

Ensino Aprendizagem de Matemática

Eliel Constantino da Silva
(Organizador)



Eliel Constantino da Silva
(Organizador)

Ensino Aprendizagem de Matemática

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Geraldo Alves
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.ª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof.ª Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.ª Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

| Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG) | |
|---|--|
| E59 | Ensino aprendizagem de matemática [recurso eletrônico] / Organizador Eliel Constantino da Silva. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-545-7 DOI 10.22533/at.ed.457192008 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino. 3. Professores de matemática – Formação. I. Silva, Eliel Constantino da. CDD 510.7 |
| Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422 | |

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

Esta obra reúne importantes trabalhos que tem como foco a Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem em salas de aula do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

Os trabalhos abordam temas atuais e relevantes ao ensino e aprendizagem da Matemática, tais como: a relação da Matemática com a música no ensino de frações, livros didáticos e livros literários no ensino de Matemática, uso de instrumentos de desenho geométrico, jogos, animes e mangá como contribuições para o desenvolvimento da Matemática em sala de aula, análise dos problemas que envolvem o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, a ausência do pensamento matemático e argumento dedutivo na Educação Matemática, investigação e modelagem matemática, tendências em Educação Matemática, formação inicial de professores de Matemática e apresentam um aprofundamento da Matemática através dos dígitos verificadores do cadastro de pessoas físicas (CPF), simetria molecular, análise numérica e o Teorema de Sinkhorn e Knopp.

A importância deste livro está na excelência e variedade de abordagens, recursos e discussões teóricas e metodológicas acerca do ensino e aprendizagem da Matemática em diversos níveis de ensino, decorrentes das experiências e vivências de seus autores no âmbito de pesquisas e práticas.

O livro inicia-se com seis capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. Em seguida há 9 capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, seguidos de 4 capítulos que abordam a temática do livro no Ensino Superior. E por fim, encontram-se 10 capítulos que trazem em seu cerne a Matemática enquanto área do conhecimento, sem a apresentação de uma discussão acerca do seu ensino e do processo de aprendizagem.

Desejo a todos os leitores, boas reflexões sobre os assuntos abordados, na expectativa de que essa coletânea contribua para suas pesquisas e práticas pedagógicas.

Elie Constantino da Silva

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| CAPÍTULO 1 | 1 |
| RELAÇÕES ENTRE A MÚSICA E A MATEMÁTICA: UMA FORMA DE TRABALHAR COM FRAÇÕES | |
| <i>Enoque da Silva Reis</i> <i>Hemerson Milani Mendes</i> <i>Samanta Margarida Milani</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.4571920081 | |
| CAPÍTULO 2 | 14 |
| POSSIBILIDADES DIDÁTICAS E PEDAGÓGICAS DO USO DA IMAGEM VIRTUAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO ENVOLVENDO SEMIÓTICA EM UMA FANPAGE E LIVROS DIDÁTICOS | |
| <i>Luciano Gomes Soares</i> <i>José Joelson Pimentel de Almeida</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.4571920082 | |
| CAPÍTULO 3 | 26 |
| PIFE DA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO – UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA | |
| <i>Ítalo Andrew Rodrigues Santos</i> <i>Joao Paulo Antunes Carvalho</i> <i>Josué Antunes de Macêdo</i> <i>Lílian Isabel Ferreira Amorim</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.4571920083 | |
| CAPÍTULO 4 | 35 |
| O ENSINO DE MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DE LIVROS LITERÁRIOS EM TURMAS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL | |
| <i>Karine Maria da Cruz</i> <i>Lucília Batista Dantas Pereira</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.4571920084 | |
| CAPÍTULO 5 | 46 |
| RELATO DA UTILIZAÇÃO DE INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS | |
| <i>Luana Cardoso da Silva</i> <i>Washington Leonardo Quirino dos Santos</i> <i>Leonardo Cinésio Gomes</i> <i>Cristiane Fernandes de Souza</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.4571920085 | |
| CAPÍTULO 6 | 55 |
| ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DO JOGO VAI E VEM DAS EQUAÇÕES NO ENSINO DE EQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU | |
| <i>Anderson Dias da Silva</i> <i>Lucília Batista Dantas Pereira</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.4571920086 | |

