

# Ensino Aprendizagem de Matemática

Eliel Constantino da Silva  
(Organizador)



**Eliel Constantino da Silva**  
(Organizador)

# **Ensino Aprendizagem de Matemática**

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2019 Os Autores  
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora  
Editora Executiva: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira  
Diagramação: Geraldo Alves  
Edição de Arte: Lorena Prestes  
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

#### **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

### **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.ª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof.ª Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof.ª Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
E59	Ensino aprendizagem de matemática [recurso eletrônico] / Organizador Eliel Constantino da Silva. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019.  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-545-7 DOI 10.22533/at.ed.457192008  1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino. 3. Professores de matemática – Formação. I. Silva, Eliel Constantino da.  CDD 510.7
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

Esta obra reúne importantes trabalhos que tem como foco a Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem em salas de aula do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

Os trabalhos abordam temas atuais e relevantes ao ensino e aprendizagem da Matemática, tais como: a relação da Matemática com a música no ensino de frações, livros didáticos e livros literários no ensino de Matemática, uso de instrumentos de desenho geométrico, jogos, animes e mangá como contribuições para o desenvolvimento da Matemática em sala de aula, análise dos problemas que envolvem o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, a ausência do pensamento matemático e argumento dedutivo na Educação Matemática, investigação e modelagem matemática, tendências em Educação Matemática, formação inicial de professores de Matemática e apresentam um aprofundamento da Matemática através dos dígitos verificadores do cadastro de pessoas físicas (CPF), simetria molecular, análise numérica e o Teorema de Sinkhorn e Knopp.

A importância deste livro está na excelência e variedade de abordagens, recursos e discussões teóricas e metodológicas acerca do ensino e aprendizagem da Matemática em diversos níveis de ensino, decorrentes das experiências e vivências de seus autores no âmbito de pesquisas e práticas.

O livro inicia-se com seis capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. Em seguida há 9 capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, seguidos de 4 capítulos que abordam a temática do livro no Ensino Superior. E por fim, encontram-se 10 capítulos que trazem em seu cerne a Matemática enquanto área do conhecimento, sem a apresentação de uma discussão acerca do seu ensino e do processo de aprendizagem.

Desejo a todos os leitores, boas reflexões sobre os assuntos abordados, na expectativa de que essa coletânea contribua para suas pesquisas e práticas pedagógicas.

Elie Constantino da Silva



## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
RELAÇÕES ENTRE A MÚSICA E A MATEMÁTICA: UMA FORMA DE TRABALHAR COM FRAÇÕES	
<i>Enoque da Silva Reis</i> <i>Hemerson Milani Mendes</i> <i>Samanta Margarida Milani</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920081</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>14</b>
POSSIBILIDADES DIDÁTICAS E PEDAGÓGICAS DO USO DA IMAGEM VIRTUAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO ENVOLVENDO SEMIÓTICA EM UMA FANPAGE E LIVROS DIDÁTICOS	
<i>Luciano Gomes Soares</i> <i>José Joelson Pimentel de Almeida</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920082</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>26</b>
PIFE DA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO – UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA	
<i>Ítalo Andrew Rodrigues Santos</i> <i>João Paulo Antunes Carvalho</i> <i>Josué Antunes de Macêdo</i> <i>Lílian Isabel Ferreira Amorim</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920083</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>35</b>
O ENSINO DE MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DE LIVROS LITERÁRIOS EM TURMAS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
<i>Karine Maria da Cruz</i> <i>Lucília Batista Dantas Pereira</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920084</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>46</b>
RELATO DA UTILIZAÇÃO DE INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS	
<i>Luana Cardoso da Silva</i> <i>Washington Leonardo Quirino dos Santos</i> <i>Leonardo Cinésio Gomes</i> <i>Cristiane Fernandes de Souza</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920085</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>55</b>
ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DO JOGO VAI E VEM DAS EQUAÇÕES NO ENSINO DE EQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU	
<i>Anderson Dias da Silva</i> <i>Lucília Batista Dantas Pereira</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920086</b>	

