Ensino Aprendizagem de Matemática

Eliel Constantino da Silva
(Organizador)

Atena
Editora
Ano 2019

Eliel Constantino da Silva
(Organizador)

Ensino Aprendizagem de Matemática

Atena Editora
2019

Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Geraldo Alves
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E59 Ensino aprendizagem de matemática [recurso eletrônico] / Organizador Eliel Constantino da Silva. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-545-7
DOI 10.22533/at.ed.457192008

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino. 3.Professores de matemática – Formação. I. Silva, Eliel Constantino da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2019

APRESENTAÇÃO

Esta obra reúne importantes trabalhos que tem como foco a Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem em salas de aula do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

Os trabalhos abordam temas atuais e relevantes ao ensino e aprendizagem da Matemática, tais como: a relação da Matemática com a música no ensino de frações, livros didáticos e livros literários no ensino de Matemática, uso de instrumentos de desenho geométrico, jogos, animes e mangá como contribuições para o desenvolvimento da Matemática em sala de aula, análise dos problemas que envolvem o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, a ausência do pensamento matemático e argumento dedutivo na Educação Matemática, investigação e modelagem matemática, tendências em Educação Matemática, formação inicial de professores de Matemática e apresentam um aprofundamento da Matemática através dos dígitos verificadores do cadastro de pessoas físicas (CPF), simetria molecular, análise numérica e o Teorema de Sinkhorn e Knopp.

A importância deste livro está na excelência e variedade de abordagens, recursos e discussões teóricas e metodológicas acerca do ensino e aprendizagem da Matemática em diversos níveis de ensino, decorrentes das experiências e vivências de seus autores no âmbito de pesquisas e práticas.

O livro inicia-se com seis capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. Em seguida há 9 capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, seguidos de 4 capítulos que abordam a temática do livro no Ensino Superior. E por fim, encontram-se 10 capítulos que trazem em seu cerne a Matemática enquanto área do conhecimento, sem a apresentação de uma discussão acerca do seu ensino e do processo de aprendizagem.

Desejo a todos os leitores, boas reflexões sobre os assuntos abordados, na expectativa de que essa coletânea contribua para suas pesquisas e práticas pedagógicas.

Eliel Constantino da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 27

TEOREMA DE SINKHORN E KNOPP

Gabriel Santos da Silva
FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia – MG

Daniel Cariello
FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia – MG

Wendy Díaz Valdés
FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia – MG

Joyce Antunes da Silva
Engenharia Mecânica, Faculdade Pitágoras
Uberlândia – MG

RESUMO: As matrizes estocásticas são amplamente estudadas e possuem diversas aplicações. O teorema de Birkhoff classifica as matrizes duplamente estocásticas. Sinkhorn e Knopp utilizaram esse teorema para descobrir quais matrizes quadradas com entradas não negativas poderiam fornecer uma matriz duplamente estocástica através de um certo procedimento. Esses teoremas formam um capítulo muito interessante da história da Análise Matricial e o objetivo desse trabalho é divulgá-lo.

PALAVRAS-CHAVE: Matrizes Estocásticas. Suporte. Suporte Total.

THEOREM OF SINKHORN AND KNOPP

ABSTRACT: Stochastic matrices are widely studied and have several applications. Birkhoff's theorem ranks doubly stochastic matrices. Sinkhorn and Knopp used this theorem to find which square matrices with nonnegative inputs could provide a doubly stochastic matrix through a certain procedure. These theorems form a very interesting chapter in the history of Matrix Analysis and the purpose of this work is to spread it.

KEYWORDS: Stochastic Matrices. Support. Total Support.

1 I INTRODUÇÃO

Seja *A* uma matriz quadrada de ordem *n* com entradas reais não negativas. Dizemos que *A* é linha estocástica se para cada linha a soma de seus elementos é igual a 1 (i.e., $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ para todo *i*). Dizemos que ela é coluna estocástica se para cada coluna a soma de seus elementos é igual a 1 (i.e., $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ para todo *j*). Se a matriz com entradas reais não negativas for linha e coluna estocástica dizemos que ela é duplamente estocástica.

Matrizes estocásticas foram amplamente estudadas e possuem diversas aplicações. Por exemplo, as cadeias de Markov utilizadas em estatística utilizam as matrizes estocásticas e suas propriedades. O algoritmo de busca do Google também está baseado em matrizes estocásticas.

Um teorema muito interessante que classifica as matrizes duplamente estocásticas é o teorema de Birkhoff [1]. Ele diz que uma matriz é duplamente estocástica se, e somente se, ela for uma combinação convexa de matrizes permutação (ver teorema 3).