| | |
|---|------------|
| CAPÍTULO 7 | 68 |
| TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DOS PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O SEU ENSINO NO IFPB CAMPUS CAJAZEIRAS-PB | |
| <i>Francisco Aureliano Vidal</i> | |
| <i>Carlos Lisboa Duarte</i> | |
| <i>Adriana Mary de Carvalho Azevedo</i> | |
| <i>Kíssia Carvalho</i> | |
| <i>Geraldo Herbetet de Lacerda</i> | |
| <i>Uelison Menezes da Silva</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.4571920087 | |
| CAPÍTULO 8 | 81 |
| OS JOGOS MATEMÁTICOS PARA MINIMIZAR A MATEMATOFOBIA DOS ALUNOS: UM ENCONTRO NO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA | |
| <i>Hellen Emanuele Vasconcelos Albino</i> | |
| <i>Yalorisa Andrade Santos</i> | |
| <i>Kátia Maria de Medeiros</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.4571920088 | |
| CAPÍTULO 9 | 90 |
| O ESTUDO DA PARÁBOLA NA FORMA CANÔNICA E COMO LUGAR GEOMÉTRICO | |
| <i>Micheli Cristina Starosky Roloff</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.4571920089 | |
| CAPÍTULO 10 | 98 |
| LEONHARD EULER (1707-1783) E ESTUDO DA FÓRMULA DE POLIEDROS NO ENSINO MÉDIO | |
| <i>Julimar da Silva Aguiar</i> | |
| <i>Eliane Leal Vasquez</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200810 | |
| CAPÍTULO 11 | 116 |
| AUSÊNCIA DE PENSAMENTO MATEMÁTICO E ARGUMENTO DEDUTIVO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: RESULTADOS DE UMA PESQUISA | |
| <i>Marcella Luanna da Silva Lima</i> | |
| <i>Abigail Fregni Lins</i> | |
| <i>Patricia Sandalo Pereira</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200811 | |
| CAPÍTULO 12 | 129 |
| AS FORMAS GEOMÉTRICAS NO DESENHO (ANIMES, MANGÁ): UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA AO ENSINO DE GEOMETRIA | |
| <i>Luciano Gomes Soares</i> | |
| <i>Tayná Maria Amorim Monteiro Xavier</i> | |
| <i>Mônica Cabral Barbosa</i> | |
| <i>Rosemary Gomes Fernandes</i> | |
| <i>Maria da Conceição Vieira Fernandes</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200812 | |

CAPÍTULO 13 141

A INVESTIGAÇÃO E A MODELAGEM MATEMÁTICA: UM ESTUDO EXPERIMENTAL COM A LARANJA CITRUS SENENSIS

Igor Raphael Silva de Melo
Célia Maria Rufino Franco
Marcos dos Santos Nascimento
Villalba Andréa Vieira de Lucena

DOI 10.22533/at.ed.45719200813

CAPÍTULO 14 150

“A MAÇÃ DO PROFESSOR”: EXPLORANDO O CÁLCULO DO VOLUME DE UMA MAÇÃ EM AULAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Igor Raphael Silva de Melo
Célia Maria Rufino Franco
Isaac Ferreira de Lima
João Elder Laurentino da Silva
Jucimeri Ismael de Lima

DOI 10.22533/at.ed.45719200814

CAPÍTULO 15 160

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS: UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

Júlio César dos Reis
Aldo Brito de Jesus

DOI 10.22533/at.ed.45719200815

CAPÍTULO 16 171

ESTADO DA ARTE SOBRE TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO/UFPE-CAA

Marcela Maria Andrade Teixeira da Silva
Edelweis José Tavares Barbosa
Maria Lucivânia Souza dos Santos
Jéssika Moraes da Silva

DOI 10.22533/at.ed.45719200816

CAPÍTULO 17 181

CONTRIBUIÇÕES DO PIBID NA FORMAÇÃO INICIAL DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Eduardo da Silva Andrade
Eduarda de Lima Souza
Fanciclaudio de Meireles Silveira
Egracieli dos Santos Ananias
Leonardo Cinésio Gomes
Tiago Varelo da Silva

DOI 10.22533/at.ed.45719200817

CAPÍTULO 18 189

A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO CURSO DE PEDAGOGIA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS

