Kelly Cristina Campones
(Organizadora)

A Interlocução de Saberes na Formação Docente

Atena Editora
Ano 2019

Kelly Cristina Campones
(Organizadora)

A Interlocução de Saberes na Formação Docente

Atena Editora
2019

2019 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I61 A interlocução de saberes na formação docente 1 [recurso eletrônico] / Organizadora Kelly Cristina Campones. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. – (A Interlocução de Saberes na Formação Docente; v. 1)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-532-7
DOI 10.22533/at.ed.327191408

1. Educação – Estudo e ensino – Avaliação. 2. Professores – Formação – Brasil. I. Campones, Kelly Cristina. II. Série.

CDD 370.71

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2019

APRESENTAÇÃO

Compreende-se que a formação de professores é uma área de pesquisa abrangente e de longa data, que vem apresentando grandes desafios: seja nas políticas públicas envolvidas, seja nas experiências adquiridas durante seu período de formação e/ou na compreensão sobre a consciência desse processo, no que tange a apropriação de saberes necessários à inserção na docência.

Neste sentido, a obra: "A interlocução dos saberes na formação docente" foi organizado considerando as pesquisas realizadas nas diferentes modalidades de ensino bem como, nas suas interfaces ligadas na área da saúde, inclusão, cultura, entre outras. Aborda uma série de livros de publicação da Atena Editora, em seu I volume, apresenta, em seus 24 capítulos, as pesquisas relativas à Educação Infantil e o Ensino Fundamental I e II .

O volume II, composto por pesquisas relativas ao Ensino Superior perpassando pelo ensino da Educação de Jovens e Adultos , educação profissional e inovações e no seu terceiro volume, aspectos da formação de professores nas tratativas de inclusão bem como, a importância do papel do coordenador(a) e algumas práticas profissionais considerando a relação cultural como fator preponderante no desenvolvimento das práticas educacionais.

Cabe aqui apontar que, os diferentes saberes fundamentam o trabalho dos professores e pode se estabelecer a partir de um processo de enfrentamento dos desafios da prática, resultante em saberes, entretanto pode também ser resultado das resistências.

As suas relações com a exterioridade fazem com que, muitas vezes, valorizem-se muito os saberes experienciais, visto que, as situações vividas podem até ser diferentes, todavia guardam proximidades e resultam em estratégias e alternativas prévias para outras intercorrências.

A mediação entre as práticas de ensino docente frente às atividades propostas adotadas é envolta em uma dinâmica da sala de aula e por consequência na obtenção do conhecimento. Esse "[...] processo dinâmico, contraditório e conflituoso que os saberes dessa prática profissional são construídos e reconstruídos" (ROMANOWSKI, 2007, p.55).

Aos autores dos diversos capítulos, pela dedicação e esforços sem limites, que viabilizaram esta obra que retrata pesquisas que nos leva ao repensar das ações educacionais, os agradecimentos dos Organizadores e da Atena Editora.

Por fim, esperamos que as pesquisas aqui descritas possam colaborar e instigar mais estudantes e pesquisadores na constante busca de aprofundar e/ou buscar inovar na área da interlocução dos saberes na formação docente e, assim, possibilitar sobre os aspectos quantitativos e qualitativos a busca constante das melhorias da formação docente brasileira.

Kelly Cristina Campones

SUMÁRIO

CAPÍTULO 18

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS INTERPRETAÇÕES GEOMÉTRICAS

Elizandre Medianeira Silva dos Santos
EMEF Prof. Moacyr de Araújo Pires
Capão da Canoa-RS

Carmen Mathias
UFSM- Universidade Federal de Santa Maria-Dep. Matemática
Santa Maria -RS

Alice de Jesus Kozakevicius
UFSM- Universidade Federal de Santa Maria-Dep. Matemática
Santa Maria - RS

RESUMO: Neste trabalho, as operações com números complexos são exploradas via suas propriedades geométricas por meio da investigação Matemática com o software GeoGebra, diferentemente do enfoque usual dos livros didáticos. São apresentadas algumas considerações sobre o ensino dos números complexos, comprovando que a abordagem por meio de recursos computacionais e com enfoque investigativo pode ser uma alternativa para o estudo de números complexos. Como contribuição principal, é apresentada uma proposta de atividade didática a ser desenvolvida com o auxílio do software GeoGebra, com exploração de seus recursos visuais disponíveis, o que possibilita a observação de propriedades e particularidades desse conjunto numérico.
PALAVRAS-CHAVE: Números complexos. Investigação matemática. GeoGebra.

