

Ensino Aprendizagem de Matemática

Eliel Constantino da Silva
(Organizador)



Eliei Constantino da Silva
(Organizador)

Ensino Aprendizagem de Matemática

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Geraldo Alves
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.ª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof.ª Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.ª Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
E59	Ensino aprendizagem de matemática [recurso eletrônico] / Organizador Eliel Constantino da Silva. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-545-7 DOI 10.22533/at.ed.457192008 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino. 3. Professores de matemática – Formação. I. Silva, Eliel Constantino da. CDD 510.7
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

Esta obra reúne importantes trabalhos que tem como foco a Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem em salas de aula do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

Os trabalhos abordam temas atuais e relevantes ao ensino e aprendizagem da Matemática, tais como: a relação da Matemática com a música no ensino de frações, livros didáticos e livros literários no ensino de Matemática, uso de instrumentos de desenho geométrico, jogos, animes e mangá como contribuições para o desenvolvimento da Matemática em sala de aula, análise dos problemas que envolvem o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, a ausência do pensamento matemático e argumento dedutivo na Educação Matemática, investigação e modelagem matemática, tendências em Educação Matemática, formação inicial de professores de Matemática e apresentam um aprofundamento da Matemática através dos dígitos verificadores do cadastro de pessoas físicas (CPF), simetria molecular, análise numérica e o Teorema de Sinkhorn e Knopp.

A importância deste livro está na excelência e variedade de abordagens, recursos e discussões teóricas e metodológicas acerca do ensino e aprendizagem da Matemática em diversos níveis de ensino, decorrentes das experiências e vivências de seus autores no âmbito de pesquisas e práticas.

O livro inicia-se com seis capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. Em seguida há 9 capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, seguidos de 4 capítulos que abordam a temática do livro no Ensino Superior. E por fim, encontram-se 10 capítulos que trazem em seu cerne a Matemática enquanto área do conhecimento, sem a apresentação de uma discussão acerca do seu ensino e do processo de aprendizagem.

Desejo a todos os leitores, boas reflexões sobre os assuntos abordados, na expectativa de que essa coletânea contribua para suas pesquisas e práticas pedagógicas.

Elie Constantino da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
RELAÇÕES ENTRE A MÚSICA E A MATEMÁTICA: UMA FORMA DE TRABALHAR COM FRAÇÕES	
<i>Enoque da Silva Reis</i> <i>Hemerson Milani Mendes</i> <i>Samanta Margarida Milani</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920081	
CAPÍTULO 2	14
POSSIBILIDADES DIDÁTICAS E PEDAGÓGICAS DO USO DA IMAGEM VIRTUAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO ENVOLVENDO SEMIÓTICA EM UMA FANPAGE E LIVROS DIDÁTICOS	
<i>Luciano Gomes Soares</i> <i>José Joelson Pimentel de Almeida</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920082	
CAPÍTULO 3	26
PIFE DA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO – UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA	
<i>Ítalo Andrew Rodrigues Santos</i> <i>Joao Paulo Antunes Carvalho</i> <i>Josué Antunes de Macêdo</i> <i>Lílian Isabel Ferreira Amorim</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920083	
CAPÍTULO 4	35
O ENSINO DE MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DE LIVROS LITERÁRIOS EM TURMAS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
<i>Karine Maria da Cruz</i> <i>Lucília Batista Dantas Pereira</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920084	
CAPÍTULO 5	46
RELATO DA UTILIZAÇÃO DE INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS	
<i>Luana Cardoso da Silva</i> <i>Washington Leonardo Quirino dos Santos</i> <i>Leonardo Cinésio Gomes</i> <i>Cristiane Fernandes de Souza</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920085	
CAPÍTULO 6	55
ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DO JOGO VAI E VEM DAS EQUAÇÕES NO ENSINO DE EQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU	
<i>Anderson Dias da Silva</i> <i>Lucília Batista Dantas Pereira</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920086	

