

Ensino Aprendizagem de Matemática

Eliel Constantino da Silva
(Organizador)



Elie Constantino da Silva
(Organizador)

Ensino Aprendizagem de Matemática

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Geraldo Alves
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.ª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof.ª Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.ª Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
E59	Ensino aprendizagem de matemática [recurso eletrônico] / Organizador Eliel Constantino da Silva. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-545-7 DOI 10.22533/at.ed.457192008 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino. 3. Professores de matemática – Formação. I. Silva, Eliel Constantino da. CDD 510.7
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

Esta obra reúne importantes trabalhos que tem como foco a Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem em salas de aula do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

Os trabalhos abordam temas atuais e relevantes ao ensino e aprendizagem da Matemática, tais como: a relação da Matemática com a música no ensino de frações, livros didáticos e livros literários no ensino de Matemática, uso de instrumentos de desenho geométrico, jogos, animes e mangá como contribuições para o desenvolvimento da Matemática em sala de aula, análise dos problemas que envolvem o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, a ausência do pensamento matemático e argumento dedutivo na Educação Matemática, investigação e modelagem matemática, tendências em Educação Matemática, formação inicial de professores de Matemática e apresentam um aprofundamento da Matemática através dos dígitos verificadores do cadastro de pessoas físicas (CPF), simetria molecular, análise numérica e o Teorema de Sinkhorn e Knopp.

A importância deste livro está na excelência e variedade de abordagens, recursos e discussões teóricas e metodológicas acerca do ensino e aprendizagem da Matemática em diversos níveis de ensino, decorrentes das experiências e vivências de seus autores no âmbito de pesquisas e práticas.

O livro inicia-se com seis capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. Em seguida há 9 capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, seguidos de 4 capítulos que abordam a temática do livro no Ensino Superior. E por fim, encontram-se 10 capítulos que trazem em seu cerne a Matemática enquanto área do conhecimento, sem a apresentação de uma discussão acerca do seu ensino e do processo de aprendizagem.

Desejo a todos os leitores, boas reflexões sobre os assuntos abordados, na expectativa de que essa coletânea contribua para suas pesquisas e práticas pedagógicas.

Elie Constantino da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
RELAÇÕES ENTRE A MÚSICA E A MATEMÁTICA: UMA FORMA DE TRABALHAR COM FRAÇÕES	
<i>Enoque da Silva Reis</i> <i>Hemerson Milani Mendes</i> <i>Samanta Margarida Milani</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920081	
CAPÍTULO 2	14
POSSIBILIDADES DIDÁTICAS E PEDAGÓGICAS DO USO DA IMAGEM VIRTUAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO ENVOLVENDO SEMIÓTICA EM UMA FANPAGE E LIVROS DIDÁTICOS	
<i>Luciano Gomes Soares</i> <i>José Joelson Pimentel de Almeida</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920082	
CAPÍTULO 3	26
PIFE DA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO – UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA	
<i>Ítalo Andrew Rodrigues Santos</i> <i>João Paulo Antunes Carvalho</i> <i>Josué Antunes de Macêdo</i> <i>Lílian Isabel Ferreira Amorim</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920083	
CAPÍTULO 4	35
O ENSINO DE MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DE LIVROS LITERÁRIOS EM TURMAS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
<i>Karine Maria da Cruz</i> <i>Lucília Batista Dantas Pereira</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920084	
CAPÍTULO 5	46
RELATO DA UTILIZAÇÃO DE INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS	
<i>Luana Cardoso da Silva</i> <i>Washington Leonardo Quirino dos Santos</i> <i>Leonardo Cinésio Gomes</i> <i>Cristiane Fernandes de Souza</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920085	
CAPÍTULO 6	55
ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DO JOGO VAI E VEM DAS EQUAÇÕES NO ENSINO DE EQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU	
<i>Anderson Dias da Silva</i> <i>Lucília Batista Dantas Pereira</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920086	

CAPÍTULO 7	68
TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DOS PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O SEU ENSINO NO IFPB CAMPUS CAJAZEIRAS-PB	
<i>Francisco Aureliano Vidal</i>	
<i>Carlos Lisboa Duarte</i>	
<i>Adriana Mary de Carvalho Azevedo</i>	
<i>Kíssia Carvalho</i>	
<i>Geraldo Herbetet de Lacerda</i>	
<i>Uelison Menezes da Silva</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920087	
CAPÍTULO 8	81
OS JOGOS MATEMÁTICOS PARA MINIMIZAR A MATEMATOFOBIA DOS ALUNOS: UM ENCONTRO NO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA	
<i>Hellen Emanuele Vasconcelos Albino</i>	
<i>Yalorisa Andrade Santos</i>	
<i>Kátia Maria de Medeiros</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920088	
CAPÍTULO 9	90
O ESTUDO DA PARÁBOLA NA FORMA CANÔNICA E COMO LUGAR GEOMÉTRICO	
<i>Micheli Cristina Starosky Roloff</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4571920089	
CAPÍTULO 10	98
LEONHARD EULER (1707-1783) E ESTUDO DA FÓRMULA DE POLIEDROS NO ENSINO MÉDIO	
<i>Julimar da Silva Aguiar</i>	
<i>Eliane Leal Vasquez</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200810	
CAPÍTULO 11	116
AUSÊNCIA DE PENSAMENTO MATEMÁTICO E ARGUMENTO DEDUTIVO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: RESULTADOS DE UMA PESQUISA	
<i>Marcella Luanna da Silva Lima</i>	
<i>Abigail Fregni Lins</i>	
<i>Patricia Sandalo Pereira</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200811	
CAPÍTULO 12	129
AS FORMAS GEOMÉTRICAS NO DESENHO (ANIMES, MANGÁ): UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA AO ENSINO DE GEOMETRIA	
<i>Luciano Gomes Soares</i>	
<i>Tayná Maria Amorim Monteiro Xavier</i>	
<i>Mônica Cabral Barbosa</i>	
<i>Rosemary Gomes Fernandes</i>	
<i>Maria da Conceição Vieira Fernandes</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200812	