<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>68</b>
TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DOS PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O SEU ENSINO NO IFPB CAMPUS CAJAZEIRAS-PB	
<i>Francisco Aureliano Vidal</i>	
<i>Carlos Lisboa Duarte</i>	
<i>Adriana Mary de Carvalho Azevedo</i>	
<i>Kíssia Carvalho</i>	
<i>Geraldo Herbetet de Lacerda</i>	
<i>Uelison Menezes da Silva</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920087</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>81</b>
OS JOGOS MATEMÁTICOS PARA MINIMIZAR A MATEMATOFOBIA DOS ALUNOS: UM ENCONTRO NO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA	
<i>Hellen Emanuele Vasconcelos Albino</i>	
<i>Yalorisa Andrade Santos</i>	
<i>Kátia Maria de Medeiros</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920088</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>90</b>
O ESTUDO DA PARÁBOLA NA FORMA CANÔNICA E COMO LUGAR GEOMÉTRICO	
<i>Micheli Cristina Starosky Roloff</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4571920089</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>98</b>
LEONHARD EULER (1707-1783) E ESTUDO DA FÓRMULA DE POLIEDROS NO ENSINO MÉDIO	
<i>Julimar da Silva Aguiar</i>	
<i>Eliane Leal Vasquez</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200810</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>116</b>
AUSÊNCIA DE PENSAMENTO MATEMÁTICO E ARGUMENTO DEDUTIVO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: RESULTADOS DE UMA PESQUISA	
<i>Marcella Luanna da Silva Lima</i>	
<i>Abigail Fregni Lins</i>	
<i>Patricia Sandalo Pereira</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200811</b>	
<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>129</b>
AS FORMAS GEOMÉTRICAS NO DESENHO (ANIMES, MANGÁ): UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA AO ENSINO DE GEOMETRIA	
<i>Luciano Gomes Soares</i>	
<i>Tayná Maria Amorim Monteiro Xavier</i>	
<i>Mônica Cabral Barbosa</i>	
<i>Rosemary Gomes Fernandes</i>	
<i>Maria da Conceição Vieira Fernandes</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200812</b>	

**CAPÍTULO 13 ..... 141**

**A INVESTIGAÇÃO E A MODELAGEM MATEMÁTICA: UM ESTUDO EXPERIMENTAL COM A LARANJA CITRUS SENENSIS**

*Igor Raphael Silva de Melo*  
*Célia Maria Rufino Franco*  
*Marcos dos Santos Nascimento*  
*Villalba Andréa Vieira de Lucena*

**DOI 10.22533/at.ed.45719200813**

**CAPÍTULO 14 ..... 150**

**“A MAÇÃ DO PROFESSOR”: EXPLORANDO O CÁLCULO DO VOLUME DE UMA MAÇÃ EM AULAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

*Igor Raphael Silva de Melo*  
*Célia Maria Rufino Franco*  
*Isaac Ferreira de Lima*  
*João Elder Laurentino da Silva*  
*Jucimeri Ismael de Lima*

**DOI 10.22533/at.ed.45719200814**

**CAPÍTULO 15 ..... 160**

**CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS: UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA**

*Júlio César dos Reis*  
*Aldo Brito de Jesus*

**DOI 10.22533/at.ed.45719200815**

**CAPÍTULO 16 ..... 171**

**ESTADO DA ARTE SOBRE TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO/UFPE-CAA**

*Marcela Maria Andrade Teixeira da Silva*  
*Edelweis José Tavares Barbosa*  
*Maria Lucivânia Souza dos Santos*  
*Jéssika Moraes da Silva*

**DOI 10.22533/at.ed.45719200816**

**CAPÍTULO 17 ..... 181**

**CONTRIBUIÇÕES DO PIBID NA FORMAÇÃO INICIAL DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

*Eduardo da Silva Andrade*  
*Eduarda de Lima Souza*  
*Fanciclaudio de Meireles Silveira*  
*Egracieli dos Santos Ananias*  
*Leonardo Cinésio Gomes*  
*Tiago Varelo da Silva*

**DOI 10.22533/at.ed.45719200817**

**CAPÍTULO 18 ..... 189**

**A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO CURSO DE PEDAGOGIA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS**