CAPÍTULO 7	68
TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DOS PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O SEU ENSINO NO IFPB CAMPUS CAJAZEIRAS-PB	
<i>Francisco Aureliano Vidal</i>	
<i>Carlos Lisboa Duarte</i>	
<i>Adriana Mary de Carvalho Azevedo</i>	
<i>Kíssia Carvalho</i>	
<i>Geraldo Herbetet de Lacerda</i>	
<i>Uelison Menezes da Silva</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920087	
CAPÍTULO 8	81
OS JOGOS MATEMÁTICOS PARA MINIMIZAR A MATEMATOFOBIA DOS ALUNOS: UM ENCONTRO NO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA	
<i>Hellen Emanuele Vasconcelos Albino</i>	
<i>Yalorisa Andrade Santos</i>	
<i>Kátia Maria de Medeiros</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920088	
CAPÍTULO 9	90
O ESTUDO DA PARÁBOLA NA FORMA CANÔNICA E COMO LUGAR GEOMÉTRICO	
<i>Micheli Cristina Starosky Roloff</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920089	
CAPÍTULO 10	98
LEONHARD EULER (1707-1783) E ESTUDO DA FÓRMULA DE POLIEDROS NO ENSINO MÉDIO	
<i>Julimar da Silva Aguiar</i>	
<i>Eliane Leal Vasquez</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200810	
CAPÍTULO 11	116
AUSÊNCIA DE PENSAMENTO MATEMÁTICO E ARGUMENTO DEDUTIVO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: RESULTADOS DE UMA PESQUISA	
<i>Marcella Luanna da Silva Lima</i>	
<i>Abigail Fregni Lins</i>	
<i>Patricia Sandalo Pereira</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200811	
CAPÍTULO 12	129
AS FORMAS GEOMÉTRICAS NO DESENHO (ANIMES, MANGÁ): UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA AO ENSINO DE GEOMETRIA	
<i>Luciano Gomes Soares</i>	
<i>Tayná Maria Amorim Monteiro Xavier</i>	
<i>Mônica Cabral Barbosa</i>	
<i>Rosemary Gomes Fernandes</i>	
<i>Maria da Conceição Vieira Fernandes</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200812	

CAPÍTULO 13 141

A INVESTIGAÇÃO E A MODELAGEM MATEMÁTICA: UM ESTUDO EXPERIMENTAL COM A LARANJA CITRUS SENENSIS

Igor Raphael Silva de Melo
Célia Maria Rufino Franco
Marcos dos Santos Nascimento
Villalba Andréa Vieira de Lucena

DOI 10.22533/at.ed.45719200813

CAPÍTULO 14 150

“A MAÇÃ DO PROFESSOR”: EXPLORANDO O CÁLCULO DO VOLUME DE UMA MAÇÃ EM AULAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Igor Raphael Silva de Melo
Célia Maria Rufino Franco
Isaac Ferreira de Lima
João Elder Laurentino da Silva
Jucimeri Ismael de Lima

DOI 10.22533/at.ed.45719200814

CAPÍTULO 15 160

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS: UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

Júlio César dos Reis
Aldo Brito de Jesus

DOI 10.22533/at.ed.45719200815

CAPÍTULO 16 171

ESTADO DA ARTE SOBRE TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO/UFPE-CAA

Marcela Maria Andrade Teixeira da Silva
Edelweis José Tavares Barbosa
Maria Lucivânia Souza dos Santos
Jéssika Moraes da Silva

DOI 10.22533/at.ed.45719200816

CAPÍTULO 17 181

CONTRIBUIÇÕES DO PIBID NA FORMAÇÃO INICIAL DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Eduardo da Silva Andrade
Eduarda de Lima Souza
Fanciclaudio de Meireles Silveira
Egracieli dos Santos Ananias
Leonardo Cinésio Gomes
Tiago Varelo da Silva

DOI 10.22533/at.ed.45719200817

CAPÍTULO 18 189

A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO CURSO DE PEDAGOGIA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS

Meire Aparecida De Oliveira Lopes
Liliane Oliveira Souza

DOI 10.22533/at.ed.45719200818

CAPÍTULO 19	204
OS DÍGITOS VERIFICADORES DO CADASTRO DE PESSOAS FÍSICAS (CPF)	
<i>Pedro Leonardo Pinto de Souza</i>	
<i>Vinícius Vivaldino Pires de Almeida</i>	
<i>Edney Augusto Jesus de Oliveira</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200819	
CAPÍTULO 20	218
SIMETRIA MOLECULAR	
<i>Guilherme Bernardes Rodrigues</i>	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Teófilo Jacob Freitas e Souza</i>	
<i>Alonso Sepúlveda Castellanos</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200820	
CAPÍTULO 21	225
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200821	
CAPÍTULO 22	235
SOLUÇÕES FRACAS PARA EQUAÇÃO DE BURGERS COM VISCOSIDADE NULA	
<i>Ana Paula Moreira de Freitas</i>	
<i>Santos Alberto Enriquez-Remigio</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200822	
CAPÍTULO 23	244
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO DE CRANK-NICOLSON	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200823	
CAPÍTULO 24	254
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Gabriel Machado dos Santos</i>	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200824	