Meire Aparecida De Oliveira Lopes
Liliane Oliveira Souza

DOI 10.22533/at.ed.45719200818

| | |
|--|------------|
| CAPÍTULO 19 | 204 |
| OS DÍGITOS VERIFICADORES DO CADASTRO DE PESSOAS FÍSICAS (CPF) | |
| <i>Pedro Leonardo Pinto de Souza</i> | |
| <i>Vinícius Vivaldino Pires de Almeida</i> | |
| <i>Edney Augusto Jesus de Oliveira</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200819 | |
| CAPÍTULO 20 | 218 |
| SIMETRIA MOLECULAR | |
| <i>Guilherme Bernardes Rodrigues</i> | |
| <i>Wendy Díaz Valdés</i> | |
| <i>Teófilo Jacob Freitas e Souza</i> | |
| <i>Alonso Sepúlveda Castellanos</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200820 | |
| CAPÍTULO 21 | 225 |
| ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO | |
| <i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i> | |
| <i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i> | |
| <i>Hélio Ribeiro Neto</i> | |
| <i>Aristeu da Silveira Neto</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200821 | |
| CAPÍTULO 22 | 235 |
| SOLUÇÕES FRACAS PARA EQUAÇÃO DE BURGERS COM VISCOSIDADE NULA | |
| <i>Ana Paula Moreira de Freitas</i> | |
| <i>Santos Alberto Enriquez-Remigio</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200822 | |
| CAPÍTULO 23 | 244 |
| ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO DE CRANK-NICOLSON | |
| <i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i> | |
| <i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i> | |
| <i>Hélio Ribeiro Neto</i> | |
| <i>Aristeu da Silveira Neto</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200823 | |
| CAPÍTULO 24 | 254 |
| ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO | |
| <i>Gabriel Machado dos Santos</i> | |
| <i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i> | |
| <i>Hélio Ribeiro Neto</i> | |
| <i>Aristeu da Silveira Neto</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200824 | |

| | |
|--|------------|
| CAPÍTULO 25 | 265 |
| A IDEIA GEOMÉTRICA DA HOMOLOGIA E DO GRUPO FUNDAMENTAL | |
| <i>Wendy Díaz Valdés</i> | |
| <i>Lígia Laís Fêmina</i> | |
| <i>Teófilo Jacob Freitas e Souza</i> | |
| <i>Joyce Antunes da Silva</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200825 | |
| CAPÍTULO 26 | 271 |
| ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO | |
| <i>Ítalo Augusto Magalhães de Ávila</i> | |
| <i>Felipe José Oliveira Ribeiro</i> | |
| <i>Hélio Ribeiro Neto</i> | |
| <i>Aristeu da Silveira Neto</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200826 | |
| CAPÍTULO 27 | 280 |
| TEOREMA DE SINKHORN E KNOPP | |
| <i>Gabriel Santos da Silva</i> | |
| <i>Daniel Cariello</i> | |
| <i>Wendy Díaz Valdés</i> | |
| <i>Joyce Antunes da Silva</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200827 | |
| CAPÍTULO 28 | 285 |
| O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA UTILIZANDO PROJEÇÃO PARA ÓCULOS ANAGLIFO | |
| <i>Rosângela Costa Bandeira</i> | |
| <i>Aécio Alves Andrade</i> | |
| <i>Hudson Umbelino dos Anjos</i> | |
| <i>Jarles Oliveira Silva Nolêto</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200828 | |
| CAPÍTULO 29 | 298 |
| O USO DE SOFTWARES EDUCACIONAIS COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS | |
| <i>Cristiane Batista da Silva</i> | |
| <i>Aécio Alves Andrade</i> | |
| <i>Hudson Umbelino dos Anjos</i> | |
| <i>Jarles Oliveira Silva Nolêto</i> | |
| DOI 10.22533/at.ed.45719200829 | |
| SOBRE O ORGANIZADOR | 309 |
| ÍNDICE REMISSIVO | 310 |

TEOREMA DE SINKHORN E KNOPP

Gabriel Santos da Silva

FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia – MG

Daniel Cariello

FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia – MG

Wendy Díaz Valdés

FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia – MG

Joyce Antunes da Silva

Engenharia Mecânica, Faculdade Pitágoras
Uberlândia – MG

ABSTRACT: Stochastic matrices are widely studied and have several applications. Birkhoff's theorem ranks doubly stochastic matrices. Sinkhorn and Knopp used this theorem to find which square matrices with nonnegative inputs could provide a doubly stochastic matrix through a certain procedure. These theorems form a very interesting chapter in the history of Matrix Analysis and the purpose of this work is to spread it.

