

# Ensino Aprendizagem de Matemática

Eliel Constantino da Silva  
(Organizador)



**Elie Constantino da Silva**  
(Organizador)

# **Ensino Aprendizagem de Matemática**

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2019 Os Autores  
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora  
Editora Executiva: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira  
Diagramação: Geraldo Alves  
Edição de Arte: Lorena Prestes  
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

#### **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

### **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.ª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof.ª Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof.ª Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
E59	Ensino aprendizagem de matemática [recurso eletrônico] / Organizador Eliel Constantino da Silva. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019.  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-545-7 DOI 10.22533/at.ed.457192008  1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino. 3. Professores de matemática – Formação. I. Silva, Eliel Constantino da.  CDD 510.7
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

Esta obra reúne importantes trabalhos que tem como foco a Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem em salas de aula do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

Os trabalhos abordam temas atuais e relevantes ao ensino e aprendizagem da Matemática, tais como: a relação da Matemática com a música no ensino de frações, livros didáticos e livros literários no ensino de Matemática, uso de instrumentos de desenho geométrico, jogos, animes e mangá como contribuições para o desenvolvimento da Matemática em sala de aula, análise dos problemas que envolvem o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, a ausência do pensamento matemático e argumento dedutivo na Educação Matemática, investigação e modelagem matemática, tendências em Educação Matemática, formação inicial de professores de Matemática e apresentam um aprofundamento da Matemática através dos dígitos verificadores do cadastro de pessoas físicas (CPF), simetria molecular, análise numérica e o Teorema de Sinkhorn e Knopp.

A importância deste livro está na excelência e variedade de abordagens, recursos e discussões teóricas e metodológicas acerca do ensino e aprendizagem da Matemática em diversos níveis de ensino, decorrentes das experiências e vivências de seus autores no âmbito de pesquisas e práticas.

O livro inicia-se com seis capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. Em seguida há 9 capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, seguidos de 4 capítulos que abordam a temática do livro no Ensino Superior. E por fim, encontram-se 10 capítulos que trazem em seu cerne a Matemática enquanto área do conhecimento, sem a apresentação de uma discussão acerca do seu ensino e do processo de aprendizagem.

Desejo a todos os leitores, boas reflexões sobre os assuntos abordados, na expectativa de que essa coletânea contribua para suas pesquisas e práticas pedagógicas.

Elie Constantino da Silva

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
RELAÇÕES ENTRE A MÚSICA E A MATEMÁTICA: UMA FORMA DE TRABALHAR COM FRAÇÕES	
<i>Enoque da Silva Reis</i> <i>Hemerson Milani Mendes</i> <i>Samanta Margarida Milani</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920081</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>14</b>
POSSIBILIDADES DIDÁTICAS E PEDAGÓGICAS DO USO DA IMAGEM VIRTUAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO ENVOLVENDO SEMIÓTICA EM UMA FANPAGE E LIVROS DIDÁTICOS	
<i>Luciano Gomes Soares</i> <i>José Joelson Pimentel de Almeida</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920082</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>26</b>
PIFE DA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO – UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA	
<i>Ítalo Andrew Rodrigues Santos</i> <i>Joao Paulo Antunes Carvalho</i> <i>Josué Antunes de Macêdo</i> <i>Lílian Isabel Ferreira Amorim</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920083</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>35</b>
O ENSINO DE MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DE LIVROS LITERÁRIOS EM TURMAS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
<i>Karine Maria da Cruz</i> <i>Lucília Batista Dantas Pereira</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920084</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>46</b>
RELATO DA UTILIZAÇÃO DE INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS	
<i>Luana Cardoso da Silva</i> <i>Washington Leonardo Quirino dos Santos</i> <i>Leonardo Cinésio Gomes</i> <i>Cristiane Fernandes de Souza</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920085</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>55</b>
ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DO JOGO VAI E VEM DAS EQUAÇÕES NO ENSINO DE EQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU	
<i>Anderson Dias da Silva</i> <i>Lucília Batista Dantas Pereira</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920086</b>	

**CAPÍTULO 7 ..... 68**

TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DOS PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O SEU ENSINO NO IFPB CAMPUS CAJAZEIRAS-PB

*Francisco Aureliano Vidal*  
*Carlos Lisboa Duarte*  
*Adriana Mary de Carvalho Azevedo*  
*Kíssia Carvalho*  
*Geraldo Herbetet de Lacerda*  
*Uelison Menezes da Silva*