CAPÍTULO 25	265
A IDEIA GEOMÉTRICA DA HOMOLOGIA E DO GRUPO FUNDAMENTAL	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Lígia Laís Fêmina</i>	
<i>Teófilo Jacob Freitas e Souza</i>	
<i>Joyce Antunes da Silva</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200825	
CAPÍTULO 26	271
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200826	
CAPÍTULO 27	280
TEOREMA DE SINKHORN E KNOPP	
<i>Gabriel Santos da Silva</i>	
<i>Daniel Cariello</i>	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Joyce Antunes da Silva</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200827	
CAPÍTULO 28	285
O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA UTILIZANDO PROJEÇÃO PARA ÓCULOS ANAGLIFO	
<i>Rosângela Costa Bandeira</i>	
<i>Aécio Alves Andrade</i>	
<i>Hudson Umbelino dos Anjos</i>	
<i>Jarles Oliveira Silva Nolêto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200828	
CAPÍTULO 29	298
O USO DE SOFTWARES EDUCACIONAIS COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
<i>Cristiane Batista da Silva</i>	
<i>Aécio Alves Andrade</i>	
<i>Hudson Umbelino dos Anjos</i>	
<i>Jarles Oliveira Silva Nolêto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200829	
SOBRE O ORGANIZADOR	309
ÍNDICE REMISSIVO	310

ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO

Ítalo Augusto Magalhães de Ávila

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade
de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

Felipe José Oliveira Ribeiro

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade
de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

Hélio Ribeiro Neto

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade
de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

Aristeu da Silveira Neto

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade
de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

RESUMO: O presente trabalho consiste no estudo do erro numérico consequente de uma discretização explícita da equação diferencial parcial parabólica que modela o processo transiente de difusão bidimensional via método de diferenças finitas. Emprega-se o teorema de Clairaut-Schwarz para a simplificação de termos de ordens elevadas no domínio temporal e avalia-se a influência da relação entre os incrementos espacial e temporal sobre o erro numérico. Rotinas numéricas foram implementadas e os resultados computacionais para o problema proposto são comparados à sua solução analítica.

PALAVRAS-CHAVE: análise numérica. difusão bidimensional transiente. diferenças finitas.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE TWO- DIMENSIONAL TRANSIENT DIFFUSION EQUATION FOR THE EXPLICIT SCHEME

ABSTRACT: This paper presents the numerical analysis of the error consequent of an explicit discretization of the parabolic differential equation that models the transient two-dimensional diffusion through the finite difference method. Through the Clairaut-Schwarz theorem, the suppression of high order terms and the evaluation of the influence of the ratio between space and time steps over the numerical error are possible. Numerical routines are implemented and the computational results for the case of study are compared to its analytical solution.

KEYWORDS: numerical analysis. transient two-dimensional diffusion. finite difference method.

1 | INTRODUÇÃO

Muitos fenômenos físicos são modelados, isto é, representados matematicamente, por meio de Equações Diferenciais Parciais (EDPs). A sua solução por métodos analíticos, no entanto, é limitada a casos lineares e simples, que não representam de maneira satisfatória

a maioria dos fenômenos físicos. Um exemplo é a solução da equação da energia térmica em regime transiente. As técnicas de solução analíticas são limitadas para resolver tais equações. São exemplos de fatores de limitação, a geometria do domínio, os tipos de condição de fronteira e a presença de termos não lineares na equação. Uma alternativa às limitações do método analítico é a confecção de modelos numérico-computacionais que, se devidamente implementados, podem fornecer respostas aproximadas para sistemas complexos de equações.

Na literatura da área, existem vários métodos de solução numérica de equações diferenciais. São exemplos o Método dos Elementos Finitos, Método dos Volumes Finitos e Método de Diferenças Finitas. Tais métodos transformam as equações apresentadas na forma contínua em um conjunto de equações algébricas. Esse processo recebe o nome de discretização. A equação gerada pela discretização é uma aproximação da equação original e, portanto, apresenta erro, o qual pode ser quantificado sob determinadas condições. No presente trabalho, procura-se apresentar um estudo de caso para a análise de erro envolvendo a solução numérica da EDP que modela a equação da energia térmica.