KEYWORDS: Stochastic Matrices. Support. Total Support.

RESUMO: As matrizes estocásticas são amplamente estudadas e possuem diversas aplicações. O teorema de Birkhoff classifica as matrizes duplamente estocásticas. Sinkhorn e Knopp utilizaram esse teorema para descobrir quais matrizes quadradas com entradas não negativas poderiam fornecer uma matriz duplamente estocástica através de um certo procedimento. Esses teoremas formam um capítulo muito interessante da história da Análise Matricial e o objetivo desse trabalho é divulgá-lo.

PALAVRAS-CHAVE: Matrizes Estocásticas. Suporte. Suporte Total.

1 | INTRODUÇÃO

Seja A uma matriz quadrada de ordem n com entradas reais não negativas. Dizemos que A é linha estocástica se para cada linha a soma de seus elementos é igual a 1 (i.e., $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ para todo i). Dizemos que ela é coluna estocástica se para cada coluna a soma de seus elementos é igual a 1 (i.e., $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ para todo j). Se a matriz com entradas reais não negativas for linha e coluna estocástica dizemos que ela é duplamente estocástica.

Matrizes estocásticas foram amplamente estudadas e possuem diversas aplicações. Por exemplo, as cadeias de Markov utilizadas em estatística utilizam as matrizes estocásticas

THEOREM OF SINKHORN AND KNOPP

e suas propriedades. O algoritmo de busca do Google também está baseado em matrizes estocásticas.

Um teorema muito interessante que classifica as matrizes duplamente estocásticas é o teorema de Birkhoff [1]. Ele diz que uma matriz é duplamente estocástica se, e somente se, ela for uma combinação convexa de matrizes permutação (ver teorema 3).

Sinkhorn e Knopp [2] inventaram um algoritmo para tentar obter de uma matriz com entradas reais não negativas, $A_{n \times n}$, uma matriz duplamente estocástica. Podemos descrever o algoritmo assim:

1. Normalize as linhas de A que ela se torne linha estocástica dividindo cada linha por sua soma. Isso significa que estamos multiplicando A por uma matriz diagonal positiva E_1 à esquerda e obtendo a matriz linha estocástica: $E_1 A$.
2. Normalize as colunas de $E_1 A$ para obter uma matriz coluna estocástica. Isso significa que estamos multiplicando $E_1 A$ por uma matriz diagonal positiva D_1 à direita e obtendo a matriz coluna estocástica: $E_1 A D_1$.
3. Provavelmente $E_1 A D_1$ não é mais linha estocástica, mas podemos repetir o processo com $E_1 A D_1$.

Assim obtemos uma sequência de matrizes $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ora linha estocástica, ora coluna estocástica:

$$A_{2n-1} = (E_n \dots E_1)A(D_1 \dots D_{n-1}), \quad A_{2n} = (E_n \dots E_1)A(D_1 \dots D_n),$$

Note que se essa sequência convergir então ela converge para uma matriz duplamente estocástica.

A grande descoberta de Sinkhorn e Knopp foi uma condição necessária e suficiente para a convergência dessa sequência. Ela está baseada no teorema de Birkhoff.

Definição 1. Uma diagonal de $A_{n \times n}$ é uma sequência de elementos $a_{1\sigma(1)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$ onde σ é uma permutação de $1, \dots, n$. Dizemos que A tem **suporte** se existir uma diagonal de A com todos os elementos diferentes de zero.

Dizemos que A tem **suporte total** se todo $a_{ij} \neq 0$ pertencer a alguma diagonal de A com elementos não nulos.

Sinkhorn e Knopp descobriram que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge se, e somente se, a matriz A tem suporte. Isso é surpreendente, pois suporte é uma condição muito simples.

Além disso, como o produto de matrizes diagonais também é uma matriz diagonal então as matrizes da sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem o formato DAD' , onde D e D' são matrizes

diagonais positivas.

Aqui podemos fazer uma pergunta interessante: Será que existe uma matriz duplamente estocástica com o formato $DA'D$?