MATHEMATICAL RESEARCH WITH GEOGEBRA: OPERATIONS WITH COMPLEX NUMBERS AND THEIR GEOMETRIC INTERPRETATIONS

ABSTRACT: In this work operations with complex numbers are presented with a different approach to the one given in textbooks, since their geometric properties are explored through mathematical investigation by the software GeoGebra. Some considerations are presented about the teaching of complex numbers and the use of information and communication technologies. As the main contribution of this work a proposal of educational activities is presented to be solved with the help of the software GeoGebra, exploring its available visualization resources, allowing the observation of properties and specific characteristics of this numerical set.
KEYWORDS: Complex numbers. Mathematical investigation. Computational resources. Software GeoGebra.

1 I INTRODUÇÃO

O estudo sobre números e os diferentes conjuntos numéricos vem seguindo uma abordagem quase que universal na maioria das escolas brasileiras e estrangeiras, inclusive em instituições de países que seguem o tratado de Bolonha (Universia-online). Inicialmente, os números naturais são apresentados, e processos de contagem são introduzidos como consequência imediata desses valores. Depois, números negativos são então apresentados como solução de equações do tipo $x+a=b$, em que a e b são números naturais. As frações surgem como forma de resolução de equações do tipo $ax=b$, quando b não for divisível por a. A existência de números reais é então motivada pela necessidade de resolução de equações do tipo $x^2 = 2$. Finalmente, os números complexos são apresentados como parte final desta jornada, como uma alternativa para a resolução de uma equação até então proibida: $x^2 = -1$, (Kline, 1972).

Nesse processo, mesmo quando os tópicos abordados são apresentados no Ensino Médio, não é incomum a total omissão de aspectos históricos que poderiam esclarecer e enriquecer a compreensão de como ocorreu a evolução do raciocínio lógico ao longo dos séculos de estruturação da ciência. Por mais estranho e ilógico que possa parecer, o desenvolvimento e a aceitação da teoria sobre números complexos ocorreu em paralelo com o desenvolvimento e a aceitação dos números negativos e a resolução de equações de terceiro grau (Merino, 2006). Dessa forma, o espanto e a desconfiança apresentados por alunos do Ensino Médio, apontados por Almeida (2013, p. 3) após um estudo preliminar sobre os números complexos, apenas ratifica uma dificuldade natural que permeou séculos de evolução da matemática e que ainda hoje necessita ser tratada de forma cuidadosa e sistemática para que no final do processo de aprendizagem sejam obtidas respostas a questionamentos (ainda tão comuns entre nossos estudantes): “Números Complexos existem?”, “Esse assunto serve para alguma coisa?”, “Números complexos podem ser aplicados na resolução de algum problema com significado físico?”.

Na tentativa de se utilizar uma linguagem atual e recursos computacionais que possam estimular o público-alvo do século 21, já familiarizado com o uso de tecnologias em seu cotidiano, o trabalho proposto procura, na perspectiva da investigação matemática, apresentar propostas de atividades para o ensino e aprendizagem de números complexos com a exploração e utilização de tais recursos para a visualização e compreensão da operação multiplicação com aritmética complexa. As sugestões apresentadas aqui buscam diminuir o distanciamento entre o material usualmente apresentado em textos básicos e os conhecimentos necessários (assumidos como pré-requisito) para aqueles que desejam ingressar em cursos superiores da área de ciências exatas.

Outro objetivo do presente trabalho é promover uma nova percepção sobre recursos computacionais pouco explorados no contexto de ensino e aprendizagem sobre números complexos, mas que oferecem um potencial significativo para a experimentação de seus conceitos e propriedades. Em particular, chama-se a atenção para o aplicativo GeoGebra, um software de Matemática Dinâmica, inicialmente idealizado para o ensino de geometria, que, no entanto, vem se tornando cada vez mais uma alternativa eficiente para o desenvolvimento de material de apoio para diversas disciplinas e é utilizado aqui para o desenvolvimento das atividades propostas.

Estudos anteriores (Silva, 2014; Almeida, 2013; Contini, 2014) exploram a utilização de números complexos na resolução de problemas que envolvem tópicos de Geometria Analítica e Geometria Plana e também na compreensão das operações elementares e suas interpretações geométricas no plano. Nesse contexto, o trabalho apresentado aqui se alinha às propostas anteriores e apresenta atividades didáticas na perspectiva da investigação matemática com o GeoGebra, utilizando-o como principal recurso computacional para ilustrar e explorar propriedades dos números complexos, suas operações (em particular a multiplicação e potenciação) e seu potencial de utilização como ferramenta matemática, capaz de expressar ações relevantes para diferentes aplicações. Assim, pretende-se, com este trabalho, buscar uma forma de amenizar o grande estigma que esses números carregam, muito antes até do século 18, quando foram batizados por Gauss como sendo números complexos (Merino, 2006), com o intuito de expressar a estranheza que suas construções haviam causado até então e continuam causando até hoje.