2 | MÉTODO NUMÉRICO

Na equação da difusão, para o caso bidimensional (indicada abaixo), aparecem duas parcelas diferenciais (LEVEQUE, 2007).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1)$$

onde ϕ é a variável a ser transportada, função do tempo t e das variáveis espaciais x e y . O símbolo α representa a difusividade, isto é, a velocidade na qual a informação é transportada no domínio espacial. A expansão em série de Taylor, apresentada na equação 2, é empregada no processo de discretização dos termos temporal e espacial, visando a resolução numérica do problema.

$$\phi(x, y, t + \Delta t) = \phi(x, y, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial t^n} \Delta t^n. \quad (2)$$

Para a discretização do termo diferencial de primeira ordem, faz-se uso da equação 2 para a expansão da função no domínio do tempo:

$$\frac{\phi(x, y, t + \Delta t) - \phi(x, y, t)}{\Delta t} = \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, y, t)}{\partial t^n}. \quad (3)$$

Truncando a equação 3 no termo de primeira ordem ($\mathcal{O}(\Delta t)$), obtém-se o método

de Euler explícito. Analogamente, a discretização para os termos de segunda ordem é obtida, fazendo uso de um incremento e um decremento no espaço, enquanto o tempo é fixado.

$$\begin{aligned} \phi(x + \Delta x, y, t) = \phi(x, y, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} \frac{\partial^{(2n-1)} \phi \left(x, t + \frac{\Delta t}{2} \right)}{\partial x^{(2n-1)}} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^{2n}}{2n!} \frac{\partial^{2n} \phi \left(x, t + \frac{\Delta t}{2} \right)}{\partial x^{2n}}. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \phi(x - \Delta x, y, t) = \phi(x, y, t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} \frac{\partial^{(2n-1)} \phi \left(x, t + \frac{\Delta t}{2} \right)}{\partial x^{(2n-1)}} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^{2n}}{2n!} \frac{\partial^{2n} \phi \left(x, t + \frac{\Delta t}{2} \right)}{\partial x^{2n}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Somando as equações 4 e 5, obtém-se a discretização para a derivada segunda em uma das direções:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} \\ = \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial x^2} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta t^{2(n-1)}}{2n!} \frac{\partial^{2n} \phi(x, y, t)}{\partial x^{2n}}. \end{aligned} \quad (6)$$

A mesma metodologia empregada em \mathcal{X} é estendida a dimensão \mathcal{Y} . Substituindo as relações truncadas na equação 1, tem-se a equação da difusão bidimensional pelo método explícito, apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x, y, t + \Delta t) - \phi(x, y, t)}{\Delta t} - \alpha \frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} \\ - \alpha \frac{\phi(x, y + \Delta y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

A solução numérica requer a discretização dos domínios espacial e temporal. Ou seja, deve-se traduzir um conjunto contínuo e infinito de informações em um conjunto discreto e finito, no qual é empregada a metodologia numérica. Os domínios espacial e temporal são discretizados uniformemente, como indicado na equação 8.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \{(x_I, y_J, t^N); x_I = I\Delta x, y_J = J\Delta y, t^N = N\Delta t, \\ N = 0, 1, \dots, K, I = 0, 1, \dots, L, J = 0, 1, \dots, M\}. \end{aligned} \quad (8)$$

É conveniente definir a solução numérica para os pontos discretos $\Phi_{I,J}^N$, que não é idêntica à solução analítica de $\phi(x, y, t)$. Assim, é possível reescrever a equação 7 como indicado à seguir.

$$\frac{\Phi_{I,J}^{N+1} - \Phi_{I,J}^N}{\Delta t} - \alpha \left[\frac{\Phi_{I+1,J}^N - 2\Phi_{I,J}^N + \Phi_{I-1,J}^N}{\Delta x^2} \right] - \alpha \left[\frac{\Phi_{I,J+1}^N - 2\Phi_{I,J}^N + \Phi_{I,J-1}^N}{\Delta y^2} \right] = 0. \quad (9)$$

Para a análise do erro, parte-se para a formulação de uma equação modificada, que descreve qual equação contínua a equação 9 modela sem erros. Define-se uma função $\psi(x, y, t)$ que é contínua e coincidente com a solução no ponto discreto (I, J, N) e é diferente da solução exata $\phi(x, y, t)$. Em outras palavras, $\phi(x, y, t)$ é a solução exata, $\Phi_{I,J}^N$ é a solução aproximada, obtida do sistema discreto, e $\psi(x, y, t)$ é a solução contínua que está de acordo com a obtida por Φ no ponto (respectivos I, J e N) e que é diferente de $\phi(x, y, t)$. Substituindo $\Phi_{I,J}^N$ na equação 11 por $\psi(x, y, t)$ e expandindo os termos em série de Taylor ao redor do ponto (x, y, t) , obtém-se a equação apresentada a seguir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\ = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta t^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \\ + 2\alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta x^{2(n-1)}}{2n!} \frac{\partial^{2n} \psi}{\partial x^{2n}} + 2\alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta y^{2(n-1)}}{2n!} \frac{\partial^{2n} \psi}{\partial x^{2n}} \end{aligned} \quad (10)$$