CAPÍTULO 13 141

A INVESTIGAÇÃO E A MODELAGEM MATEMÁTICA: UM ESTUDO EXPERIMENTAL COM A LARANJA CITRUS SENENSIS

Igor Raphael Silva de Melo
Célia Maria Rufino Franco
Marcos dos Santos Nascimento
Villalba Andréa Vieira de Lucena

DOI 10.22533/at.ed.45719200813

CAPÍTULO 14 150

“A MAÇÃ DO PROFESSOR”: EXPLORANDO O CÁLCULO DO VOLUME DE UMA MAÇÃ EM AULAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Igor Raphael Silva de Melo
Célia Maria Rufino Franco
Isaac Ferreira de Lima
João Elder Laurentino da Silva
Jucimeri Ismael de Lima

DOI 10.22533/at.ed.45719200814

CAPÍTULO 15 160

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS: UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

Júlio César dos Reis
Aldo Brito de Jesus

DOI 10.22533/at.ed.45719200815

CAPÍTULO 16 171

ESTADO DA ARTE SOBRE TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO/UFPE-CAA

Marcela Maria Andrade Teixeira da Silva
Edelweis José Tavares Barbosa
Maria Lucivânia Souza dos Santos
Jéssika Moraes da Silva

DOI 10.22533/at.ed.45719200816

CAPÍTULO 17 181

CONTRIBUIÇÕES DO PIBID NA FORMAÇÃO INICIAL DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Eduardo da Silva Andrade
Eduarda de Lima Souza
Fanciclaudio de Meireles Silveira
Egracieli dos Santos Ananias
Leonardo Cinésio Gomes
Tiago Varelo da Silva

DOI 10.22533/at.ed.45719200817

CAPÍTULO 18 189

A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO CURSO DE PEDAGOGIA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS

Meire Aparecida De Oliveira Lopes
Liliane Oliveira Souza

DOI 10.22533/at.ed.45719200818

CAPÍTULO 19	204
OS DÍGITOS VERIFICADORES DO CADASTRO DE PESSOAS FÍSICAS (CPF)	
<i>Pedro Leonardo Pinto de Souza</i>	
<i>Vinícius Vivaldino Pires de Almeida</i>	
<i>Edney Augusto Jesus de Oliveira</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200819	
CAPÍTULO 20	218
SIMETRIA MOLECULAR	
<i>Guilherme Bernardes Rodrigues</i>	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Teófilo Jacob Freitas e Souza</i>	
<i>Alonso Sepúlveda Castellanos</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200820	
CAPÍTULO 21	225
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200821	
CAPÍTULO 22	235
SOLUÇÕES FRACAS PARA EQUAÇÃO DE BURGERS COM VISCOSIDADE NULA	
<i>Ana Paula Moreira de Freitas</i>	
<i>Santos Alberto Enriquez-Remigio</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200822	
CAPÍTULO 23	244
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO DE CRANK-NICOLSON	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200823	
CAPÍTULO 24	254
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Gabriel Machado dos Santos</i>	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200824	

CAPÍTULO 25	265
A IDEIA GEOMÉTRICA DA HOMOLOGIA E DO GRUPO FUNDAMENTAL	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Lígia Laís Fêmina</i>	
<i>Teófilo Jacob Freitas e Souza</i>	
<i>Joyce Antunes da Silva</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200825	
CAPÍTULO 26	271
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200826	
CAPÍTULO 27	280
TEOREMA DE SINKHORN E KNOPP	
<i>Gabriel Santos da Silva</i>	
<i>Daniel Cariello</i>	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Joyce Antunes da Silva</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200827	
CAPÍTULO 28	285
O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA UTILIZANDO PROJEÇÃO PARA ÓCULOS ANAGLIFO	
<i>Rosângela Costa Bandeira</i>	
<i>Aécio Alves Andrade</i>	
<i>Hudson Umbelino dos Anjos</i>	
<i>Jarles Oliveira Silva Nolêto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200828	
CAPÍTULO 29	298
O USO DE SOFTWARES EDUCACIONAIS COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
<i>Cristiane Batista da Silva</i>	
<i>Aécio Alves Andrade</i>	
<i>Hudson Umbelino dos Anjos</i>	
<i>Jarles Oliveira Silva Nolêto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.45719200829	
SOBRE O ORGANIZADOR	309
ÍNDICE REMISSIVO	310

ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO

Gabriel Machado dos Santos

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Ítalo Augusto Magalhães de Ávila

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Hélio Ribeiro Neto

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Aristeu da Silveira Neto

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

RESUMO: No presente trabalho apresentou-se um estudo detalhado a respeito dos erros numéricos decorrentes do procedimento de discretização e solução numérica da equação da onda unidimensional, em regime transiente. Para tanto, será empregado o método das diferenças finitas para obtenção de uma formulação explícita no tempo, e a partir desta, será realizada uma otimização para a relação entre os passos incrementais no tempo e no espaço. Um estudo de caso é conduzido a fim de se comparar os resultados teóricos e os valores numéricos obtidos.