2 I UM OLHAR SOBRE O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS EM INSTITUIÇÕES NACIONAIS

É de senso comum que em muitas instituições nacionais, alguns tópicos no Ensino Médio podem ser negligenciados em detrimento de outros, que são cobrados com maior ênfase em exames de acesso ao ensino superior. Um exemplo dentro da disciplina de Matemática são os Números Complexos.

O conteúdo sobre Números Complexos não é contemplado na Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do Exame Nacional do Ensino Médio (Brasil, 2012), que atualmente tende a ser a porta de entrada da grande maioria das universidades brasileiras. Essa relegação dos Números Complexos também contribui para um distanciamento entre o que é visto no Ensino Médio e os pré-requisitos necessários para os estudantes da área de ciências exatas. Além disso, apesar de vários esforços para a contextualização de conteúdos de Matemática, ainda há, nas escolas nacionais, uma dificuldade com relação ao ensino de Números Complexos e em como conectá-los aos demais conteúdos do Ensino Médio. Quando se fala em conexões multidisciplinares, este se torna um desafio ainda maior. E a lacuna criada nesse processo é traduzida no impacto inicial que os estudantes sofrem ao ingressarem no Ensino Superior.

Analisando em particular dados disponibilizados por uma universidade pública, no interior do estado do Rio Grande do Sul, o conteúdo sobre Números

Complexos faz parte, atualmente, da súmula de algumas disciplinas. Para os cursos de Licenciatura em Matemática, é ofertada a disciplina denominada Trigonometria e Números Complexos. A disciplina Variável Complexa é ofertada para o curso de Bacharelado em Matemática e para os cursos de Engenharia Elétrica, Engenharia da Computação e Engenharia Acústica.

Uma perspectiva em relação às dificuldades enfrentadas pelos alunos nas disciplinas supracitadas pode ser evidenciada por meio de um levantamento inicial, feito entre 2013 e 2015 junto às coordenações dos cursos de Matemática e Engenharia Elétrica da referida universidade. Conforme a Tabela 1, o índice de reprovação, obtido por meio do número de vagas ofertadas e o número de reprovados, é alto, e sinaliza a necessidade de algum tipo de intervenção.

Disciplina	Curso	Ano/ semestre	Vagas Ocupadas	Reprovados	Índice de Reprovação (%)
Trigonometria e Números Complexos	Matemática Licenciatura/ Bacharelado	2013/2	40	9	22,5
		2014/1	53	19	35,85
		2014/2	40	9	22,5
		2015/1	58	30	51,7
Variável Complexa	Matemática Bacharelado	2014/1	Não houve turma		
		2015/1	7	5	71
Variável Complexa	Engenharia Elétrica	2014/1	27	10	37,03
		2014/2	15	9	60
		2015/1	24	6	25

Tabela 1 - Índice de reprovação Trigonometria e Números Complexos e Variável Complexa

Fonte: Dados da pesquisa

Mesmo sendo índices para um período de apenas quatro semestres, eles motivam uma reflexão sobre a relevância em se desenvolver alternativas pedagógicas que possam motivar os estudantes quanto a essas disciplinas e tornar mais acessível e eficiente o processo de ensino e aprendizagem para Números Complexos.

Com o objetivo de articular as competências gerais que se projeta para o Ensino Médio, o Ministério da Educação publicou as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Nacionais, nas quais foram apresentadas sugestões de práticas educativas e de organização curricular, em âmbito nacional, a saber:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e

> estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (Brasil, 2002, p. 111).

Nesse sentido, percebe-se que a Matemática do Ensino Médio deve proporcionar ao aluno a aquisição de uma parte importante do conhecimento, a fim de que ele possa ler e interpretar a realidade. Acredita-se que trazer a Matemática para o cotidiano dos alunos fará com que estes entendam que o mundo que os cerca pode ser considerado como um grande laboratório no qual tudo que se aprende em sala de aula é posto em prática.

Ainda Brasil (2002), quando se refere aos Números Complexos afirma:

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. Brasil (2002, p. 122).