O lado direito da equação 12 expressa o erro numérico da discretização segundo a metodologia explícita. Tal relação é apresentada em função de termos espaciais e temporais. Visando facilitar a análise, procura-se reescrever a relação em função apenas de termos do domínio espacial. A equação 1 não pode ser empregada, no entanto, para suprimir termos de ordens elevadas (WARMING, 1974), já que a equação 10 descreve a solução discretizada, que se difere da exata. Assim, deve-se empregar sistematicamente a equação 10 na simplificação dos termos desejados.

Truncando termos de ordem superior a 4, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} - \alpha \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \alpha \frac{\Delta x^4}{60} \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} \\ - \alpha \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - \alpha \frac{\Delta y^4}{60} \frac{\partial^6 \phi}{\partial y^6} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Derivando parcialmente a equação 11 no domínio temporal, multiplicando a equação resultante por $(-\Delta t/2)$ e somando-a à primeira, tem-se a equação indicada a seguir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} + \alpha \Delta t \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t} + \alpha \Delta t \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2 \partial t} + \alpha \frac{\Delta x^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5 \partial t} \\ + \alpha \frac{\Delta y^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^5 \phi}{\partial y^5 \partial t} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

O mesmo procedimento é aplicado até a segunda ordem para a dimensão t , multiplicando o resultado por $(\Delta t^2/12)$ e somando-o à equação 12, de forma a suprimir o termo $(\frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3})$. A resultante é indicada a seguir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\Delta t^3}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^4} + \frac{\Delta t^4}{2(6!)} \frac{\partial^5 \phi}{\partial t^5} - 2 \frac{\alpha \Delta x^2}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - 2 \frac{\alpha \Delta y^2}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \\ - 2 \frac{\alpha \Delta x^4}{6!} \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} - 2 \frac{\alpha \Delta y^4}{6!} \frac{\partial^6 \phi}{\partial y^6} - \frac{\alpha \Delta t}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\alpha \Delta t}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2 \partial t} \\ - \frac{\Delta x^2 \Delta t}{48} \frac{\partial^5 \phi}{\partial x^3 \partial t} - \frac{\Delta y^2 \Delta t}{48} \frac{\partial^5 \phi}{\partial y^3 \partial t} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Para cancelar as derivadas parciais nas duas dimensões, faz-se uso do teorema de Clairaut-Schwarz (inversão da ordem de derivação). Essa metodologia deve ser empregada até que todas as derivadas parciais no tempo sejam suprimidas da equação truncada. Por fim, chega-se a equação modificada, que é apresentada abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\ = 2\alpha \left(\frac{\Delta x^2}{4!} + \frac{\Delta t}{4} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\alpha \left(\frac{\Delta y^2}{4!} + \frac{\Delta t}{4} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \\ + 2\alpha \left(\frac{\Delta x^4}{6!} + \frac{\alpha \Delta x^2 \Delta t}{2(4!)} + \frac{\alpha \Delta x^4 \Delta t}{48} \right) \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} \\ + 2\alpha \left(\frac{\Delta y^4}{6!} + \frac{\alpha \Delta y^2 \Delta t}{2(4!)} + \frac{\alpha \Delta y^4 \Delta t}{48} \right) \frac{\partial^6 \phi}{\partial y^6} \\ + 2\alpha \left(\frac{\Delta x^6}{8!} + \frac{\alpha \Delta x^4 \Delta t}{2(6!)} + \frac{\alpha \Delta x^6 \Delta t}{48(4!)} \right) \frac{\partial^8 \phi}{\partial x^8} \\ + 2\alpha \left(\frac{\Delta y^6}{8!} + \frac{\alpha \Delta y^4 \Delta t}{2(6!)} + \frac{\alpha \Delta y^6 \Delta t}{48(4!)} \right) \frac{\partial^8 \phi}{\partial y^8} + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Ainda, é possível substituir o passo temporal pelo passo espacial. Define-se uma constante CFL (COURANT, 1967), que relaciona o passo temporal aos passos espaciais.