*Meire Aparecida De Oliveira Lopes*  
*Liliane Oliveira Souza*

**DOI 10.22533/at.ed.45719200818**



<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>204</b>
OS DÍGITOS VERIFICADORES DO CADASTRO DE PESSOAS FÍSICAS (CPF)	
<i>Pedro Leonardo Pinto de Souza</i>	
<i>Vinícius Vivaldino Pires de Almeida</i>	
<i>Edney Augusto Jesus de Oliveira</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200819</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>218</b>
SIMETRIA MOLECULAR	
<i>Guilherme Bernardes Rodrigues</i>	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Teófilo Jacob Freitas e Souza</i>	
<i>Alonso Sepúlveda Castellanos</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200820</b>	
<b>CAPÍTULO 21</b> .....	<b>225</b>
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200821</b>	
<b>CAPÍTULO 22</b> .....	<b>235</b>
SOLUÇÕES FRACAS PARA EQUAÇÃO DE BURGERS COM VISCOSIDADE NULA	
<i>Ana Paula Moreira de Freitas</i>	
<i>Santos Alberto Enriquez-Remigio</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200822</b>	
<b>CAPÍTULO 23</b> .....	<b>244</b>
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO DE CRANK-NICOLSON	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200823</b>	
<b>CAPÍTULO 24</b> .....	<b>254</b>
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Gabriel Machado dos Santos</i>	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200824</b>	

<b>CAPÍTULO 25</b> .....	<b>265</b>
A IDEIA GEOMÉTRICA DA HOMOLOGIA E DO GRUPO FUNDAMENTAL	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Lígia Laís Fêmina</i>	
<i>Teófilo Jacob Freitas e Souza</i>	
<i>Joyce Antunes da Silva</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200825</b>	
<b>CAPÍTULO 26</b> .....	<b>271</b>
ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	
<i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i>	
<i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i>	
<i>Hélio Ribeiro Neto</i>	
<i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200826</b>	
<b>CAPÍTULO 27</b> .....	<b>280</b>
TEOREMA DE SINKHORN E KNOPP	
<i>Gabriel Santos da Silva</i>	
<i>Daniel Cariello</i>	
<i>Wendy Díaz Valdés</i>	
<i>Joyce Antunes da Silva</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200827</b>	
<b>CAPÍTULO 28</b> .....	<b>285</b>
O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA UTILIZANDO PROJEÇÃO PARA ÓCULOS ANAGLIFO	
<i>Rosângela Costa Bandeira</i>	
<i>Aécio Alves Andrade</i>	
<i>Hudson Umbelino dos Anjos</i>	
<i>Jarles Oliveira Silva Nolêto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200828</b>	
<b>CAPÍTULO 29</b> .....	<b>298</b>
O USO DE SOFTWARES EDUCACIONAIS COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
<i>Cristiane Batista da Silva</i>	
<i>Aécio Alves Andrade</i>	
<i>Hudson Umbelino dos Anjos</i>	
<i>Jarles Oliveira Silva Nolêto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.45719200829</b>	
<b>SOBRE O ORGANIZADOR</b> .....	<b>309</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO</b> .....	<b>310</b>

## TEOREMA DE SINKHORN E KNOPP

### Gabriel Santos da Silva

FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia  
Uberlândia – MG

### Daniel Cariello

FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia  
Uberlândia – MG

### Wendy Díaz Valdés

FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia  
Uberlândia – MG

### Joyce Antunes da Silva

Engenharia Mecânica, Faculdade Pitágoras  
Uberlândia – MG

**ABSTRACT:** Stochastic matrices are widely studied and have several applications. Birkhoff's theorem ranks doubly stochastic matrices. Sinkhorn and Knopp used this theorem to find which square matrices with nonnegative inputs could provide a doubly stochastic matrix through a certain procedure. These theorems form a very interesting chapter in the history of Matrix Analysis and the purpose of this work is to spread it.

**KEYWORDS:** Stochastic Matrices. Support. Total Support.

**RESUMO:** As matrizes estocásticas são amplamente estudadas e possuem diversas aplicações. O teorema de Birkhoff classifica as matrizes duplamente estocásticas. Sinkhorn e Knopp utilizaram esse teorema para descobrir quais matrizes quadradas com entradas não negativas poderiam fornecer uma matriz duplamente estocástica através de um certo procedimento. Esses teoremas formam um capítulo muito interessante da história da Análise Matricial e o objetivo desse trabalho é divulgá-lo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Matrizes Estocásticas. Suporte. Suporte Total.