**DOI 10.22533/at.ed.4571920087**

**CAPÍTULO 8 ..... 81**

OS JOGOS MATEMÁTICOS PARA MINIMIZAR A MATEMATOFOBIA DOS ALUNOS: UM ENCONTRO NO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

*Hellen Emanuele Vasconcelos Albino*  
*Yalorisa Andrade Santos*  
*Kátia Maria de Medeiros*

**DOI 10.22533/at.ed.4571920088**

**CAPÍTULO 9 ..... 90**

O ESTUDO DA PARÁBOLA NA FORMA CANÔNICA E COMO LUGAR GEOMÉTRICO

*Micheli Cristina Starosky Roloff*

**DOI 10.22533/at.ed.4571920089**

**CAPÍTULO 10 ..... 98**

LEONHARD EULER (1707-1783) E ESTUDO DA FÓRMULA DE POLIEDROS NO ENSINO MÉDIO

*Julimar da Silva Aguiar*  
*Eliane Leal Vasquez*

**DOI 10.22533/at.ed.45719200810**

**CAPÍTULO 11 ..... 116**

AUSÊNCIA DE PENSAMENTO MATEMÁTICO E ARGUMENTO DEDUTIVO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: RESULTADOS DE UMA PESQUISA

*Marcella Luanna da Silva Lima*  
*Abigail Fregni Lins*  
*Patricia Sandalo Pereira*

**DOI 10.22533/at.ed.45719200811**

**CAPÍTULO 12 ..... 129**

AS FORMAS GEOMÉTRICAS NO DESENHO (ANIMES, MANGÁ): UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA AO ENSINO DE GEOMETRIA

*Luciano Gomes Soares*  
*Tayná Maria Amorim Monteiro Xavier*  
*Mônica Cabral Barbosa*  
*Rosemary Gomes Fernandes*  
*Maria da Conceição Vieira Fernandes*

**DOI 10.22533/at.ed.45719200812**

<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>141</b>
A INVESTIGAÇÃO E A MODELAGEM MATEMÁTICA: UM ESTUDO EXPERIMENTAL COM A LARANJA CITRUS SENENSIS	
<i>Igor Raphael Silva de Melo</i>	
<i>Célia Maria Rufino Franco</i>	
<i>Marcos dos Santos Nascimento</i>	
<i>Villalba Andréa Vieira de Lucena</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200813</b>	
<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>150</b>
“A MAÇÃ DO PROFESSOR”: EXPLORANDO O CÁLCULO DO VOLUME DE UMA MAÇÃ EM AULAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA	
<i>Igor Raphael Silva de Melo</i>	
<i>Célia Maria Rufino Franco</i>	
<i>Isaac Ferreira de Lima</i>	
<i>João Elder Laurentino da Silva</i>	
<i>Jucimeri Ismael de Lima</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200814</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>160</b>
CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS: UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA	
<i>Júlio César dos Reis</i>	
<i>Aldo Brito de Jesus</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200815</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>171</b>
ESTADO DA ARTE SOBRE TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO/UFPE-CAA	
<i>Marcela Maria Andrade Teixeira da Silva</i>	
<i>Edelweis José Tavares Barbosa</i>	
<i>Maria Lucivânia Souza dos Santos</i>	
<i>Jéssika Moraes da Silva</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200816</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>181</b>
CONTRIBUIÇÕES DO PIBID NA FORMAÇÃO INICIAL DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA	
<i>Eduardo da Silva Andrade</i>	
<i>Eduarda de Lima Souza</i>	
<i>Fanciclaudio de Meireles Silveira</i>	
<i>Egracieli dos Santos Ananias</i>	
<i>Leonardo Cinésio Gomes</i>	
<i>Tiago Varelo da Silva</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200817</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>189</b>
A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO CURSO DE PEDAGOGIA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS	
<i>Meire Aparecida De Oliveira Lopes</i>	
<i>Liliane Oliveira Souza</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200818</b>	

<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>204</b>
OS DÍGITOS VERIFICADORES DO CADASTRO DE PESSOAS FÍSICAS (CPF)	
<i>Pedro Leonardo Pinto de Souza</i>	
<i>Vinícius Vivaldino Pires de Almeida</i>	
<i>Edney Augusto Jesus de Oliveira</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200819</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>218</b>
SIMETRIA MOLECULAR	
<i>Guilherme Bernardes Rodrigues</i>	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Teófilo Jacob Freitas e Souza</i>	
<i>Alonso Sepúlveda Castellanos</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200820</b>	
<b>CAPÍTULO 21</b> .....	<b>225</b>
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200821</b>	
<b>CAPÍTULO 22</b> .....	<b>235</b>
SOLUÇÕES FRACAS PARA EQUAÇÃO DE BURGERS COM VISCOSIDADE NULA	
<i>Ana Paula Moreira de Freitas</i>	
<i>Santos Alberto Enriquez-Remigio</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200822</b>	
<b>CAPÍTULO 23</b> .....	<b>244</b>
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO DE CRANK-NICOLSON	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200823</b>	
<b>CAPÍTULO 24</b> .....	<b>254</b>
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Gabriel Machado dos Santos</i>	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200824</b>	