$$\Delta t = \frac{CFL}{\alpha} \min[\Delta x^2, \Delta y^2]. \quad (15)$$

Substituindo tal condição na equação 14, obtém-se a equação 16, apresentada a seguir.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) &= 2\alpha \left(\frac{\Delta x^2}{4!} + \frac{CFL \min[\Delta x^2, \Delta y^2]}{4} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \\
 &+ 2\alpha \left(\frac{\Delta y^2}{4!} + \frac{CFL \min[\Delta x^2, \Delta y^2]}{4} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \\
 &+ 2\alpha \left(\frac{\Delta x^4}{6!} + \frac{CFL \min[\Delta x^2, \Delta y^2] (\Delta x^2 + \Delta x^4)}{2(4!)} \right) \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} \\
 &+ 2\alpha \left(\frac{\Delta y^4}{6!} + \frac{CFL \min[\Delta x^2, \Delta y^2] (\Delta y^2 + \Delta y^4)}{2(4!)} \right) \frac{\partial^6 \phi}{\partial y^6} + \dots
 \end{aligned} \tag{16}$$

Reescrevendo a equação acima de forma conveniente, truncando os termos de ordem superior à quatro, chega-se a equação modificada:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) &= \frac{\alpha \Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\alpha \Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \\
 &+ \frac{1}{2} \alpha CFL \min[\Delta x^2, \Delta y^2] \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial x^2} \right) \\
 &+ \frac{2\alpha CFL \Delta x^4}{6!} \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} + \frac{2\alpha CFL \Delta y^4}{6!} \frac{\partial^6 \phi}{\partial y^6} \\
 &+ \frac{1}{4!} \alpha CFL \min[\Delta x^2, \Delta y^2] \left(\frac{\Delta x^2 \partial^6 \phi}{\partial x^6} + \frac{\Delta y^2 \partial^6 \phi}{\partial y^6} + \frac{\Delta x^2 \partial^6 \phi}{\partial x^4 \partial y^2} \right. \\
 &\left. + \frac{\Delta y^2 \partial^6 \phi}{\partial y^4 \partial x^2} \right)
 \end{aligned} \tag{17}$$

Analisando a equação 17, que apresenta os termos de menores (e mais significativas) ordens do erro numérico, pode-se inferir que o erro é proporcional à condição de CFL . Ou seja, o erro é ampliado em função do aumento de tal parâmetro.

3 | ESTUDO DE CASO

Para a solução da equação 9 é necessário estabelecer o domínio espacial, condições inicial e de contorno e tempo final de simulação. O domínio espacial escolhido foi de $x = [0, 2\pi]$ e $y = [0, 2\pi]$ e o tempo final de simulação de 10 segundos. Para este estudo de caso, a condição inicial imposta é indicada na equação 18.

$$\Phi(x, y, 0) = U_o \text{sen}(\theta x) \text{sen}(\theta y), \tag{18}$$

onde U_o é a amplitude da função e θ é o número de onda. As condições de

contorno foram definidas da seguinte maneira:

$$\Phi(0, y, t) = 0, \quad (19)$$

$$\Phi(2\pi, y, t) = 0, \quad (20)$$

$$\Phi(x, 0, t) = 0, \quad (21)$$

$$\Phi(x, 2\pi, t) = 0, \quad (22)$$

Para determinação do erro do método, compara-se a solução numérica com a solução analítica:

$$\Phi(x, t) = U_0 \text{sen}(\theta x) \text{sen}(\theta y) e^{-2\alpha\theta^2 t}. \quad (23)$$

Os valores das variáveis U_0 , θ e α devem ser escolhidas em função do problema que se deseja resolver. No presente trabalho, o valor escolhido para as três variáveis foi 1,0. A determinação do erro numérico foi feita, inicialmente, variando o número de divisões espaciais para a condição $CFL = 1,0$. O domínio foi dividido uniformemente nas duas direções ($\Delta x = \Delta y$, com $\Delta x = 2\pi/L = 2\pi/M$). Observa-se na tabela 1 que o erro é reduzido de quatro vezes para o dobro de divisões espaciais em cada direção, comportamento característico de um sistema de segunda ordem, como esperado da análise da equação 17.

Divisões Espaciais	Norma L_∞	Razão	Ordem	Norma L_2	Razão	Ordem
25	$3,08 \cdot 10^{-3}$	---	---	$1,14 \cdot 10^{-3}$	---	---
50	$7,38 \cdot 10^{-4}$	4,17	2,09	$2,87 \cdot 10^{-4}$	3,97	1,98
100	$1,81 \cdot 10^{-4}$	4,07	2,04	$7,19 \cdot 10^{-5}$	3,99	1,99
200	$4,48 \cdot 10^{-5}$	4,04	2,02	$1,80 \cdot 10^{-5}$	3,99	2,00

Tabela 1: Erro do método numérico para $CFL = 0,1$.