O estudo dos Números Complexos no Ensino Médio, em algumas situações, é elencado como um tema de segundo plano, e um dos motivos que leva a essa percepção é o fato de este conteúdo não ser indicado com relevância máxima e obrigatoriedade pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

> Os números complexos ocupam uma posição muito singular no ensino da matemática. Não merecem grande atenção nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em matemática, por serem considerados como “assunto elementar” de nível médio. Já no Ensino Médio, são evitados, sendo taxados de estranhos, de compreensão difícil e, sobretudo, inúteis (Carneiro, 2004, p. 1).

Acredita-se que se o olhar dado ao ensino de Números Complexos fosse diferente, trazendo aos alunos uma nova perspectiva sobre esse conteúdo, talvez fossem encontradas respostas para as questões e inquietações inicialmente apontadas neste trabalho. Dessa forma, opta-se por planejar atividades de apoio para a compreensão e assimilação de conceitos sobre números complexos vistos no Ensino Médio e essenciais para a continuidade do aprendizado no Ensino Superior, utilizando como aporte teórico a investigação Matemática com o GeoGebra.

3 I INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA

A Investigação Matemática com o GeoGebra é uma proposta metodológica para o ensino da Matemática, sugerida por Vaz (2012) e ancorada em quatro etapas: experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar o pensamento matemático. Segundo o autor, a primeira fase permite experimentação, isto é, pode-se usar o software para trabalhar atividades matemáticas que permitem perceber propriedades, definições e construir conceitos por meio da interação. A segunda etapa propicia formular conjecturas relacionadas à primeira fase. Conjecturar, na visão de Cruvinel e Vaz (2014),

> [...] significa que depois de perceber as relações oriundas da experimentação é possível vislumbrar propriedades, relações, resultados gerais importantes para o bom desenvolvimento do ensino da Matemática. Uma vez feita a conjectura, o aluno pode enunciá-la como um resultado que pode ser verdadeiro ou falso (Cruvinel e Vaz, 2014, p. 64).

Ainda segundo Vaz (2012), a terceira fase do processo é a formalização, ou seja, a demonstração matemática do fato propriamente dito ou uma contra-proposição da conjectura levantada.

> Tal atitude é importante, pois não podemos, através da experimentação, generalizar os resultados sob o risco de não estarmos praticando os ideais da Matemática. Os resultados dessa ciência devem ser argumentados, respeitando os níveis de entendimento do aluno (Vaz, 2012, p. 41).

Entende-se que nessa fase é necessário levar em consideração o nível de maturidade dos alunos envolvidos em relação aos conteúdos matemáticos. A quarta etapa, denominada generalização, serve para buscar outras situações relacionadas, ou seja, explorar o resultado obtido com mais detalhes, com maior abrangência. Segundo Cruvinel e Vaz (2014), generalizar significa investigar outras situações e, nesse processo, pode existir a possibilidade de encontrar algumas situações particulares que podem explorar o resultado obtido.

Observa-se que a metodologia proposta e difundida por Vaz (2012) tem uma estreita relação com a Investigação Matemática, que, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), é desenvolvida em quatro momentos:

> O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003, p. 20).

Nessa perspectiva, neste trabalho, emprega-se essa metodologia e são apresentadas atividades concebidas com a utilização do software Geogebra, que possam servir como exemplos a serem aplicados em sala de aula.

4 I PROPOSTA DE ATIVIDADES DESTINADAS AO ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

As atividades apresentadas neste capítulo foram elaboradas como uma opção direcionada a alunos do 3º ano do Ensino Médio e a alunos dos cursos de graduação que têm em suas grades curriculares disciplinas similares às de Trigonometria e Números Complexos ou Variável Complexa. O objetivo destas atividades é proporcionar uma abordagem que permita realizar a conexão dos conceitos estudados algebricamente com sua representação geométrica por meio da Investigação Matemática no Geogebra.

Com essa abordagem, não se intenciona menosprezar o ensino dos números complexos por meio da álgebra, porém tem-se a intenção de propor uma abordagem geométrica a este tópico para elucidar a relação das operações básicas dos números complexos com movimentos de rotação, translação, compressão e expansão no plano de Argand - Gauss.

Observa-se que, no decorrer das atividades, são utilizados controles deslizantes, que é uma ferramenta oferecida pelo aplicativo GeoGebra para alterar valores de parâmetros tomados dentro de um intervalo de interesse, escolhido pelo usuário no momento da construção da simulação. Esse dinamismo apresentado na interação com o aplett[1] faz com que os exercícios propostos se tornem diferentes dos que são apresentados nos livros didáticos, pois permitem visualizar a generalização das situações propostas, conforme o aporte teórico sugere.