## 1 | INTRODUÇÃO

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  com entradas reais não negativas. Dizemos que  $A$  é linha estocástica se para cada linha a soma de seus elementos é igual a 1 (i.e.,  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$  para todo  $i$ ). Dizemos que ela é coluna estocástica se para cada coluna a soma de seus elementos é igual a 1 (i.e.,  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$  para todo  $j$ ). Se a matriz com entradas reais não negativas for linha e coluna estocástica dizemos que ela é duplamente estocástica.

Matrizes estocásticas foram amplamente estudadas e possuem diversas aplicações. Por exemplo, as cadeias de Markov utilizadas em estatística utilizam as matrizes estocásticas

## THEOREM OF SINKHORN AND KNOPP

e suas propriedades. O algoritmo de busca do Google também está baseado em matrizes estocásticas.

Um teorema muito interessante que classifica as matrizes duplamente estocásticas é o teorema de Birkhoff [1]. Ele diz que uma matriz é duplamente estocástica se, e somente se, ela for uma combinação convexa de matrizes permutação (ver teorema 3).

Sinkhorn e Knopp [2] inventaram um algoritmo para tentar obter de uma matriz com entradas reais não negativas,  $A_{n \times n}$ , uma matriz duplamente estocástica. Podemos descrever o algoritmo assim:

1. Normalize as linhas de  $A$  que ela se torne linha estocástica dividindo cada linha por sua soma. Isso significa que estamos multiplicando  $A$  por uma matriz diagonal positiva  $E_1$  à esquerda e obtendo a matriz linha estocástica:  $E_1 A$ .
2. Normalize as colunas de  $E_1 A$  para obter uma matriz coluna estocástica. Isso significa que estamos multiplicando  $E_1 A$  por uma matriz diagonal positiva  $D_1$  à direita e obtendo a matriz coluna estocástica:  $E_1 A D_1$ .
3. Provavelmente  $E_1 A D_1$  não é mais linha estocástica, mas podemos repetir o processo com  $E_1 A D_1$ .

Assim obtemos uma sequência de matrizes  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ora linha estocástica, ora coluna estocástica:

$$A_{2n-1} = (E_n \dots E_1)A(D_1 \dots D_{n-1}), \quad A_{2n} = (E_n \dots E_1)A(D_1 \dots D_n),$$

Note que se essa sequência convergir então ela converge para uma matriz duplamente estocástica.

A grande descoberta de Sinkhorn e Knopp foi uma condição necessária e suficiente para a convergência dessa sequência. Ela está baseada no teorema de Birkhoff.

**Definição 1.** Uma diagonal de  $A_{n \times n}$  é uma sequência de elementos  $a_{1\sigma(1)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$  onde  $\sigma$  é uma permutação de  $1, \dots, n$ . Dizemos que  $A$  tem **suporte** se existir uma diagonal de  $A$  com todos os elementos diferentes de zero.

Dizemos que  $A$  tem **suporte total** se todo  $a_{ij} \neq 0$  pertencer a alguma diagonal de  $A$  com elementos não nulos.

Sinkhorn e Knopp descobriram que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge se, e somente se, a matriz  $A$  tem suporte. Isso é surpreendente, pois suporte é uma condição muito simples.

Além disso, como o produto de matrizes diagonais também é uma matriz diagonal então as matrizes da sequência  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tem o formato  $DAD'$ , onde  $D$  e  $D'$  são matrizes

diagonais positivas.

Aqui podemos fazer uma pergunta interessante: Será que existe uma matriz duplamente estocástica com o formato  $DA'D$  ?

A resposta para essa pergunta é a segunda parte do teorema de Sinkhorn e Knopp.

*Existem matrizes diagonais positivas  $D$  e  $D'$  tais que  $DAD'$  é duplamente estocástica se, e somente se,  $A$  tiver suporte total.*

O objetivo desse trabalho é mostrar que essas condições são necessárias através do teorema de Birkhoff. A demonstração de que elas são suficientes é muito elaborada. Sinkhorn e Knopp fizeram um trabalho excepcional nessa demonstração.