Segue ainda a avaliação do erro variando-se o CFL . O número de divisões para cada direção no domínio espacial foi mantido constante em 50 para o intervalo $CFL \in [2,5 \cdot 10^{-3}, 2,5 \cdot 10^{-1}]$. O resultado obtido é apresentado a seguir.

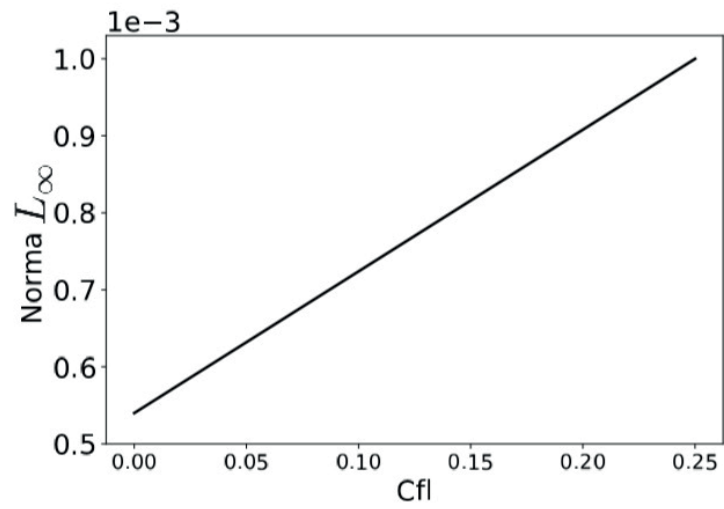


Figura 1: Norma L_∞ em função do CFL.

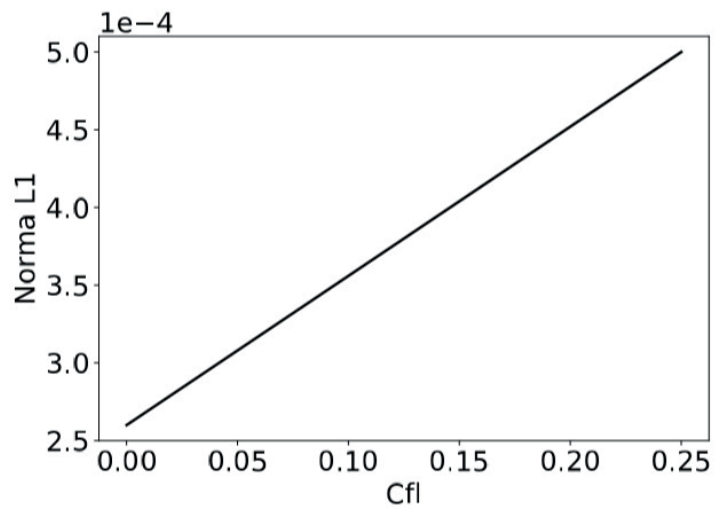


Figura 2: Norma L_1 em função do CFL.

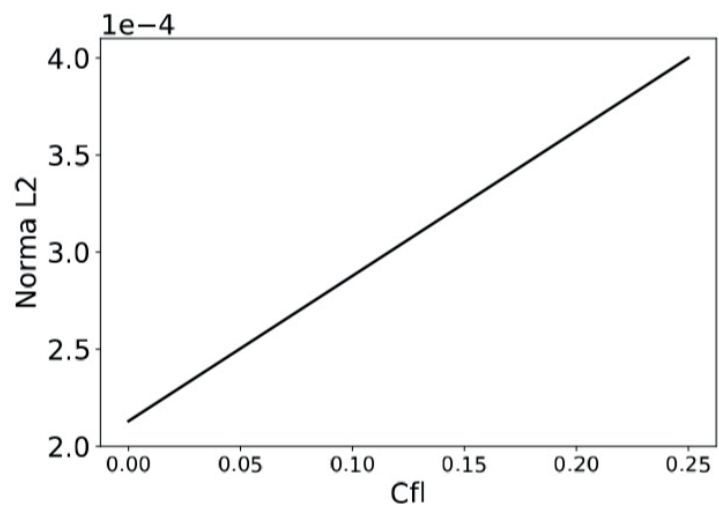


Figura 3: Norma L_2 em função do CFL.

Observa-se nas figuras 1, 2 e 3 que o erro numérico é proporcional ao Δx , como

esperado pela análise da equação 17.

4 | CONCLUSÃO

Propôs-se a avaliação de erro para a solução numérica da equação diferencial parcial parabólica que modela o fenômeno da difusão bidimensional em regime transiente. Utilizou-se o método de Euler explícito para a derivada parcial temporal e diferenças centradas para a espacial. A análise numérica do método de discretização é desenvolvida e simulações computacionais são conduzidas com o fim de avaliar o erro numérico para o problema proposto. A solução numérica foi comparada com a solução analítica.