4.1 Primeira etapa: Experimentação

O objetivo da primeira atividade proposta é oportunizar, a partir da experimentação, uma visualização e interpretação geométrica do produto de dois números complexos, cujas representações são dadas inicialmente na forma algébrica, pois utilizam-se vários recursos originalmente disponíveis no GeoGebra para a obtenção do resultado solicitado. Sendo assim, propõe-se multiplicar dois números complexos quaisquer $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$ e analisar as implicações geométricas do produto, dependendo dos valores escolhidos para os parâmetros a, b, c e d. Para tanto, no GeoGebra, constroem-se quatro controles deslizantes que irão possibilitar a visualização e a atribuição dos valores escolhidos para as partes real e imaginária dos dois números complexos em questão, assim como o produto resultante, conforme ilustra a Figura 1.

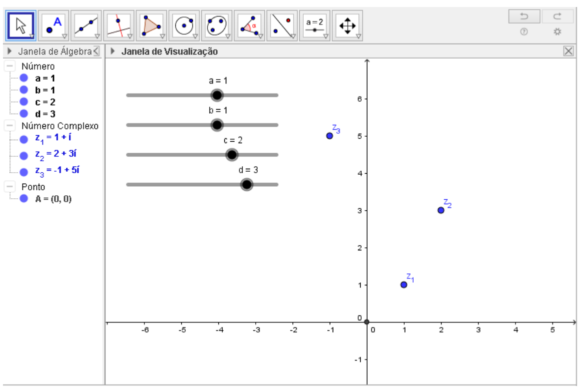

Figura 1 – Representação Geométrica do produto de dois números complexos. Fonte: Resultado do GeoGebra para a simulação proposta pelos autores.

Ao explorar essa primeira construção, observa-se um certo comportamento com relação à escolha dos números complexos e o produto entre eles:

(a) quando são fixados os parâmetros a e b, que definem $z_1=a+bi$, independentemente dos valores escolhidos para c e d, o ângulo entre os números complexos z_2 e o produto z_3 permanece inalterado;

(b) analogamente, ao serem fixados c e d, o ângulo entre os números complexos z_1 e o produto z_3 permanece inalterado. A Figura 2 ilustra essa situação.

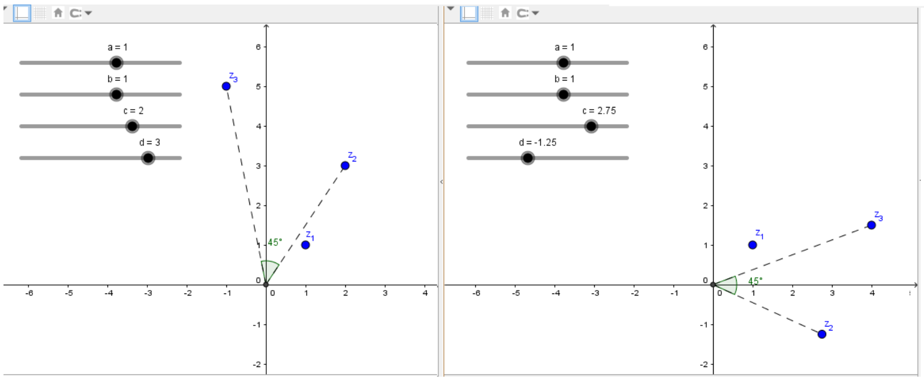

Figura 2 – Representação dinâmica do ângulo formado por dois números complexos.

Fonte: Resultado do GeoGebra para a simulação proposta pelos autores.

4.2 Segunda etapa: Conjectura

Após a exploração das simulações para as situações (a) e (b), descritas anteriormente, observa-se que, de fato, a multiplicação de dois números complexos produz um terceiro número (figura 3), cuja posição em relação aos números originais pode ser considerada como sendo uma rotação de um ângulo θ de um dos números no sentido anti-horário em torno da origem em relação à posição do outro. A questão aqui é poder afirmar qual é este valor θ.