<b>CAPÍTULO 25</b> .....	<b>265</b>
A IDEIA GEOMÉTRICA DA HOMOLOGIA E DO GRUPO FUNDAMENTAL	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Lígia Laís Fêmina</i>	
<i>Teófilo Jacob Freitas e Souza</i>	
<i>Joyce Antunes da Silva</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200825</b>	
<b>CAPÍTULO 26</b> .....	<b>271</b>
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200826</b>	
<b>CAPÍTULO 27</b> .....	<b>280</b>
TEOREMA DE SINKHORN E KNOPP	
<i>Gabriel Santos da Silva</i>	
<i>Daniel Cariello</i>	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Joyce Antunes da Silva</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200827</b>	
<b>CAPÍTULO 28</b> .....	<b>285</b>
O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA UTILIZANDO PROJEÇÃO PARA ÓCULOS ANAGLIFO	
<i>Rosângela Costa Bandeira</i>	
<i>Aécio Alves Andrade</i>	
<i>Hudson Umbelino dos Anjos</i>	
<i>Jarles Oliveira Silva Nolêto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200828</b>	
<b>CAPÍTULO 29</b> .....	<b>298</b>
O USO DE SOFTWARES EDUCACIONAIS COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
<i>Cristiane Batista da Silva</i>	
<i>Aécio Alves Andrade</i>	
<i>Hudson Umbelino dos Anjos</i>	
<i>Jarles Oliveira Silva Nolêto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200829</b>	
<b>SOBRE O ORGANIZADOR</b> .....	<b>309</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO</b> .....	<b>310</b>

## SOLUÇÕES FRACAS PARA EQUAÇÃO DE BURGERS COM VISCOSIDADE NULA

**Ana Paula Moreira de Freitas**

Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia - MG

**Santos Alberto Enriquez-Remigio**

Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia - MG

**RESUMO:** As soluções não diferenciáveis para equações diferenciais parciais aparecem na maior parte das aplicações físicas, tais soluções são conhecidas como soluções fracas. Aqui introduz-se o conceito de solução fraca usando a equação de Burgers com viscosidade nula e apresentam-se duas destas soluções para essa equação.

**PALAVRAS-CHAVE:** Solução Fraca. Equação de Burgers. Método das Curvas Características. Problema de Riemann.

### WEAK SOLUTIONS FOR EQUATIONS OF BURGERS WITH ZERO VISCOSITY

**ABSTRACT:** Non-differentiable solutions for partial differential equations appear in most physical applications, such solutions are known as weak solutions. Here we introduce the concept of weak solution using the Burgers equation with zero viscosity and present two of these solutions for this equation.

**KEYWORDS:** Weak Solution. Burgers equation.

Method of Characteristics Curves. Riemann's problem.

### 1 | INTRODUÇÃO

É comum a indagação à respeito da existência de uma solução suave (também conhecida como solução clássica) de uma Equação Diferencial Parcial (EDP), isto é, uma solução com derivadas contínuas, quantas forem necessárias, que satisfaça a EDP. Porém, na maioria das aplicações físicas aparecem soluções descontínuas, daí a importância e a necessidade de conhecer os mecanismos de obtenção de tais soluções. Estas soluções são conhecidas como soluções fracas e aqui serão apresentadas duas soluções fracas para a equação de Burgers com viscosidade nula.

### 2 | METODOLOGIA

A equação de Burgers é um modelo simplificado derivado das Equações de Navier-Stokes e foi introduzida originalmente por J. M. Burgers em seus estudos sobre turbulência em fluidos, aparecendo como um modelo básico em diversos outros fenômenos onde efeitos de advecção não-lineares e difusão linear desempenham papel importante (PASA, 2005).

A equação de Burgers com viscosidade nula, escrita na forma não conservativa é:

$$u_t + uu_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[ \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Já a versão conservativa é dada por:

$$u_t + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[ \quad (3)$$

Uma das técnicas para determinação da solução de (3) consiste em transformar a EDP em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Tal técnica é conhecida como Método das Curvas Características.