A resposta para essa pergunta é a segunda parte do teorema de Sinkhorn e Knopp.

Existem matrizes diagonais positivas D e D' tais que DAD' é duplamente estocástica se, e somente se, A tiver suporte total.

O objetivo desse trabalho é mostrar que essas condições são necessárias através do teorema de Birkhoff. A demonstração de que elas são suficientes é muito elaborada. Sinkhorn e Knopp fizeram um trabalho excepcional nessa demonstração.

2 | TEOREMAS DE BIRKHOFF E DE SINKHORN-KNOPP

Definição 2. *Seja $\sigma \in S_n$ (i.e. uma permutação de $1, \dots, n$). Seja P_σ uma matriz de ordem n tal que $(P_\sigma)_{i,\sigma(i)} = 1$ e $(P_\sigma)_{i,j} = 0$ se $j \neq \sigma(i)$. Essa P_σ é chamada de matriz permutação.*

Teorema 3. (Teorema de Birkhoff) *Seja $B_{n \times n}$ uma matriz duplamente estocástica. Existem permutações $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$1) B = \sum_{i=1}^k a_i P_{\sigma_i} \quad 2) a_i \geq 0, \forall i \quad 3) \sum_{i=1}^k a_i = 1$$

Em outras palavras, B é uma combinação convexa de matrizes permutações.

Teorema 4. (Teorema de Sinkhorn-Knopp) *Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ com entradas não negativas. Uma condição necessária e suficiente para existir uma matriz duplamente estocástica B da forma $D_1 A D_2$, onde D_1 e D_2 são matrizes diagonais positivas é A ter suporte total. Se existir B com esse formato então ela é única.*

Uma condição necessária e suficiente para que no processo iterativo de normalizar linhas e colunas alternadamente convirja a um limite duplamente estocástico é A ter suporte. Se A tem suporte total então o limite do processo é a única duplamente estocástica do tipo $D_1 A D_2$ que existe. Se A tem suporte, mas não total, então o limite não pode ser do tipo $D_1 A D_2$.

3 | CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O TEOREMA 4

Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência definida na introdução. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$, então B é duplamente estocástica.

Pelo teorema 3, a matriz B é uma combinação convexa de matrizes permutação. Cada matriz permutação dessa combinação convexa fornece uma diagonal positiva para B . Portanto B tem pelo menos uma diagonal positiva.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$ então existe algum A_n com diagonal positiva, mas isso significa que A também tem uma diagonal não nula. Portanto A tem suporte se o limite

existir.

Agora se existirem matrizes diagonais positivas D_1, D_2 tais que $D_1 A D_2$ é duplamente estocástica então

$$A = \sum_{i=1}^s c_i D_1^{-1} P_{\sigma_i} D_2^{-1},$$

onde $c_i > 0$ e $\sum_{i=1}^k c_i = 1$ e pelo Teorema de Birkhoff. Note que as entradas não nulas de A vem das entradas não nulas de $P_{\sigma_1}, \dots, P_{\sigma_k}$. Portanto se $a_{ij} \neq 0$ então existe l tal que $(P_{\sigma_l})_{ij} \neq 0$.

Assim a diagonal $a_{1\sigma_l(1)}, \dots, a_{n\sigma_l(n)}$ é positiva e $a_{ij} = a_{i\sigma_l(i)}$.

Portanto dada qualquer entrada a_{ij} não nula, existe uma diagonal não nula de A que a contém, ou seja, A tem suporte total.

Exemplos:

1. Não existem matrizes diagonais positivas D_1, D_2 tais que $D_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_2$ é duplamente estocástica, pois $a_{1,2} = 1$ não pertence a uma diagonal não nula de A .

2. Entretanto $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem suporte, pois $a_{11} = a_{22} = 1$. Assim o processo iterativo de normalizar linhas e colunas alternadamente converge a uma matriz duplamente estocástica.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$A_{2n+1} = \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{2n+2} & \frac{1}{2n+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2n+1} \\ 0 & \frac{2n}{2n+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 | CONCLUSÃO

Neste trabalho utilizamos o teorema de Birkhoff para mostrar as condições necessárias do teorema de Sinkhorn e Knopp. Esse teorema nos ensina de quais matrizes com entradas não negativas podemos obter matrizes duplamente estocásticas através do processo iterativo de normalizar linhas e colunas. Essas condições necessárias também são suficientes e isso é surpreendente. Esses teoremas formam

um capítulo muito interessantes da história da Análise Matricial.