PALAVRAS-CHAVE: análise numérica, equação da onda unidimensional e transiente, diferenças finitas.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE TRANSIENT ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION BY THE EXPLICIT METHOD

ABSTRACT: In the present work the authors present a detailed study about the numerical errors resulting from the discretization procedure and numerical solution of the transient one-dimensional wave equation. For this, the finite difference method will be used to obtain an explicit formulation in time, and from this, an optimization will be performed for the relation between the incremental steps in time and space. A case study is conducted in order to compare the theoretical results and the numerical values obtained.

KEYWORDS: numerical analysis, transient one-dimensional wave equation, finite differences.

1 | INTRODUÇÃO

Os fenômenos físicos em sua ampla maioria podem ser modelados, ou seja, podem ser representados por meio de modelos físicos, matemáticos, numéricos ou materiais. A modelagem física consiste na representação do fenômeno real a ser analisado, para o qual

são aplicadas hipóteses com a finalidade de simplificar o problema a fim de viabilizar sua análise. Já a modelagem matemática se fundamenta na concepção de equações a partir da análise do modelo físico, de forma que tais equações podem ser de cunho algébricas, diferenciais, integrais ou integro-diferenciais. Quando as equações obtidas pelo modelo matemático não admitem soluções via métodos analíticos, utiliza-se de métodos numéricos para solução de tais equações.

Grande parte dos fenômenos físicos ao serem modelados, são representados matematicamente através de equações diferenciais parciais (EDP's), cujos métodos de soluções analíticas são limitados em função de condições de fronteira, geometria do domínio e termos não lineares presentes nas equações. Desse modo, a solução das equações por meio de métodos numéricos se faz necessária.

Na literatura encontra-se uma vasta gama de métodos numéricos de soluções de equações diferenciais, que se baseiam no processo de discretização das mesmas, isto é, transforma-las em equações algébricas. Nesse processo tem-se um erro, o qual em determinadas condições pode ser quantificado.

No presente trabalho, procura-se apresentar um estudo de caso para a análise do erro envolvendo a resolução da EDP com a qual modelam-se a propagação de ondas em uma dimensão.

A equação da onda é uma equação diferencial parcial hiperbólica, com a qual modelam-se a dinâmica da propagação das ondas. Tal equação é de grande relevância em diversos ramos da física, se destacando principalmente nas áreas de ondulatória, acústica, eletromagnetismo e mecânica dos fluidos. Em sua forma mais simples ela pode ser representada matematicamente por uma parcela diferencial dependente do tempo e uma ou mais parcelas diferenciais dependentes do espaço:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \phi = 0, \quad (1)$$

onde ϕ é uma função escalar que modela o deslocamento da onda ao longo do domínio temporal e do domínio espacial, dependentes da variável cronológica t e das variáveis espaciais x_1, x_2, \dots, x_n , respectivamente. O escalar c é uma constante, que representa a velocidade de propagação da onda ao longo do domínio espacial.

Para o caso unidimensional a equação se reduz a uma equação contendo apenas duas parcelas diferenciais (LEVEQUE, 2007):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Nesta configuração a equação da onda também é conhecida como *o problema da corda vibrante*, o qual foi um dos principais desafios enfrentados pelos matemáticos do século XVIII, sendo deduzida e resolvida primeiramente por D'Alembert em 1747 (D'ALEMBERT, 1747).

2 | MÉTODO NUMÉRICO

Uma fórmula de diferenças finitas é dita explícita, quando pode-se determinar uma equação em que o termo a ser calculado esteja explícito na equação, ou seja, obtêm-se uma equação dependente apenas de termos previamente conhecidos.

A fim de se obter uma fórmula de diferenças finitas explícita para a equação da onda, faz-se uso da expansão em série de Taylor para discretizar as derivadas parciais no tempo e no espaço da equação 2, de modo a se obter uma solução numérica.

Para a discretização do termo diferencial de segunda ordem no tempo, utiliza-se a expansão em série de Taylor no domínio temporal. Com o intuito de se garantir segunda ordem no tempo utilizando-se o método explícito, é necessário que se realize a expansão da função $\phi(x, t + \Delta t)$ em relação ao ponto (x, t) :

$$\phi(x, t + \Delta t) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial t^n} \Delta t^n. \quad (3)$$

Deve-se agora expandir a função $\phi(x, t - \Delta t)$ em relação ao ponto (x, t) , obtendo-se:

$$\phi(x, t - \Delta t) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial t^n} \Delta t^n. \quad (4)$$

Somando a equação 4 com a equação 3 e dividindo por Δt^2 , obtêm-se a discretização para o termo diferencial de segunda ordem no tempo:

$$\begin{aligned} & \frac{\phi(x, t - \Delta t) - 2\phi(x, t) + \phi(x, t + \Delta t)}{\Delta t^2} \\ &= \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2(n+1))!} \frac{\partial^{2(n+1)} \phi(x, t)}{\partial t^{2(n+1)}} \Delta t^{2n}. \end{aligned} \quad (5)$$

De forma análoga, a discretização do termo diferencial de segunda ordem no espaço é obtida fazendo-se a expansão em série de Taylor no domínio espacial das funções $\phi(x + \Delta x, t)$ e $\phi(x - \Delta x, t)$ em relação ao ponto (x, t) :

$$\phi(x + \Delta x, t) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial x^n} \Delta x^n, \quad (6)$$

$$\phi(x - \Delta x, t) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial x^n} \Delta x^n, \quad (7)$$