## 2 | TEOREMAS DE BIRKHOFF E DE SINKHORN-KNOPP

**Definição 2.** *Seja  $\sigma \in S_n$  (i.e. uma permutação de  $1, \dots, n$ ). Seja  $P_\sigma$  uma matriz de ordem  $n$  tal que  $(P_\sigma)_{i,\sigma(i)} = 1$  e  $(P_\sigma)_{i,j} = 0$  se  $j \neq \sigma(i)$ . Essa  $P_\sigma$  é chamada de matriz permutação.*

**Teorema 3.** (Teorema de Birkhoff) *Seja  $B_{n \times n}$  uma matriz duplamente estocástica. Existem permutações  $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$  e  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tais que:*

$$1) B = \sum_{i=1}^k a_i P_{\sigma_i} \quad 2) a_i \geq 0, \forall i \quad 3) \sum_{i=1}^k a_i = 1$$

Em outras palavras,  $B$  é uma combinação convexa de matrizes permutações.

**Teorema 4.** (Teorema de Sinkhorn-Knopp) *Seja  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  com entradas não negativas. Uma condição necessária e suficiente para existir uma matriz duplamente estocástica  $B$  da forma  $D_1 A D_2$ , onde  $D_1$  e  $D_2$  são matrizes diagonais positivas é  $A$  ter suporte total. Se existir  $B$  com esse formato então ela é única.*

*Uma condição necessária e suficiente para que no processo iterativo de normalizar linhas e colunas alternadamente convirja a um limite duplamente estocástico é  $A$  ter suporte. Se  $A$  tem suporte total então o limite do processo é a única duplamente estocástica do tipo  $D_1 A D_2$  que existe. Se  $A$  tem suporte, mas não total, então o limite não pode ser do tipo  $D_1 A D_2$ .*

## 3 | CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O TEOREMA 4

Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequência definida na introdução. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$ , então  $B$  é duplamente estocástica.

Pelo teorema 3, a matriz  $B$  é uma combinação convexa de matrizes permutação. Cada matriz permutação dessa combinação convexa fornece uma diagonal positiva para  $B$ . Portanto  $B$  tem pelo menos uma diagonal positiva.

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$  então existe algum  $A_n$  com diagonal positiva, mas isso significa que  $A$  também tem uma diagonal não nula. Portanto  $A$  tem suporte se o limite

existir.

Agora se existirem matrizes diagonais positivas  $D_1, D_2$  tais que  $D_1 A D_2$  é duplamente estocástica então

$$A = \sum_{i=1}^s c_i D_1^{-1} P_{\sigma_i} D_2^{-1},$$

onde  $c_i > 0$  e  $\sum_{i=1}^k c_i = 1$  e pelo Teorema de Birkhoff. Note que as entradas não nulas de  $A$  vem das entradas não nulas de  $P_{\sigma_1}, \dots, P_{\sigma_k}$ . Portanto se  $a_{ij} \neq 0$  então existe  $l$  tal que  $(P_{\sigma_l})_{ij} \neq 0$ .

Assim a diagonal  $a_{1\sigma_l(1)}, \dots, a_{n\sigma_l(n)}$  é positiva e  $a_{ij} = a_{i\sigma_l(i)}$ .

Portanto dada qualquer entrada  $a_{ij}$  não nula, existe uma diagonal não nula de  $A$  que a contém, ou seja,  $A$  tem suporte total.

*Exemplos:*

1. Não existem matrizes diagonais positivas  $D_1, D_2$  tais que  $D_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_2$  é duplamente estocástica, pois  $a_{1,2} = 1$  não pertence a uma diagonal não nula de  $A$ .

2. Entretanto  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  tem suporte, pois  $a_{11} = a_{22} = 1$ . Assim o processo iterativo de normalizar linhas e colunas alternadamente converge a uma matriz duplamente estocástica.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$A_{2n+1} = \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{2n+2} & \frac{1}{2n+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2n+1} \\ 0 & \frac{2n}{2n+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 4 | CONCLUSÃO

Neste trabalho utilizamos o teorema de Birkhoff para mostrar as condições necessárias do teorema de Sinkhorn e Knopp. Esse teorema nos ensina de quais matrizes com entradas não negativas podemos obter matrizes duplamente estocásticas através do processo iterativo de normalizar linhas e colunas. Essas condições necessárias também são suficientes e isso é surpreendente. Esses teoremas formam



um capítulo muito interessantes da história da Análise Matricial.