## 2.1 Método das Curvas Características

O método das curvas características consiste em transformar o Problema de Valor Inicial associado a um conjunto de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) em um sistema de Problemas de Valor Inicial de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Assim, resolvendo o sistema de EDOs, caso seja possível, obtém-se a solução da EDP.

Para o PVI, (1) e (2), as EDOs associadas e denominadas de equações características, são:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad (4)$$

sujeito as seguintes condições iniciais, respectivamente:

$$x(0) = x_0, \quad u(0) = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0) \quad (5)$$

em que,  $u = \hat{u}(t) = u(x(t), t)$  é função de uma variável independente. Integrando as EDO's obtém-se a curva característica  $x = ut + c_1$  e  $u = c_2$ , sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes. Aplicando as condições iniciais, (5), nas soluções obtidas, tem-se:

$$x(0) = c_1 = x_0, \quad u(0) = u_0(x_0) = c_2 \quad (6)$$

Logo, tem-se que  $x_0 = c_1 = x - ut$  e  $u(t) = u(x(t), t) = u_0(x_0)$ . Então,  $u(x(t), t) = u_0(x - ut)$ , e portanto, a solução da equação de Burgers é dada por:

$$u(x, t) = u_0(x - ut) \quad (7)$$

A curva característica é dada por:

$$x(t) = ut + x_0, \quad (8)$$

E pode ser reescrita como:

$$t = \frac{x - x_0}{u}, \quad (9)$$

Observa-se que essas curvas são retas com coeficiente angular  $tg\theta = \frac{1}{u}$ , quando  $u$  varia, os coeficientes angulares das retas características também variam. Logo, as retas podem se cruzar ou não, formando ondas de choque ou ondas de rarefação, respectivamente (Leveque, 1992).

Para a condição inicial:

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x < 0 \\ u_r, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (10)$$

em que  $u_l$  e  $u_r$  são constantes chamadas de estado inicial à esquerda e à direita, respectivamente. O problema é denominado de Problema de Riemann e a Fig. 1 mostra a representação de sua condição inicial para  $u_l > u_r$ .

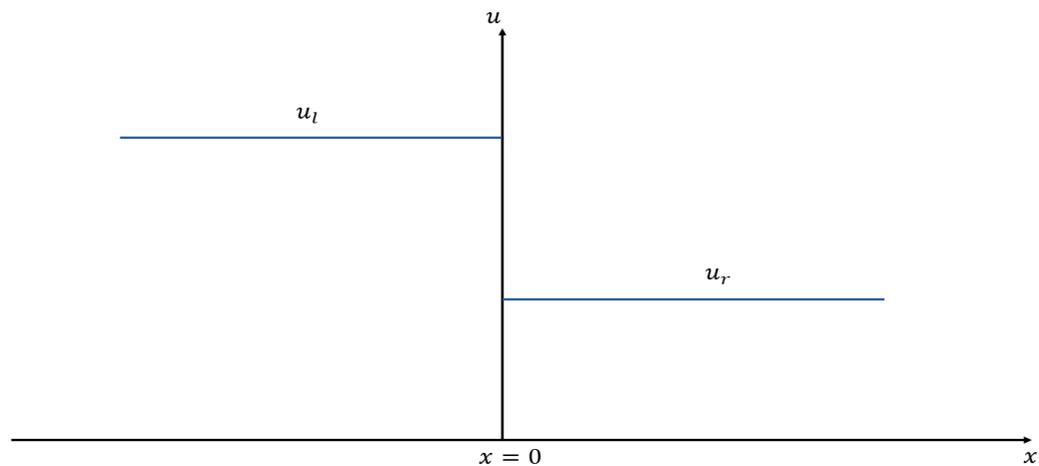


Figura1: Condição inicial para o Problema de Riemann com  $u_l > u_r$ .

## 2.2 Solução Fraca

Considerando o problema de valor inicial:

$$u_t + \frac{1}{2} \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (11)$$

com condição inicial:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (12)$$

Definindo o conjunto das funções testes,  $C_0^1$ , como  $C_0^1 = \{\phi \in C^1: \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty): \phi(x, t) \neq 0\} \subset [a, b] \times [0, T], \text{ para algum } a, b \text{ e } T\}$ .

Nota-se que  $\phi$  é continuamente diferenciável e anula-se fora de um retângulo no plano  $x - t$ .  $[0, \infty)$ . Tais funções são ditas funções com suporte compacto em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ . Ao suporte de  $\phi$ , denota-se  $\text{supp}(\phi)$ , e é o conjunto no qual  $\phi$  não é identicamente nulo.