Somando a equação 7 com a equação 6 e dividindo por Δx^2 , obtêm-se a

discretização para o termo diferencial de segunda ordem no espaço:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x - \Delta x, t) - 2\phi(x, t) + \phi(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} \\ = \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2(n+1))!} \frac{\partial^{2(n+1)} \phi(x, t)}{\partial x^{2(n+1)}} \Delta x^{2n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Truncando a equação 5 no termo de segunda ordem ($\mathcal{O}(\Delta t^2)$) e a equação 8 também no termo de segunda ordem ($\mathcal{O}(\Delta x^2)$), obtêm-se o método de diferenças centradas para os domínios temporal e espacial:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \approx \frac{\phi(x, t - \Delta t) - 2\phi(x, t) + \phi(x, t + \Delta t)}{\Delta t^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{\phi(x - \Delta x, t) - 2\phi(x, t) + \phi(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2}. \quad (10)$$

Substituindo as relações truncadas 9 e 10 na equação da onda unidimensional 2 obtêm-se:

$$\frac{\phi(x, t - \Delta t) - 2\phi(x, t) + \phi(x, t + \Delta t)}{\Delta t^2} - c^2 \left[\frac{\phi(x - \Delta x, t) - 2\phi(x, t) + \phi(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} \right] \approx 0. \quad (11)$$

A solução numérica requer a discretização dos domínios temporal e espacial. Ou seja, deve-se transformar um conjunto contínuo e infinito de informações em um conjunto discreto e finito, no qual a metodologia numérica possa ser empregada. Desse modo, considera-se que a equação da onda esteja definida no domínio $D = [0, L] \times [0, t_f]$, particiona-se o intervalo $[0, t_f]$ do domínio temporal em K partes iguais e o intervalo $[0, L]$ do domínio espacial em M partes iguais. Obtêm-se então a malha \mathcal{M} , ou seja, um conjunto de pontos discretos no domínio D :

$$\mathcal{M} = \{(t^n, x_i); t^n = n\Delta t, x_i = i\Delta x, n = 0, 1, \dots, K, i = 0, 1, \dots, M\}. \quad (12)$$

Define-se então a solução numérica nos pontos discretos da malha \mathcal{M} como Φ_i^n . Deve-se ressaltar que a solução discreta Φ_i^n não é igual à solução exata $\phi(x, t)$ devido aos truncamentos realizados. Assim pode-se reescrever a equação 11 da seguinte forma:

$$\frac{\Phi_i^{n-1} - 2\Phi_i^n + \Phi_i^{n+1}}{\Delta t^2} - c^2 \left[\frac{\Phi_{i-1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] = 0. \quad (13)$$

A relação entre os passos incrementais de tempo e espaço foi apresentada

primeiramente por Courant et al. (1967) e recebe o nome das iniciais dos autores (*CFL* – Courant, Friedrichs e Lewy), onde esta relação é definida como:

$$CFL = c \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (14)$$

Aplicando-se a condição de *CFL* na equação 13 e rearranjando os termos, obtêm-se a discretização explícita da equação onda:

$$\Phi_i^{n+1} = 2(1 - CFL^2)\Phi_i^n + CFL^2(\Phi_{i-1}^n + \Phi_{i+1}^n) - \Phi_i^{n-1}. \quad (15)$$

Note que na equação 15 o termo a ser calculado (Φ_i^{n+1}) depende apenas de termos previamente conhecidos. Assim, de fato, a equação representa um método explícito.

É importante salientar que a solução numérica da equação da onda pelo método de diferenças finitas explícito é determinada utilizando-se a equação 15, porém para o primeiro passo de tempo, ou seja, $n = 0$ a equação se torna:

$$\Phi_i^1 = 2(1 - CFL^2)\Phi_i^0 + CFL^2(\Phi_{i-1}^0 + \Phi_{i+1}^0) - \Phi_i^{-1}, \quad (16)$$

onde nota-se que o termo Φ_i^{-1} não pertence à malha \mathcal{M} , estando, portanto, fora do domínio D . Logo se faz necessária a utilização das condições iniciais da equação da onda:

$$\phi(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi(x, 0)}{\partial t} = g(x). \quad (17)$$

A condição inicial referente a posição inicial da onda pode ser facilmente discretizada, uma vez que, Φ_i^0 deve ser numericamente igual a $\phi(x, 0)$. Então, basta discretizar a função $f(x)$ de acordo com a malha \mathcal{M} :

$$\Phi_i^0 = f_i = f(i\Delta x). \quad (18)$$

Uma das condições iniciais foi discretizada, persistindo, no entanto, o problema relacionado ao termo Φ_i^{-1} . Para tanto, faz-se uso da condição inicial de velocidade da onda, na qual sua discretização se baseia no processo de discretização de um termo diferencial de primeira ordem no tempo. Dessa forma subtrai-se da equação 3 a equação 4 e divide-se por $2\Delta t$:

$$\frac{\phi(x, t + \Delta t) - \phi(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1} \phi(x, t)}{\partial t^{2n+1}} \Delta t^{2n}. \quad (19)$$

Ao se truncar a equação 19 no termo de segunda ordem ($\mathcal{O}(\Delta t^2)$), obtêm-se o

método de diferenças finitas centradas:

$$\frac{\phi(x, t + \Delta t) - \phi(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} \approx \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t}. \quad (20)$$

A condição inicial de velocidade da onda pode ser reescrita na forma discreta. Para tanto, substitui-se $\phi(x, t)$, que é a solução exata, por Φ_i^n referente a solução discreta. Como o interesse é na condição inicial faz-se $n = 0$ e discretiza-se a função $g(x)$ conforme a malha \mathcal{M} :

$$\frac{\Phi_i^1 - \Phi_i^{-1}}{2\Delta t} = g_i = g(i\Delta x) \quad \text{ou} \quad \Phi_i^{-1} = \Phi_i^1 - 2\Delta t g_i. \quad (21)$$

