)]dx \; + \int_0^{T/2} [\phi(x,T) - \phi(x,2x)]dx$$

A Fig. 2 mostra a área de integração para o caso $u_l > u_r$.

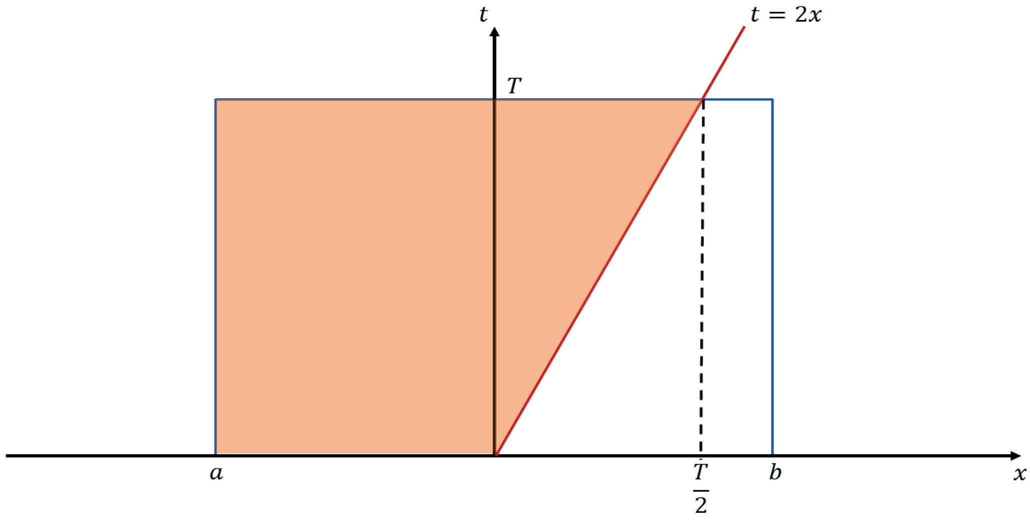

Figura 2: Área de integração para o caso $u_l > u_r$.

Substituindo *A* e *B* em *R* (equação (17). Obtém-se:

$$R = \int_a^0 [\phi(x,T) - \phi(x,0)]dx + \int_0^{T/2} [\phi(x,T) - \phi(x,2x)]dx + \int_0^{T/2} \phi(x,2x)\,dx + \int_a^0 \phi_0 dx$$

Lembrando que $\phi(x,T) = 0$ e $\phi_0 = \phi(x,0)$, logo:

$$R = -\int_a^0 \phi(x,0)dx - \int_0^{T/2} \phi(x,2x)dx + \int_0^{T/2} \phi(x,2x)\,dx + \int_a^0 \phi(x,0)dx = 0$$

Assim, a função (15) é solução fraca para a equação (1) sujeita à condição inicial (10), com $u_l = 1$ e $u_r = 0$.

Caso $u_l < u_r$:

De forma análoga ao caso anterior, $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ e $f'(u) = u$. Isso implica que os coeficientes angulares das curvas características, satisfazem $\frac{1}{u_l} > \frac{1}{u_r}$, que indica que as curvas características nunca se interceptam, formando ondas de rarefação (Leveque, 1992).

Seja *R* igual a:

$$R = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u\phi_t + f(u)\phi_x]dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0\phi_0 dx$$

Substituindo o valor de f e integrando no suporte da função ϕ, tem-se:

$$R = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x]dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0\phi_0 dx = \int_0^{T}\int_0^{b}[u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x]dxdt + \int_a^{b} u_0\phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T}\int_a^{t/2}[u_l\phi_t + \frac{u_l^2}{2}\phi_x]dxdt + \int_0^{T}\int_{t/2}^{b}[u_r\phi_t + \frac{u_r^2}{2}\phi_x]dxdt + \int_a^{0} u_0(x)\phi_0 dx + \int_0^{b} u_0(x)\phi_0 dx$$

Respeitando a restrição de que $u_l < u_r$, pode-se fazer $u_l = 0$ e $u_r = 1$, então:

$$R = \int_0^{T}\int_{t/2}^{b}\phi_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^{T}\int_{t/2}^{b}\phi_x dxdt + \int_0^{b}\phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T}\int_{t/2}^{b}\phi_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^{T}(\phi(b,t) - \phi(t/2,t))dt + \int_0^{b}\phi_0 dx$$

Como $\phi(b,t) = 0$ e fazendo $x = {}^{t}/_{2}$, tem-se:

$$R = \int_0^{T}\int_{t/2}^{b}\phi_t dxdt - \frac{1}{2}\int_0^{T/2}\phi(x,2x)2dx + \int_0^{b}\phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T}\int_{t/2}^{b}\phi_t dxdt - \int_0^{T/2}\phi(x,2x)dx + \int_0^{b}\phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T}\int_{t/2}^{b}\phi_t dxdt + \int_{T/2}^{0}\phi(x,2x)dx + \int_0^{b}\phi_0 dx \qquad (18)$$

A Fig. 3 mostra a área de integração para o caso $u_l < u_r$.