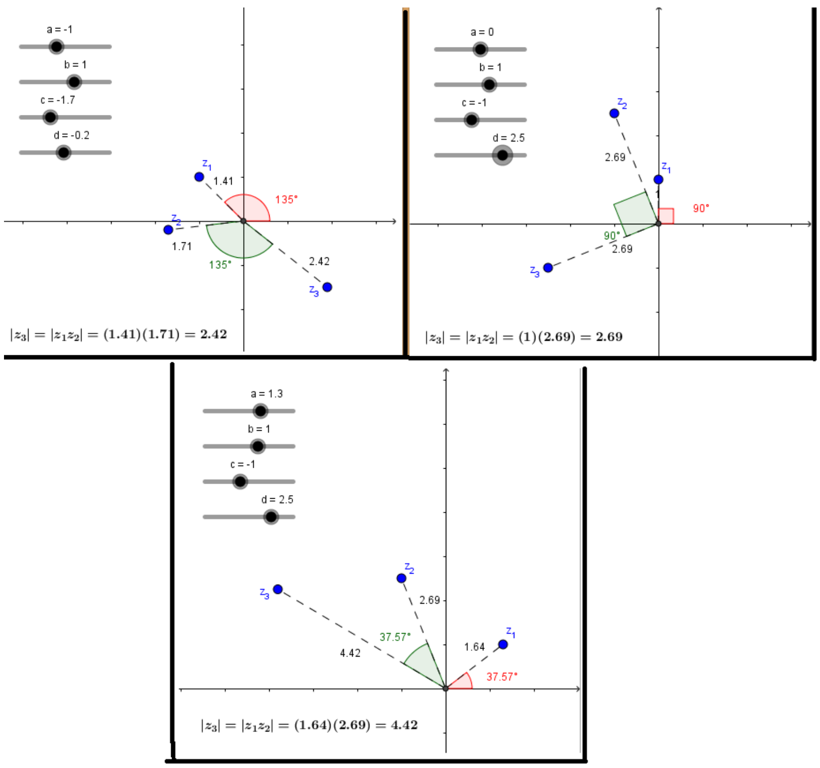

Figura 3 – Representação dinâmica da interpretação geométrica do produto de dois números complexos

Fonte: Resultado do GeoGebra para a simulação proposta pelos autores.

Neste momento, cabe também relembrar a relação entre a representação de um número complexo nas formas algébrica e trigonométrica, conforme *(1)*

$$z_1 = a + bi = r_1\left(\frac{a}{r_1} + i\,\frac{b}{r_1}\right) = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)\ . \qquad (1)$$

Em que $r_1=(a^2+b^2)^{½}$ o módulo de z_1 e θ_1 o argumento de z_1 , denotado por arg(z_1). Dessa forma, pode-se observar, ainda, que o ângulo θ formado entre z_2 e z_3 (produto dos números complexos z_1 e z_2) é igual ao argumento de z_1, ou seja, considerando-se $z_3= z_1\,z_2$, tem-se θ= arg(z_1).

Ao observar os módulos dos números complexos envolvidos, pode-se verificar, também, por meio das simulações e dos recursos disponíveis no GeoGebra, que o módulo de z_3 é igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2, isto é, $|z_3|=|\,z_1\,z_2|$, conforme ilustra a Figura 3.

A partir dessas observações e da organização das ideias exploradas, pode-se conjecturar que multiplicar dois números complexos, z_1 e z_2, significa obter um terceiro número complexo que geometricamente pode ser obtido por meio de uma rotação de z_2 no sentido positivo (anti-horário) em torno da origem de um ângulo igual ao argumento de z_1, seguido de uma contração (ou dilatação) de módulo igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2.

4.3 Terceira etapa: Formalização

Essa fase da investigação destina-se à verificação matemática dos fatos, observados e estruturados nas etapas anteriores. Nessa etapa, portanto, deve-se demonstrar com argumentos matemáticos a conjectura realizada na fase anterior, ou apresentar um contra-exemplo que a declare inválida.

Sendo assim, respeitando o nível para o qual as atividades foram pensadas, para verificar a validade da conjectura enunciada anteriormente, é conveniente retomar a forma trigonométrica dos números complexos z_1 e z_2, explorando-se, ainda, a Fórmula de Moivre para escrevê-las de modo ainda mais simplificado. Assim, tem-se $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1) = r_1e^{i\theta 1}$ e $z_2 = r_2(cos\theta_2 + i\ sen\theta_2) = r_2e^{i\theta 2}$ e, com isso, o produto z_3 é obtido de forma imediata, conforme a equação *(2).*

$$\theta$$

$$i(\square|1 + \theta_2)$$

$$z_3 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2) = r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{\square} \qquad (2)$$

Novamente, pela fórmula de Moivre, tem-se $z_3 = r_1 r_2\ (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2))$. Por meio dessa expressão é possível comprovar a conjectura formulada para ambas as situações, (a) e (b), exploradas via simulações propostas no GeoGebra.