Substituindo a equação 21 na equação 16 obtêm-se a equação de diferenças finitas via método explícito, para a solução da equação da onda no primeiro passo de tempo:

$$\Phi_i^1 = (1 - CFL^2)\Phi_i^0 + \frac{CFL^2}{2}(\Phi_{i-1}^0 + \Phi_{i+1}^0) + \Delta t g_i. \quad (22)$$

3 | OTIMIZAÇÃO PARA A CONDIÇÃO DE CFL

Uma vez já discretizada a equação da onda, é de grande interesse determinar os valores de CFL para os quais os erros provenientes dos truncamentos realizados na equação discretizada sejam os menores possíveis.

Para a análise do erro da solução discreta, utiliza-se uma equação modificada que descreve a equação 13 sem truncamentos. Define-se então uma função $\psi(x, t)$ que é igual a função Φ_i^n no ponto (n, i) , mas que difere da solução exata $\phi(x, t)$. Desse modo, $\phi(x, t)$ é a solução exata, Φ_i^n é a solução aproximada obtida por meio da solução do sistema discreto, $\psi(x, t)$ é a solução contínua numericamente igual a Φ_i^n no ponto (n, i) , porém é diferente da solução exata $\phi(x, t)$.

Substituindo Φ_i^n por $\psi(x, t)$ na equação 13, obtêm-se:

$$\frac{\psi(x, t - \Delta t) - 2\psi(x, t) + \psi(x, t + \Delta t)}{\Delta t^2} - c^2 \left[\frac{\psi(x - \Delta x, t) - 2\psi(x, t) + \psi(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} \right] = 0, \quad (23)$$

expandindo as funções $\psi(x, t - \Delta t)$, $\psi(x, t + \Delta t)$, $\psi(x - \Delta x, t)$ e $\psi(x + \Delta x, t)$ em série de Taylor em torno do ponto (x, t) e substituindo na equação 23:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2(n+1))!} \frac{\partial^{2(n+1)} \psi(x, t)}{\partial t^{2(n+1)}} \Delta t^{2n} \quad (24) \\ &+ c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2(n+1))!} \frac{\partial^{2(n+1)} \psi(x, t)}{\partial x^{2(n+1)}} \Delta x^{2n}. \end{aligned}$$

Note-se grande semelhança entre a equação 24 e a equação da onda 2, diferindo apenas os termos a direita da igualdade em ambas as equações, logo pode-se assumir que os termos presentes a direita da igualdade na equação 24 representam o erro numérico da solução discreta, visto que na equação original estes termos são nulos. Como o erro numérico da solução discreta é representado por séries infinitas se faz necessário o truncamento de tais séries para a obtenção da equação modificada. Seguindo essa premissa, trunca-se as séries da equação 24 nos termos de sexta ordem:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \psi(x, t)}{\partial t^4} \Delta t^2 - c^2 \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \psi(x, t)}{\partial x^4} \Delta x^2 \\ &+ \frac{1}{360} \frac{\partial^6 \psi(x, t)}{\partial t^6} \Delta t^4 - c^2 \frac{1}{360} \frac{\partial^6 \psi(x, t)}{\partial x^6} \Delta x^4 + \frac{1}{20160} \frac{\partial^8 \psi(x, t)}{\partial t^8} \Delta t^6 \quad (25) \\ &- c^2 \frac{1}{20160} \frac{\partial^8 \psi(x, t)}{\partial x^8} \Delta x^6 = 0. \end{aligned}$$

A fim de se obter a equação modificada, se reescreve a equação 25 apenas em função de termos diferenciais no espaço. Deste modo, deve-se eliminar os termos diferenciais temporais que representam o erro numérico, porém não se deve fazer o uso da equação 2, pois a equação 25 representa a solução discreta que por sua vez difere da solução exata (WARMING, 1974). A metodologia a ser adotada segue o princípio de se empregar continuamente a equação 25 para simplificação dos termos desejados, onde operações algébricas e diferenciais são conduzidas de maneira conveniente de modo que a aplicação do teorema de Clairaut-Schwarz se faça possível.

Apresenta-se na tabela 1 as operações que são conduzidas de forma que seja possível a eliminação das derivadas temporais pertencentes ao erro numérico da equação truncada.

A soma dos resultados das operações descritas na tabela 1, resulta na eliminação dos termos temporais referentes ao erro numérico, de forma a se obter a equação modificada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \left(\frac{c^4 \Delta t^2}{12} - \frac{c^2 \Delta x^2}{12} \right) \frac{\partial^4 \psi(x, t)}{\partial x^4} \\ & - \left(\frac{c^6 \Delta t^4}{90} - \frac{c^4 \Delta t^2 \Delta x^2}{72} + \frac{c^2 \Delta x^4}{360} \right) \frac{\partial^6 \psi(x, t)}{\partial x^6} \\ & + \left(\frac{c^8 \Delta t^6}{560} - \frac{c^6 \Delta t^4 \Delta x^2}{360} + \frac{c^4 \Delta t^2 \Delta x^4}{940} - \frac{c^2 \Delta x^6}{20160} \right) \frac{\partial^8 \psi(x, t)}{\partial x^8} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Ao se aplicar a definição de CFL na equação 26, essa pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{12} c^2 (CFL^2 - 1) \frac{\partial^4 \psi(x, t)}{\partial x^4} \Delta x^2 \\ & - \frac{1}{360} c^2 (4CFL^4 - 5CFL^2 + 1) \frac{\partial^6 \psi(x, t)}{\partial x^6} \Delta x^4 \\ & + \frac{1}{20160} c^2 (36CFL^6 - 56CFL^4 + 21CFL^2 - 1) \frac{\partial^8 \psi(x, t)}{\partial x^8} \Delta x^6 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Observa-se na equação 27 que para um valor unitário de CFL a equação se torna a equação da onda 2, ou seja, ao se escolher o par $(\Delta x, \Delta t)$ de forma que o CFL seja igual a unidade, todos os termos que representam o erro da solução numérica da equação 27 se anulam. Assim, pode-se dizer que o valor de CFL unitário é o valor no qual o método de diferenças finitas explícito apresenta o menor erro possível, de modo que pela equação 27, este erro é de no máximo oitava ordem ($\mathcal{O}(\Delta x^8)$).