Multiplicando a EDP (11) por  $\phi \in C_0^1$  e integrando em relação a  $t$  de  $0$  a  $\infty$  e em relação a  $x$  de  $-\infty$  a  $\infty$ , obtém-se:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u_t + f(u)_x] \phi(x, t) dx dt = 0 \quad (13)$$

Aplicando integração por partes com o intuito de eliminar as derivadas em  $u$  e em  $f(u)$  e usando o fato que a função  $\phi \in C_0^1$ , tem-se:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u \phi_t + f(u) \phi_x] dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0 \phi_0 dx = 0 \quad (14)$$

em que  $u_0 = u(x, 0)$  é a condição inicial e  $\phi_0$  é uma notação para  $\phi(x, 0)$ .

**Definição 1.** Se  $u$  satisfaz a equação (14) para todo  $\phi \in C_0^1$ , então a função  $u$  é denominada de solução fraca para o problema de valor inicial (11) e (12).

**Proposição 1.** Se  $u$  é uma solução para o problema de valor inicial (11) e (12), então  $u$  satisfaz (14) para todo  $\phi \in C_0^1$ .

**Proposição 2.** Se  $u$  é continuamente diferenciável em relação a  $x$  e  $t$  e satisfaz a equação (14) para todo,  $\phi \in C_0^1$  então  $u$  é uma solução clássica do problema de valor inicial (11) e (12).

Podem existir soluções fracas que não são soluções clássicas para o problema de valor inicial (11) e (12), pois funções que satisfazem a equação (14) podem não ser diferenciáveis. E podem existir soluções fracas que não são soluções físicas (BEZERRA; CUMINATO, 2003)

### 2.3 Solução Fraca para o Problema de Riemann Associado a Equação de Burgers

Uma solução fraca,  $u$ , obtida pelo método das curvas características para o PVI (1) e (10) é:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x \leq \frac{t}{2} \\ u_r, & \text{se } x > \frac{t}{2} \end{cases} \quad (15)$$

A verificação disso será feita para o caso  $u_l < u_r$  e  $u_l > u_r$ .

O desenvolvimento para mostrar que (15) é solução fraca para a equação (1) sujeita à condição inicial (10) para os casos  $u_l > u_r$  e  $u_l < u_r$  e  $u_l < u_r$  utilizam a definição 1 e as proposições 1 e 2, mostradas acima, de Yamashita (2014).

**Caso  $u_l > u_r$ :**

De (3) tem-se que  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ , então  $f'(u) = u$ . Isso implica que os coeficientes angulares das curvas características, satisfazem  $\frac{1}{u_l} < \frac{1}{u_r}$ , que indica que as curvas características se cruzam em algum momento, formando ondas de choque (Leveque, 1992).

Seja  $R$  igual a:

$$R = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0\phi_0 dx$$

Substituindo o valor de  $f$  e integrando em  $[0, T] \times [a, b]$  ( $\text{supp}(\phi) \subset [a, b] \times [0, T]$ ), tem-se:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x] dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0\phi_0 dx = \int_0^T \int_a^b [u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x] dx dt + \int_a^b u_0\phi_0 dx \\ R &= \int_0^T \int_a^{t/2} [u_l\phi_t + \frac{u_l^2}{2}\phi_x] dx dt + \int_0^T \int_{t/2}^b [u_r\phi_t + \frac{u_r^2}{2}\phi_x] dx dt + \int_a^b u_0(x)\phi_0 dx \\ &\quad + \int_0^b u_0(x)\phi_0 dx \end{aligned} \quad (16)$$

A seguir considera-se  $u_l = 1$  e  $u_r = 0$ , respeitando a restrição de que  $u_l > u_r$  e não altera o processo do cálculo do valor de  $R$ .

Como  $u \neq 0$  em  $\{(x, t) / a \leq x \leq \frac{t}{2} \text{ e } 0 \leq t \leq T\}$ , então a expressão (16) pode ser reescrita como segue:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^T \int_a^{t/2} [\phi_t + \frac{\phi_x}{2}] dx dt + \int_a^b u_0(x)\phi_0 dx \\ R &= \int_0^T \int_a^{t/2} \phi_t dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_a^{t/2} \phi_x dx dt + \int_a^b \phi_0 dx \end{aligned}$$