4.4 Quarta etapa: Generalização

A potenciação para expoentes inteiros é um caso particular da multiplicação na qual todos os termos são iguais. Assim, a seguinte atividade tem como objetivo inicial explorar, algébrica e geometricamente, as consequências desse aspecto. Ou seja, propõe-se elevar um número complexo qualquer z a uma potência n e analisar as implicações geométricas dessas potências, dependendo do módulo de z e de seu argumento, ou seja, analisar o comportamento geométrico (se é que existe) dos números obtidos da forma z^n, para n um número natural qualquer.

Para tanto, novamente constroem-se três novos controles deslizantes no GeoGebra para se atribuir os valores aos parâmetros em questão: a, b e n. O número complexo z fica então definido para cada posição assumida do controle deslizante. Para cada um dos valores assumidos para n, pode-se criar uma lista de números z^n por meio do comando pré-definido no GeoGebra responsável pela definição de sequências (L=Sequência[(z_1)^i, i, 0, n]). Assim, para se verificar o comportamento dos temos da sequência, basta animar o controle associado ao parâmetro n, conforme ilustra a Figura 4.

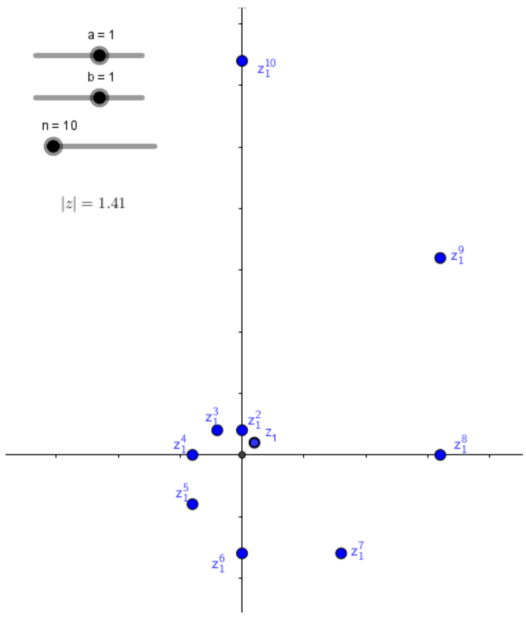

Figura 4 – Representação Geométrica das potências z^n, sendo z=a+ib.

Fonte: Resultado do GeoGebra para a simulação proposta pelos autores.

Ao se explorar essa construção no GeoGebra, três casos distintos merecem atenção quando se assume: (a) |z| > 1, (b) z| = 1 e (c) |z| < 1. Observa-se que n é um número inteiro positivo e que a partir do mesmo tipo de simulação, o caso de n assumindo valores inteiros negativos também pode ser abordado. Nota-se, pela Figura 4, que o comportamento das potências do número complexo, inicialmente considerado, parece formar um traçado na forma de espiral crescente.

A Figura 5 ilustra a situação (b). Para esse caso, observa-se que as potências do número complexo cujo módulo é igual a 1, são distribuídas sob a circunferência unitária.

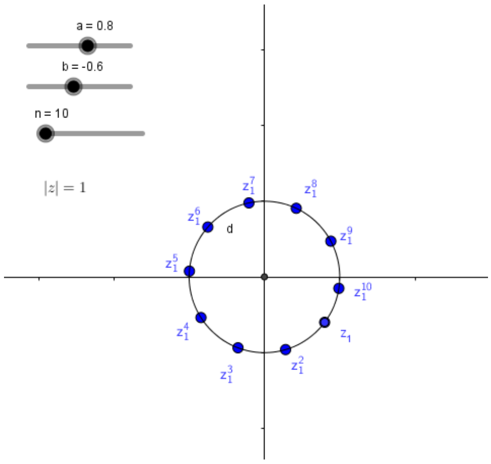

Figura 5 – Representação Geométrica das potências z^n, sendo z=a+ib.

Fonte: Resultado do GeoGebra para a simulação proposta.

Quando |z| < 1 (situação c), observa-se que as potências do número complexo considerado comportam-se de forma análoga ao caso a), porém restritas ao círculo unitário, como ilustra a Figura 6.

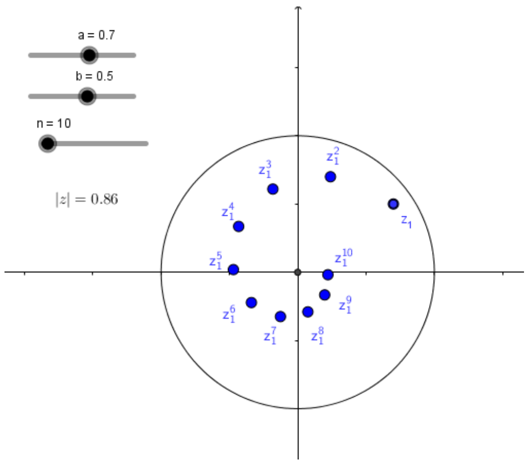

Figura 6 – Representação Geométrica das potências z^n, sendo z=a+ib

Fonte: Resultado do GeoGebra para a simulação proposta.