Derivadas Parciais	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4}$	$\frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial x^2}$	$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}$	$\frac{\partial^6 \psi}{\partial t^6}$	$\frac{\partial^6 \psi}{\partial t^4 \partial x^2}$	$\frac{\partial^6 \psi}{\partial t^2 \partial x^4}$	$\frac{\partial^6 \psi}{\partial x^6}$	$\frac{\partial^8 \psi}{\partial t^8}$	$\frac{\partial^8 \psi}{\partial t^6 \partial x^2}$	$\frac{\partial^8 \psi}{\partial t^4 \partial x^4}$	$\frac{\partial^8 \psi}{\partial t^2 \partial x^6}$	$\frac{\partial^8 \psi}{\partial x^8}$
Coefficientes da Eq. 25	1	$-c^2$	$\frac{\Delta t^2}{12}$	0	$-\frac{c^2 \Delta x^2}{12}$	$\frac{\Delta t^4}{360}$	0	0	$-\frac{c^2 \Delta x^4}{360}$	$\frac{\Delta t^6}{20160}$	0	0	0	$-\frac{c^2 \Delta x^6}{20160}$
$-\frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Eq. 25$	0	0	$-\frac{\Delta t^2}{12}$	$\frac{c^2 \Delta t^2}{12}$	0	$-\frac{\Delta t^4}{144}$	0	$\frac{c^2 \Delta t^2 \Delta x^2}{144}$	0	$-\frac{\Delta t^6}{4320}$	0	0	$\frac{c^2 \Delta t^2 \Delta x^4}{4320}$	0
$-\frac{c^2 \Delta t^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Eq. 25$	0	0	0	$-\frac{c^2 \Delta t^2}{12}$	$\frac{c^4 \Delta t^2}{12}$	0	$-\frac{c^2 \Delta t^4}{144}$	0	$\frac{c^4 \Delta t^2 \Delta x^2}{144}$	0	$-\frac{c^2 \Delta t^6}{4320}$	0	0	$\frac{c^4 \Delta t^2 \Delta x^4}{4320}$
$\frac{\Delta t^4}{240} \frac{\partial^4}{\partial t^4} Eq. 25$	0	0	0	0	0	$\frac{\Delta t^4}{240}$	$-\frac{c^2 \Delta t^4}{240}$	0	0	$\frac{\Delta t^6}{2880}$	0	$-\frac{c^2 \Delta t^4 \Delta x^2}{2880}$	0	0
$\frac{c^2 \Delta t^4}{90} \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2} Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	$\frac{c^2 \Delta t^4}{90}$	$-\frac{c^4 \Delta t^4}{90}$	0	0	$\frac{c^2 \Delta t^6}{1080}$	0	$-\frac{c^4 \Delta t^4 \Delta x^2}{1080}$	0
$\frac{c^2 \Delta t^2}{720} (8c^2 \Delta t^2 - 5\Delta x^4) \frac{\partial^4}{\partial x^4} Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{c^4 \Delta t^4}{90}$	$-\frac{c^6 \Delta t^4}{90}$	0	0	$\frac{c^4 \Delta t^6}{1080}$	0	$-\frac{c^6 \Delta t^4 \Delta x^2}{1080}$
$-\frac{\Delta t^6}{6048} \frac{\partial^6}{\partial t^6} Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{\Delta t^6}{6048}$	$\frac{c^2 \Delta t^6}{6048}$	0	0	0
$-\frac{13c^2 \Delta t^6}{15120} \frac{\partial^6}{\partial t^4 \partial x^2} Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{13c^2 \Delta t^6}{15120}$	$\frac{13c^4 \Delta t^6}{15120}$	0	0
$-\frac{c^2 \Delta t^4}{15120} (27c^2 \Delta t^2 - 14\Delta x^2) \frac{\partial^6}{\partial t^2 \partial x^4} Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{c^4 \Delta t^6}{560}$	$\frac{c^6 \Delta t^6}{560}$	0
$-\frac{c^2 \Delta t^2}{30240} (7\Delta x^4 - 56c^2 \Delta t^2 \Delta x^2 + 54c^4 \Delta t^4) \frac{\partial^6}{\partial x^6} Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{c^6 \Delta t^6}{560}$
														$\frac{c^8 \Delta t^6}{560}$
														$\frac{c^4 \Delta t^4 \Delta x^2}{540}$
														$-\frac{c^6 \Delta t^4 \Delta x^2}{540}$
														$\frac{c^2 \Delta t^2 \Delta x^4}{4320}$
														$-\frac{c^4 \Delta t^2 \Delta x^4}{4320}$

Tabela 1: Procedimento para o cálculo da equação modificada.