Por fim, conclui-se que a parcela de maior representatividade no erro retornado é a do termo de segunda ordem. Ainda, o erro é ampliado em função do aumento da entre os passos espacial e temporal, de acordo com a definição da constante de CFL .

REFERÊNCIAS

COURANT, R., FRIEDRICHS, K., LEWY, H. **On the partial difference equations of mathematical physics**. IBM Journal of Research and Development, Nova York, v. 11, i. 2, pp. 215 – 234, 1967.

LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problem**. 1. ed. Philadelphia: SIAM, 2007.

WARMING, R., HYETT, B. **The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods**. Journal of Computational Physics, California, v. 14, n. 2, pp. 159 – 179, 1974.

SOBRE O ORGANIZADOR

Eliei Constantino da Silva - Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Brasil, e Universidade do Minho, Portugal, respectivamente. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e membro do Grupo de Pesquisa Ensino e Aprendizagem como Objeto da Formação de Professores (GPEA). Atuou como professor bolsista do Departamento de Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Tem interesse e desenvolve pesquisas nos seguintes temas: Educação Matemática, Pensamento Computacional, Robótica, Programação Computacional, Tecnologias Digitais na Educação, Ensino e Aprendizagem, Teoria Histórico-Cultural e Formação de Professores. Atualmente é doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), editor de conteúdo da Geekie, colunista do InfoGeekie, membro do Comitê Técnico Científico da Atena Editora, professor do Colégio Internacional Radial e desenvolve ações de formação de professores relacionadas ao uso de tecnologias e Pensamento Computacional na Educação.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Anos Finais do Ensino Fundamental 46

Aprendizagem 2, 25, 69, 100, 140, 170

D

Desenho Geométrico 46, 130, 140

E

Educação Básica 34, 47, 121, 139, 179, 180, 181, 182

Educação Matemática 5, 1, 15, 16, 18, 25, 26, 35, 37, 45, 54, 55, 57, 66, 80, 81, 100, 101, 102, 114, 116, 127, 140, 142, 149, 158, 159, 170, 171, 172, 173, 176, 177, 179, 188, 189, 191, 192, 197

Elementos para esboço gráfico 90

Ensino 2, 5, 8, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 25, 27, 34, 35, 36, 40, 46, 47, 48, 55, 57, 58, 60, 61, 67, 68, 69, 76, 79, 80, 81, 84, 88, 89, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 100, 103, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 122, 126, 127, 129, 131, 133, 139, 142, 149, 158, 170, 174, 175, 180, 183, 184, 185, 187, 189, 191, 193

Ensino de Geometria 46, 48, 129

Ensino de Matemática 14, 27, 76, 79, 80, 103, 113, 127, 142

Ensino Médio 5, 8, 13, 55, 57, 58, 60, 61, 67, 68, 69, 81, 84, 89, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 103, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 118, 122, 126, 127, 129, 131, 133, 139, 175, 184, 185, 187

Ensino Superior 5, 184, 189

Equações do 1º e do 2º grau 55

Estratégia de Ensino 98

F

Fórmula de Poliedro 98

Fração 1, 3

G

GeoGebra 90, 92, 93, 95, 96, 116, 117, 118, 121, 122, 123, 126, 127

H

História da Matemática 13, 54, 98, 99, 100, 101, 102, 113, 114, 115, 173, 174, 175, 176

I

Imagem virtual 14

J

Jogos Educativos 26

Jogos Matemáticos 55, 66, 81, 88, 89

L

Laboratório de Matemática 81, 82, 84, 85, 86

Literatura 35, 37, 38, 43, 44

Lugar geométrico 90

M

Matemática 2, 5, 9, 1, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67, 69, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 105, 106, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 121, 124, 125, 126, 127, 129, 131, 132, 137, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 147, 149, 150, 151, 152, 158, 159, 160, 161, 162, 164, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 197, 202, 203, 217, 218, 224, 270

Matematofobia 81, 82

Música 1, 13

P

Parábola na forma canônica 90

PIBID 9, 26, 27, 28, 34, 56, 129, 130, 133, 181, 182, 183, 184, 186, 187, 188

R

Registros de representação 14, 25

Resolução de Problemas 55, 57, 58, 102, 173, 174, 176

S

Semiótica 14, 15, 16, 18, 19, 25

T

Trigonometria 5, 69

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-545-7



9 788572 475457