Cabe novamente serem seguidas as etapas investigativas. Mais uma vez, a partir das observações realizadas em cada um dos casos explorados, as conjecturas realizadas podem ser comprovadas.

Assim, considerando $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$, tem-se pela Fórmula de Moivre para potenciação de números complexos, cuja demonstração pode ser encontrada em Bastos (2013), que $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta))$, o que comprova algebricamente a conjectura elaborada. Observa-se que, para os casos (a) e (c), a forma espiralada é confirmada, visto que o módulo varia em progressão geométrica, enquanto o argumento varia em progressão aritmética.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

A contribuição principal deste trabalho é a abordagem da operação de multiplicação de números complexos por meio da investigação matemática, dando ênfase às simulações realizadas por meio do software GeoGebra. Cada uma das atividades propostas teve como objetivo proporcionar uma melhor compreensão e visualização dos resultados referentes ao produto e potenciação de números complexos, dependendo do módulo dos números considerados.

Ao longo deste processo, houve também o desafio de se utilizar o software GeoGebra no contexto desse conjunto numérico, uma vez que esse aplicativo, tradicionalmente, é utilizado para aplicações em geometria e estudo de funções. O módulo disponível no GeoGebra para aritmética complexa tem várias funcionalidades, que se mostraram eficientes para a realização das simulações desejadas, assim como o uso de outras ferramentas um pouco mais elaboradas, como o recurso de criação de listas (sequências), utilizado na operação de potenciação.

Destaca-se que a escolha pela Investigação Matemática com o Geogebra abre um novo leque de possibilidades para se explorar os recursos computacionais disponíveis em cada uma das etapas investigativas. Isso permite uma reorganização do pensamento e novas formas de ver o conteúdo.

Acredita-se que a metodologia escolhida é justificada, visto que o conteúdo aqui tratado via simulações (multiplicação e potenciação de números complexos) mostrou-se adequado para ser estudado por meio da observação de aspectos visuais. Esses mesmos conteúdos, quando trabalhados apenas de forma algébrica (estática), podem inibir a verificação de outras possibilidades, como as elencadas e ressaltadas ao longo do texto.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, S P. **Números Complexos Para o Ensino Médio: Uma Abordagem com História, Conceitos Básicos e Aplicações.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013. Disponível em < http://www.mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Salomao.pdf>. Acesso em 09 de nov. de 2015.

BASTOS, L.M. **Números Complexos e GeoGebra**, 2013. 57f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT- Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2013.

BRASIL. Matriz de Referência do Exame Nacional de Ensino Médio. 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Acesso em 27 de out. de 2015.

BRASIL. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. 2002. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 09 de nov. de 2015.

CARNEIRO, J. P. **A Geometria e o Ensino dos Números Complexos**. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Recife, 2004. Disponível em < http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf>. Acesso em 20 de nov. de 2015.

CONTINI, F. **Números Complexos: uma intervenção com o software GeoGebra**. In: XVIII ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2014. Disponível em < http://www.lematec.no-ip.org/CDS/XVIIIEBRAPEM/PDFs/GD3/contini3.pdf>. Acesso em 09 de nov. de 2015.

CRUVINEL, P. C. J. ; VAZ, D. A. F. Uma Sequência Didática para o Ensino da Matemática com o Software Geogebra. Estudos. Goiânia, v. 41, n. 1, p. 59-75, 2014.

KLINE M. Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, v. 1, Oxford University Press, 1972.

MERINO O. A Short History of Complex Numbers, University of Rhode Island, 2006. Disponível em: <http://staff.www.ltu.se/~norbert/short-history-C.pdf>. Acesso: 17 fev. 2017.

SILVA, F. G. L. **Propostas Para o Ensino De Números Complexos No Ensino Médio**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática –PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, 2014.

VAZ, D. A. F. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação matemática com o Geogebra. Revista Educativa. Goiânia, v. 15, n. 1, p. 39-51, jan./jun. 2012.

UNIVERSIA. Tratado de Bolonha – íntegra. 2006. Disponível em: < http://noticias.universia.com.br/destaque/noticia/2006/08/11/435613/ratado-bolonha-integra.html>. Acesso: 17 fev. 2017.

ÍNDICE REMISSIVO

A

C

E

F

G

I

L

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-532-7
9 788572 475327