4 | ESTUDO DE CASO

Para a solução da equação 15 é necessário estabelecer o domínio espacial, assim como o tempo final de simulação, além das condições de contorno e condições iniciais. Neste estudo de caso o domínio espacial escolhido foi de $x = [0, 2\pi]$, foi adotado um tempo final de simulação de 10 segundos e as condições iniciais impostas foram:

$$\phi(x, 0) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (28)$$

com as condições de contorno:

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0. \quad (29)$$

Para determinar o erro do método, comparou-se a solução numérica com a solução exata:

$$\phi(x, t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(c\frac{\pi}{L}t\right). \quad (30)$$

Pode ser observado nas tabelas 2 e 3 que o erro numérico é reduzido em quatro vezes para uma redução de duas vezes do passo espacial. Tal comportamento é característico de sistemas de segunda ordem.

Divisões Espaciais	Norma L_∞	Razão	Ordem	Norma L_2	Razão	Ordem
20	$3,69 \cdot 10^{-3}$	---	---	$2,55 \cdot 10^{-3}$	---	---
40	$9,22 \cdot 10^{-4}$	4,00	2,00	$6,44 \cdot 10^{-4}$	3,96	1,98
80	$2,31 \cdot 10^{-4}$	3,99	2,00	$1,62 \cdot 10^{-4}$	3,97	1,99
160	$5,77 \cdot 10^{-5}$	4,00	2,00	$4,07 \cdot 10^{-5}$	3,99	2,00
320	$1,44 \cdot 10^{-5}$	4,00	2,00	$1,02 \cdot 10^{-5}$	3,99	2,00

Tabela 2: Erro do método numérico para $CFL = 0,5$.

Divisões Espaciais	Norma L_∞	Razão	Ordem	Norma L_2	Razão	Ordem
20	$9,26 \cdot 10^{-4}$	---	---	$6,39 \cdot 10^{-4}$	---	---
40	$2,34 \cdot 10^{-4}$	3,96	1,99	$1,63 \cdot 10^{-4}$	3,91	1,97
80	$5,84 \cdot 10^{-5}$	4,00	2,00	$4,11 \cdot 10^{-5}$	3,98	1,99
160	$1,46 \cdot 10^{-5}$	3,99	2,00	$1,03 \cdot 10^{-5}$	3,98	1,99
320	$3,66 \cdot 10^{-6}$	4,00	2,00	$2,58 \cdot 10^{-6}$	3,99	2,00

Tabela 3: Erro do método numérico para $CFL = 0,9$.

Na tabela 4 se avalia o erro numérico através das normas L_∞ e L_2 para um valor de CFL unitário, onde se nota uma significativa redução no erro numérico quando

comparado aos demais valores de CFL . Fato o qual se deve ao valor unitário anular os erros de truncamento na equação modificada.

Divisões Espaciais	20	40	80	160	320
Norma L_∞	$8,88 \cdot 10^{-16}$	$4,05 \cdot 10^{-15}$	$3,16 \cdot 10^{-14}$	$4,16 \cdot 10^{-14}$	$8,12 \cdot 10^{-14}$
Norma L_2	$4,16 \cdot 10^{-16}$	$2,43 \cdot 10^{-15}$	$1,85 \cdot 10^{-14}$	$2,35 \cdot 10^{-14}$	$3,97 \cdot 10^{-14}$

Tabela 4: Erro do método numérico para $CFL = 1$.

Além da análise de convergência do método, é realizada a análise do erro variando-se o CFL . O número de divisões no domínio espacial foi mantido constante em 20 divisões (passo de aproximadamente $0,3142 \text{ m}$) para o intervalo $CFL = [9 \cdot 10^{-3}, 1]$, obtendo-se os gráficos das figuras 1 e 2.

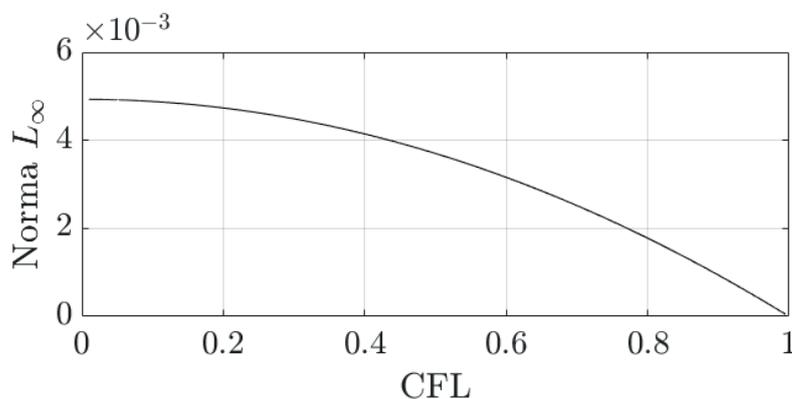


Figura 1: Norma L_∞ em função do CFL .

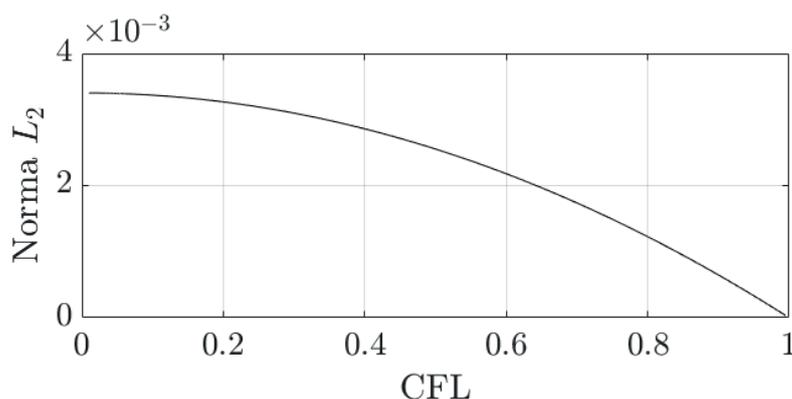


Figura 2: Norma L_2 em função do CFL .