Sejam:

$$A = \int_0^T \int_a^{t/2} \phi_t dx dt$$

$$B = \int_0^T \int_a^{t/2} \frac{\phi_x}{2} dx dt$$

Então:

$$R = A + B + \int_a^0 \phi_0 dx \quad (17)$$

Por outro lado:

$$B = \int_0^T \int_a^{t/2} \frac{\phi_x}{2} dx dt = \int_0^T \frac{[\phi(\frac{t}{2}, t) - \phi(a, t)]}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^T [\phi(\frac{t}{2}, t) - \phi(a, t)] dt$$

Lembrando que  $\phi(a, t) = 0$  e fazendo  $x = t/2$ , tem-se:

$$B = \frac{1}{2} \int_0^{T/2} \phi(x, 2x) 2dx = \int_0^{T/2} \phi(x, 2x) dx$$

E usando a mudança da ordem de integração na integral A, tem-se:

$$A = \int_a^0 \int_0^T \phi_t dt dx + \int_0^{T/2} \int_{2x}^T \phi_t dt dx +$$

$$A = \int_a^0 [\phi(x, T) - \phi(x, 0)] dx + \int_0^{T/2} [\phi(x, T) - \phi(x, 2x)] dx$$

A Fig. 2 mostra a área de integração para o caso  $u_l > u_r$ .

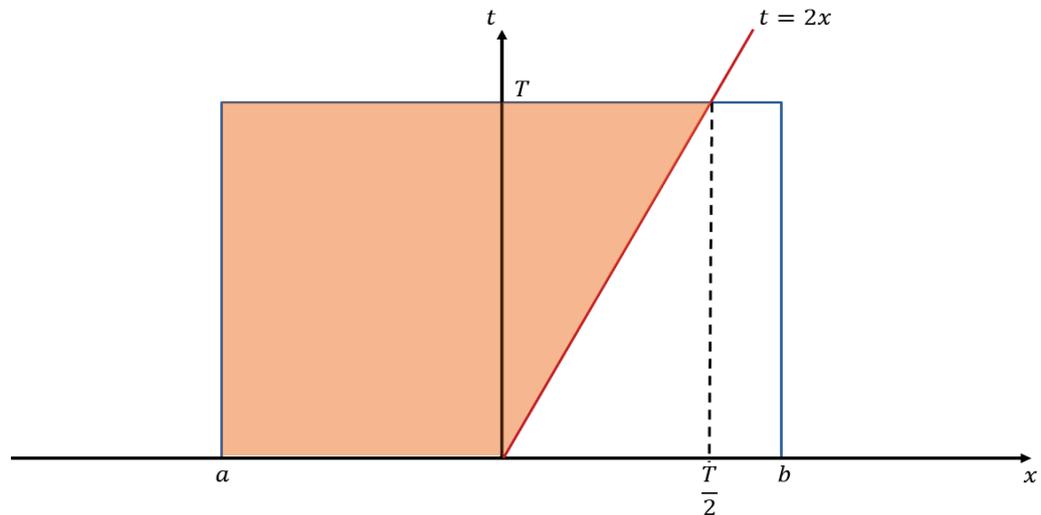


Figura 2: Área de integração para o caso  $u_l > u_r$ .

Substituindo  $A$  e  $B$  em  $R$  (equação (17)). Obtém-se:

$$R = \int_a^0 [\phi(x, T) - \phi(x, 0)] dx + \int_0^{T/2} [\phi(x, T) - \phi(x, 2x)] dx + \int_0^{T/2} \phi(x, 2x) dx + \int_a^0 \phi_0 dx$$

Lembrando que  $\phi(x, T) = 0$  e  $\phi_0 = \phi(x, 0)$ , logo:

$$R = - \int_a^0 \phi(x, 0) dx - \int_0^{T/2} \phi(x, 2x) dx + \int_0^{T/2} \phi(x, 2x) dx + \int_a^0 \phi(x, 0) dx = 0$$

Assim, a função (15) é solução fraca para a equação (1) sujeita à condição inicial (10), com  $u_l = 1$  e  $u_r = 0$ .

**Caso  $u_l < u_r$ :**

De forma análoga ao caso anterior,  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$  e  $f'(u) = u$ . Isso implica que os coeficientes angulares das curvas características, satisfazem  $\frac{1}{u_l} > \frac{1}{u_r}$ , que indica que as curvas características nunca se interceptam, formando ondas de rarefação (Leveque, 1992).