REFERÊNCIAS

M. Marcus and H. Minc, **A Survey of matrix theory and matrix inequalities**, Courier Corporation, vol 14, 1992.

R. Sinkhorn and P. Knopp, **Concerning nonnegative matrices and doubly stochastic matrices**, Pacific Journal of Mathematics (1967) 21, no. 2, 343--348.

SOBRE O ORGANIZADOR

Eliei Constantino da Silva - Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Brasil, e Universidade do Minho, Portugal, respectivamente. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e membro do Grupo de Pesquisa Ensino e Aprendizagem como Objeto da Formação de Professores (GPEA). Atuou como professor bolsista do Departamento de Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Tem interesse e desenvolve pesquisas nos seguintes temas: Educação Matemática, Pensamento Computacional, Robótica, Programação Computacional, Tecnologias Digitais na Educação, Ensino e Aprendizagem, Teoria Histórico-Cultural e Formação de Professores. Atualmente é doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), editor de conteúdo da Geekie, colunista do InfoGeekie, membro do Comitê Técnico Científico da Atena Editora, professor do Colégio Internacional Radial e desenvolve ações de formação de professores relacionadas ao uso de tecnologias e Pensamento Computacional na Educação.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Anos Finais do Ensino Fundamental 46

Aprendizagem 2, 25, 69, 100, 140, 170

D

Desenho Geométrico 46, 130, 140

E

Educação Básica 34, 47, 121, 139, 179, 180, 181, 182

Educação Matemática 5, 1, 15, 16, 18, 25, 26, 35, 37, 45, 54, 55, 57, 66, 80, 81, 100, 101, 102, 114, 116, 127, 140, 142, 149, 158, 159, 170, 171, 172, 173, 176, 177, 179, 188, 189, 191, 192, 197

Elementos para esboço gráfico 90

Ensino 2, 5, 8, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 25, 27, 34, 35, 36, 40, 46, 47, 48, 55, 57, 58, 60, 61, 67, 68, 69, 76, 79, 80, 81, 84, 88, 89, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 100, 103, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 122, 126, 127, 129, 131, 133, 139, 142, 149, 158, 170, 174, 175, 180, 183, 184, 185, 187, 189, 191, 193

Ensino de Geometria 46, 48, 129

Ensino de Matemática 14, 27, 76, 79, 80, 103, 113, 127, 142

Ensino Médio 5, 8, 13, 55, 57, 58, 60, 61, 67, 68, 69, 81, 84, 89, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 103, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 118, 122, 126, 127, 129, 131, 133, 139, 175, 184, 185, 187

Ensino Superior 5, 184, 189

Equações do 1º e do 2º grau 55

Estratégia de Ensino 98

F

Fórmula de Poliedro 98

Fração 1, 3

G

GeoGebra 90, 92, 93, 95, 96, 116, 117, 118, 121, 122, 123, 126, 127

H

História da Matemática 13, 54, 98, 99, 100, 101, 102, 113, 114, 115, 173, 174, 175, 176

I

Imagem virtual 14

J

Jogos Educativos 26

Jogos Matemáticos 55, 66, 81, 88, 89

L

Laboratório de Matemática 81, 82, 84, 85, 86

Literatura 35, 37, 38, 43, 44

Lugar geométrico 90

M

Matemática 2, 5, 9, 1, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67, 69, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 105, 106, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 121, 124, 125, 126, 127, 129, 131, 132, 137, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 147, 149, 150, 151, 152, 158, 159, 160, 161, 162, 164, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 197, 202, 203, 217, 218, 224, 270

Matematofobia 81, 82

Música 1, 13

P

Parábola na forma canônica 90

PIBID 9, 26, 27, 28, 34, 56, 129, 130, 133, 181, 182, 183, 184, 186, 187, 188

R

Registros de representação 14, 25

Resolução de Problemas 55, 57, 58, 102, 173, 174, 176

S

Semiótica 14, 15, 16, 18, 19, 25

T

Trigonometria 5, 69

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-545-7



9 788572 475457