## REFERÊNCIAS

M. Marcus and H. Minc, **A Survey of matrix theory and matrix inequalities**, Courier Corporation, vol 14, 1992.

R. Sinkhorn and P. Knopp, **Concerning nonnegative matrices and doubly stochastic matrices**, Pacific Journal of Mathematics (1967) 21, no. 2, 343--348.

## **SOBRE O ORGANIZADOR**

**Eliei Constantino da Silva** - Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Brasil, e Universidade do Minho, Portugal, respectivamente. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e membro do Grupo de Pesquisa Ensino e Aprendizagem como Objeto da Formação de Professores (GPEA). Atuou como professor bolsista do Departamento de Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Tem interesse e desenvolve pesquisas nos seguintes temas: Educação Matemática, Pensamento Computacional, Robótica, Programação Computacional, Tecnologias Digitais na Educação, Ensino e Aprendizagem, Teoria Histórico-Cultural e Formação de Professores. Atualmente é doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), editor de conteúdo da Geekie, colunista do InfoGeekie, membro do Comitê Técnico Científico da Atena Editora, professor do Colégio Internacional Radial e desenvolve ações de formação de professores relacionadas ao uso de tecnologias e Pensamento Computacional na Educação.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Anos Finais do Ensino Fundamental 46

Aprendizagem 2, 25, 69, 100, 140, 170

### D

Desenho Geométrico 46, 130, 140

### E

Educação Básica 34, 47, 121, 139, 179, 180, 181, 182

Educação Matemática 5, 1, 15, 16, 18, 25, 26, 35, 37, 45, 54, 55, 57, 66, 80, 81, 100, 101, 102, 114, 116, 127, 140, 142, 149, 158, 159, 170, 171, 172, 173, 176, 177, 179, 188, 189, 191, 192, 197

Elementos para esboço gráfico 90

Ensino 2, 5, 8, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 25, 27, 34, 35, 36, 40, 46, 47, 48, 55, 57, 58, 60, 61, 67, 68, 69, 76, 79, 80, 81, 84, 88, 89, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 100, 103, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 122, 126, 127, 129, 131, 133, 139, 142, 149, 158, 170, 174, 175, 180, 183, 184, 185, 187, 189, 191, 193

Ensino de Geometria 46, 48, 129

Ensino de Matemática 14, 27, 76, 79, 80, 103, 113, 127, 142

Ensino Médio 5, 8, 13, 55, 57, 58, 60, 61, 67, 68, 69, 81, 84, 89, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 103, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 118, 122, 126, 127, 129, 131, 133, 139, 175, 184, 185, 187

Ensino Superior 5, 184, 189

Equações do 1º e do 2º grau 55

Estratégia de Ensino 98

### F

Fórmula de Poliedro 98

Fração 1, 3

### G

GeoGebra 90, 92, 93, 95, 96, 116, 117, 118, 121, 122, 123, 126, 127

### H

História da Matemática 13, 54, 98, 99, 100, 101, 102, 113, 114, 115, 173, 174, 175, 176

### I

Imagem virtual 14

### J

Jogos Educativos 26

Jogos Matemáticos 55, 66, 81, 88, 89

### L

Laboratório de Matemática 81, 82, 84, 85, 86

Literatura 35, 37, 38, 43, 44

Lugar geométrico 90

## **M**

Matemática 2, 5, 9, 1, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67, 69, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 105, 106, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 121, 124, 125, 126, 127, 129, 131, 132, 137, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 147, 149, 150, 151, 152, 158, 159, 160, 161, 162, 164, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 197, 202, 203, 217, 218, 224, 270

Matematofobia 81, 82

Música 1, 13

## **P**

Parábola na forma canônica 90

PIBID 9, 26, 27, 28, 34, 56, 129, 130, 133, 181, 182, 183, 184, 186, 187, 188

## **R**

Registros de representação 14, 25

Resolução de Problemas 55, 57, 58, 102, 173, 174, 176

## **S**

Semiótica 14, 15, 16, 18, 19, 25

## **T**

Trigonometria 5, 69

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-545-7



9 788572 475457