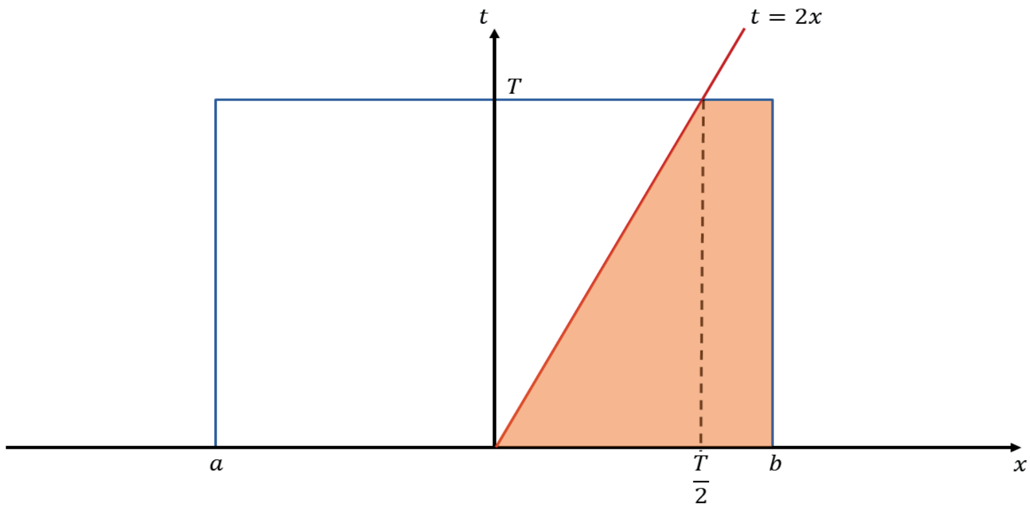

Figura 3: Área de integração para o caso $u_l < u_r$.

Da Fig. 3, é possível mudar o domínio de integração da integral dupla em (18), logo:

$$R = \int_0^{T/2} \int_0^{2x} \phi_t dt dx + \int_{T/2}^{b} \int_0^{T} \phi_t dt dx + \int_{T/2}^{0} \phi(x, 2x) dx + \int_0^b \phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T/2} (\phi(x, 2x) - \phi(x, 0)) dx + \int_{T/2}^{b} \big(\phi(x, T) - \phi(x, 0)\big) dx + \int_{T/2}^{0} \phi(x, 2x) dx + \int_0^b \phi_0 dx$$

Como $\phi(x, T) = 0$, tem-se:

$$R = \int_0^{T/2} \phi(x, 2x) dx + \int_{T/2}^{0} \phi(x, 2x) dx - \int_0^b \phi(x, 0) dx + \int_0^b \phi(x, 0) dx = 0$$

Assim, a função (15) é solução fraca para a equação (1) sujeita à condição inicial (10), com $u_l = 0$ e $u_r = 1$.

3 I CONCLUSÃO

Com o auxílio do método das curvas características e as noções de solução fraca foi possível verificar soluções contínuas por partes de um problema físico descrito pela Equação de Burgers com viscosidade nula. As ferramentas descritas foram de grande importância para o conhecimento de tais soluções.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, D**ébora de Jesus;** CUMINATO, José Alberto. **Métodos Numéricos para Leis de Conservação**. Dissertação de Mestrado. São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.

PASA, B. C. **Equação de burgers: propriedades e comportamento assintótico**. Master’s thesis, PPGMAp/UFRGS, 2005.

YAMASHITA, W. M. S. **Introdução as Leis de Conservação e Aplicações**. Monografia. Juiz de Fora, Minas Gerais, 2014.

LEVEQUE, R. J. **Numerical Methods for Conservation Laws**. Birkhauser, Basel,1992.

SOBRE O ORGANIZADOR

Eliel Constantino da Silva - Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Brasil, e Universidade do Minho, Portugal, respectivamente. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e membro do Grupo de Pesquisa Ensino e Aprendizagem como Objeto da Formação de Professores (GPEA). Atuou como professor bolsista do Departamento de Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Tem interesse e desenvolve pesquisas nos seguintes temas: Educação Matemática, Pensamento Computacional, Robótica, Programação Computacional, Tecnologias Digitais na Educação, Ensino e Aprendizagem, Teoria Histórico-Cultural e Formação de Professores. Atualmente é doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), editor de conteúdo da Geekie, colunista do InfoGeekie, membro do Comitê Técnico Científico da Atena Editora, professor do Colégio Internacional Radial e desenvolve ações de formação de professores relacionadas ao uso de tecnologias e Pensamento Computacional na Educação.

ÍNDICE REMISSIVO

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-545-7
9 788572 475457