Seja  $R$  igual a:

$$R = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0\phi_0 dx$$

Substituindo o valor de  $f$  e integrando no suporte da função  $\phi$ , tem-se:

$$R = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x] dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0\phi_0 dx = \int_0^T \int_0^b [u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x] dx dt + \int_a^b u_0\phi_0 dx$$

$$R = \int_0^T \int_a^{t/2} [u_l\phi_t + \frac{u_l^2}{2}\phi_x] dx dt + \int_0^T \int_{t/2}^b [u_r\phi_t + \frac{u_r^2}{2}\phi_x] dx dt + \int_a^0 u_0(x)\phi_0 dx + \int_0^b u_0(x)\phi_0 dx$$

Respeitando a restrição de que  $u_l < u_r$ , pode-se fazer  $u_l = 0$  e  $u_r = 1$ , então:

$$R = \int_0^T \int_{t/2}^b \phi_t dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{t/2}^b \phi_x dx dt + \int_0^b \phi_0 dx$$

$$R = \int_0^T \int_{t/2}^b \phi_t dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T (\phi(b, t) - \phi(t/2, t)) dt + \int_0^b \phi_0 dx$$

Como  $\phi(b, t) = 0$  e fazendo  $x = t/2$ , tem-se:

$$R = \int_0^T \int_{t/2}^b \phi_t dx dt - \frac{1}{2} \int_0^{T/2} \phi(x, 2x) 2 dx + \int_0^b \phi_0 dx$$

$$R = \int_0^T \int_{t/2}^b \phi_t dx dt - \int_0^{T/2} \phi(x, 2x) dx + \int_0^b \phi_0 dx$$

$$R = \int_0^T \int_{t/2}^b \phi_t dx dt + \int_{T/2}^0 \phi(x, 2x) dx + \int_0^b \phi_0 dx \quad (18)$$

A Fig. 3 mostra a área de integração para o caso  $u_l < u_r$ .

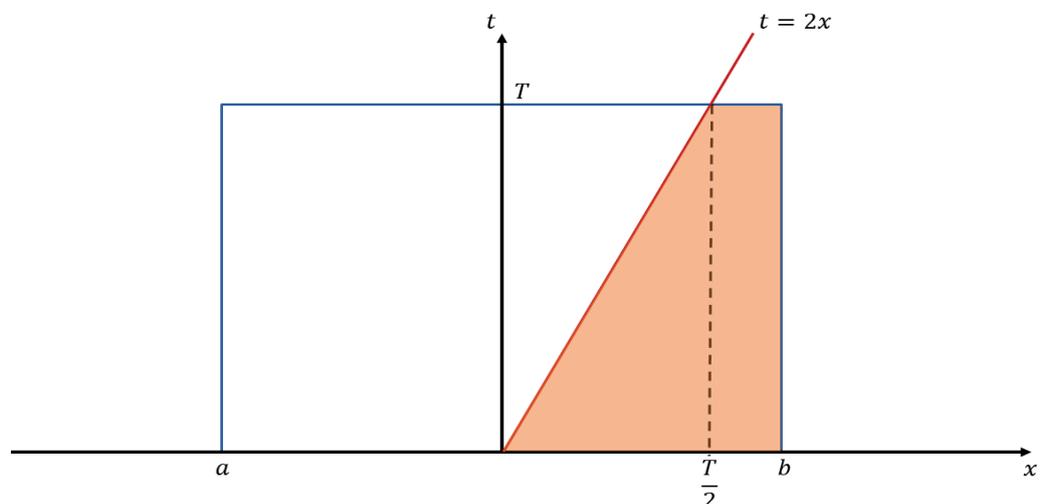


Figura 3: Área de integração para o caso  $u_l < u_r$ .

Da Fig. 3, é possível mudar o domínio de integração da integral dupla em (18), logo:

$$R = \int_0^{T/2} \int_0^{2x} \phi_t dt dx + \int_{T/2}^b \int_0^T \phi_t dt dx + \int_{T/2}^0 \phi(x, 2x) dx + \int_0^b \phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T/2} (\phi(x, 2x) - \phi(x, 0)) dx + \int_{T/2}^b (\phi(x, T) - \phi(x, 0)) dx + \int_{T/2}^0 \phi(x, 2x) dx + \int_0^b \phi_0 dx$$

Como  $\phi(x, T) = 0$ , tem-se:

$$R = \int_0^{T/2} \phi(x, 2x) dx + \int_{T/2}^0 \phi(x, 2x) dx - \int_0^b \phi(x, 0) dx + \int_0^b \phi(x, 0) dx = 0$$

Assim, a função (15) é solução fraca para a equação (1) sujeita à condição inicial (10), com  $u_l = 0$  e  $u_r = 1$ .