Observa-se que nas figuras 1 e 2 o erro numérico descreve uma parábola com a variação do CFL , apresentando um máximo para baixos valores de CFL e decai à medida que este se aproxima do valor unitário, o que é esperado, visto que na equação 27 o termo de erro de segunda ordem tem caráter quadrático.

5 | CONCLUSÃO

Com a aplicação do método explícito para a solução da equação da onda, apresentam-se soluções numéricas cujos erros decrescem de forma parabólica com o incremento do CFL , e quando este possui o valor unitário o erro do método torna-se de pelo menos oitava ordem ($\mathcal{O}(\Delta x^8)$).

Para casos em que se necessite de uma boa exatidão da solução numérica, pode-se fazer proveito dessa propriedade do método explícito, a fim de se obter uma solução com maior acurácia à um baixo custo de recursos computacionais.

REFERÊNCIAS

COURANT, R., FRIEDRICHS, K., LEWY, H. **On the partial difference equations of mathematical physics.** IBM Journal of Research and Development, Nova York, v. 11, i. 2, pp. 215 – 234, 1967.

D’ALEMBERT, J. R. **Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration.** Histoire de l’académie royale des sciences et belles lettres de Berlin, v. 3, pp. 214 – 219, 1747.

LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problem.** 1. ed. Philadelphia: SIAM, 2007.

WARMING, R., HYETT, B. **The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods.** Journal of Computational Physics, California, v. 14, n. 2, pp. 159 – 179, 1974.

SOBRE O ORGANIZADOR

Eliei Constantino da Silva - Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Brasil, e Universidade do Minho, Portugal, respectivamente. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e membro do Grupo de Pesquisa Ensino e Aprendizagem como Objeto da Formação de Professores (GPEA). Atuou como professor bolsista do Departamento de Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Tem interesse e desenvolve pesquisas nos seguintes temas: Educação Matemática, Pensamento Computacional, Robótica, Programação Computacional, Tecnologias Digitais na Educação, Ensino e Aprendizagem, Teoria Histórico-Cultural e Formação de Professores. Atualmente é doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), editor de conteúdo da Geekie, colunista do InfoGeekie, membro do Comitê Técnico Científico da Atena Editora, professor do Colégio Internacional Radial e desenvolve ações de formação de professores relacionadas ao uso de tecnologias e Pensamento Computacional na Educação.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Anos Finais do Ensino Fundamental 46

Aprendizagem 2, 25, 69, 100, 140, 170

D

Desenho Geométrico 46, 130, 140

E

Educação Básica 34, 47, 121, 139, 179, 180, 181, 182

Educação Matemática 5, 1, 15, 16, 18, 25, 26, 35, 37, 45, 54, 55, 57, 66, 80, 81, 100, 101, 102, 114, 116, 127, 140, 142, 149, 158, 159, 170, 171, 172, 173, 176, 177, 179, 188, 189, 191, 192, 197

Elementos para esboço gráfico 90

Ensino 2, 5, 8, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 25, 27, 34, 35, 36, 40, 46, 47, 48, 55, 57, 58, 60, 61, 67, 68, 69, 76, 79, 80, 81, 84, 88, 89, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 100, 103, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 122, 126, 127, 129, 131, 133, 139, 142, 149, 158, 170, 174, 175, 180, 183, 184, 185, 187, 189, 191, 193

Ensino de Geometria 46, 48, 129

Ensino de Matemática 14, 27, 76, 79, 80, 103, 113, 127, 142

Ensino Médio 5, 8, 13, 55, 57, 58, 60, 61, 67, 68, 69, 81, 84, 89, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 103, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 118, 122, 126, 127, 129, 131, 133, 139, 175, 184, 185, 187

Ensino Superior 5, 184, 189

Equações do 1º e do 2º grau 55

Estratégia de Ensino 98

F

Fórmula de Poliedro 98

Fração 1, 3

G

GeoGebra 90, 92, 93, 95, 96, 116, 117, 118, 121, 122, 123, 126, 127

H

História da Matemática 13, 54, 98, 99, 100, 101, 102, 113, 114, 115, 173, 174, 175, 176

I

Imagem virtual 14

J

Jogos Educativos 26

Jogos Matemáticos 55, 66, 81, 88, 89

L

Laboratório de Matemática 81, 82, 84, 85, 86

Literatura 35, 37, 38, 43, 44

Lugar geométrico 90

M

Matemática 2, 5, 9, 1, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67, 69, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 105, 106, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 121, 124, 125, 126, 127, 129, 131, 132, 137, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 147, 149, 150, 151, 152, 158, 159, 160, 161, 162, 164, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 197, 202, 203, 217, 218, 224, 270

Matematofobia 81, 82

Música 1, 13

P

Parábola na forma canônica 90

PIBID 9, 26, 27, 28, 34, 56, 129, 130, 133, 181, 182, 183, 184, 186, 187, 188

R

Registros de representação 14, 25

Resolução de Problemas 55, 57, 58, 102, 173, 174, 176

S

Semiótica 14, 15, 16, 18, 19, 25

T

Trigonometria 5, 69

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-545-7



9 788572 475457