### 3 | CONCLUSÃO

Com o auxílio do método das curvas características e as noções de solução fraca foi possível verificar soluções contínuas por partes de um problema físico descrito pela Equação de Burgers com viscosidade nula. As ferramentas descritas foram de grande importância para o conhecimento de tais soluções.

### REFERÊNCIAS

BEZERRA, Débora de Jesus; CUMINATO, José Alberto. **Métodos Numéricos para Leis de Conservação**. Dissertação de Mestrado. São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.

PASA, B. C. **Equação de burgers: propriedades e comportamento assintótico**. Master's thesis, PPGMAp/UFRGS, 2005.

YAMASHITA, W. M. S. **Introdução as Leis de Conservação e Aplicações**. Monografia. Juiz de Fora, Minas Gerais, 2014.

LEVEQUE, R. J. **Numerical Methods for Conservation Laws**. Birkhauser, Basel, 1992.

## **SOBRE O ORGANIZADOR**

**Eliei Constantino da Silva** - Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Brasil, e Universidade do Minho, Portugal, respectivamente. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e membro do Grupo de Pesquisa Ensino e Aprendizagem como Objeto da Formação de Professores (GPEA). Atuou como professor bolsista do Departamento de Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Tem interesse e desenvolve pesquisas nos seguintes temas: Educação Matemática, Pensamento Computacional, Robótica, Programação Computacional, Tecnologias Digitais na Educação, Ensino e Aprendizagem, Teoria Histórico-Cultural e Formação de Professores. Atualmente é doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), editor de conteúdo da Geekie, colunista do InfoGeekie, membro do Comitê Técnico Científico da Atena Editora, professor do Colégio Internacional Radial e desenvolve ações de formação de professores relacionadas ao uso de tecnologias e Pensamento Computacional na Educação.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Anos Finais do Ensino Fundamental 46

Aprendizagem 2, 25, 69, 100, 140, 170

### D

Desenho Geométrico 46, 130, 140

### E

Educação Básica 34, 47, 121, 139, 179, 180, 181, 182

Educação Matemática 5, 1, 15, 16, 18, 25, 26, 35, 37, 45, 54, 55, 57, 66, 80, 81, 100, 101, 102, 114, 116, 127, 140, 142, 149, 158, 159, 170, 171, 172, 173, 176, 177, 179, 188, 189, 191, 192, 197

Elementos para esboço gráfico 90

Ensino 2, 5, 8, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 25, 27, 34, 35, 36, 40, 46, 47, 48, 55, 57, 58, 60, 61, 67, 68, 69, 76, 79, 80, 81, 84, 88, 89, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 100, 103, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 122, 126, 127, 129, 131, 133, 139, 142, 149, 158, 170, 174, 175, 180, 183, 184, 185, 187, 189, 191, 193

Ensino de Geometria 46, 48, 129

Ensino de Matemática 14, 27, 76, 79, 80, 103, 113, 127, 142

Ensino Médio 5, 8, 13, 55, 57, 58, 60, 61, 67, 68, 69, 81, 84, 89, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 103, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 118, 122, 126, 127, 129, 131, 133, 139, 175, 184, 185, 187

Ensino Superior 5, 184, 189

Equações do 1º e do 2º grau 55

Estratégia de Ensino 98

### F

Fórmula de Poliedro 98

Fração 1, 3

### G

GeoGebra 90, 92, 93, 95, 96, 116, 117, 118, 121, 122, 123, 126, 127

### H

História da Matemática 13, 54, 98, 99, 100, 101, 102, 113, 114, 115, 173, 174, 175, 176

### I

Imagem virtual 14

### J

Jogos Educativos 26

Jogos Matemáticos 55, 66, 81, 88, 89

### L

Laboratório de Matemática 81, 82, 84, 85, 86

Literatura 35, 37, 38, 43, 44

Lugar geométrico 90

## **M**

Matemática 2, 5, 9, 1, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67, 69, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 105, 106, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 121, 124, 125, 126, 127, 129, 131, 132, 137, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 147, 149, 150, 151, 152, 158, 159, 160, 161, 162, 164, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 197, 202, 203, 217, 218, 224, 270

Matematofobia 81, 82

Música 1, 13

## **P**

Parábola na forma canônica 90

PIBID 9, 26, 27, 28, 34, 56, 129, 130, 133, 181, 182, 183, 184, 186, 187, 188

## **R**

Registros de representação 14, 25

Resolução de Problemas 55, 57, 58, 102, 173, 174, 176

## **S**

Semiótica 14, 15, 16, 18, 19, 25

## **T**

Trigonometria 5, 69

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-545-7



9 788572 475457