Sinkhorn e Knopp [2] inventaram um algoritmo para tentar obter de uma matriz com entradas reais não negativas, $A_{n\times n}$, uma matriz duplamente estocástica. Podemos descrever o algoritmo assim:

1. Normalize as linhas de A que ela se torne linha estocástica dividindo cada linha por sua soma. Isso significa que estamos multiplicando A por uma matriz diagonal positive E_1 à esquerda e obtendo a matriz linha estocástica: E_1A.

2. Normalize as coluna E_1A de para obter uma matriz coluna estocástica. Isso significa que estamos multiplicando E_1A por uma matriz diagonal positiva D_1 à direita e obtendo a matriz coluna estocástica: E_1AD_1.

3. Provavelmente E_1AD_1 não é mais linha estocástica, mas podemos repetir o processo com E_1AD_1.

Assim obtemos uma sequência de matrizes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ora linha estocástica, ora coluna estocástica:

$$A_{2n-1} = (E_n \dots E_1)A(D_1 \dots D_{n-1}),\ \ A_{2n} = (E_n \dots E_1)A(D_1 \dots D_n),$$

Note que se essa sequência convergir então ela converge para uma matriz duplamente estocástica.

A grande descoberta de Sinkhorn e Knopp foi uma condição necessária e suficiente para a convergência dessa sequência. Ela está baseada no teorema de Birkhoff.

Definição 1. *Uma diagonal de* $A_{n\times n}$ *é uma sequência de elementos* $a_{1\sigma(1)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$ *onde* σ *é uma permutação de* $1, \dots, n$*. Dizemos que A tem **suporte** se existir uma diagonal de A com todos os elementos diferentes de zero.*

*Dizemos que A tem **suporte total** se todo* $a_{ij} \neq 0$ *pertencer a alguma diagonal de A com elementos não nulos.*

Sinkhorn e Knopp descobriram que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se, e somente se, a matriz *A* tem suporte. Isso é surpreendente, pois suporte é uma condição muito simples.

Além disso, como o produto de matrizes diagonais também é uma matriz diagonal então as matrizes da sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem o formato *DAD'*, onde *D* e *D'* são matrizes diagonais positivas.

Aqui podemos fazer uma pergunta interessante: Será que existe uma matriz duplamente estocástica com o formato *DA'D* ?

A resposta para essa pergunta é a segunda parte do teorema de Sinkhorn e Knopp.

Existem matrizes diagonais positivas D e D' tais que DAD' é duplamente estocástica se, e somente se, A tiver suporte total.

O objetivo desse trabalho é mostrar que essas condições são necessárias através do teorema de Birkhoff. A demonstração de que elas são suficientes é muito elaborada. Sinkhorn e Knopp fizeram um trabalho excepcional nessa demonstração.

2 I TEOREMAS DE BIRKHOFF E DE SINKHORN-KNOPP

Definição 2. *Seja* $\sigma \in S_n$ *(i.e. uma permutação de* $1, \dots, n$*). Seja* P_σ *uma matriz de ordem* n *tal que* $(P_\sigma)_{i,\sigma(i)} = 1$ *e* $(P_\sigma)_{i,j} = 0$ *se* $j \neq \sigma(i)$*. Essa* P_σ *é chamada de matriz permutação.*

Teorema 3. *(Teorema de Birkhoff) Seja* $B_{n\times n}$ *uma matriz duplamente estocástica. Existem permutações* $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$ *e* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ *tais que:*

1) $B = \sum_{i=1}^{k} a_i P_{\sigma_i}$ 2) $a_i \geq 0, \forall i$ 3) $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$

Em outras palavras, *B* é uma combinação convexa de matrizes permutações.

Teorema 4. *(Teorema de Sinkhorn-Knopp) Seja* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *com entradas não negativas. Uma condição necessária e suficiente para existir uma matriz duplamente estocástica B da forma* D_1AD_2*, onde* D_1 *e* D_2 *são matrizes diagonais positivas é A ter suporte total. Se existir B com esse formato então ela é única.*

Uma condição necessária e suficiente para que no processo iterativo de normalizar linhas e colunas alternadamente convirja a um limite duplamente estocástico é A ter suporte. Se A tem suporte total então o limite do processo é a única *duplamente estocástica do tipo* D_1AD_2 *que existe. Se A tem suporte, mas não total, então o limite não pode ser do tipo* D_1AD_2.

3 I CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O TEOREMA 4

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida na introdução. Se $\lim_{n\to\infty} A_n = B$, então *B* é duplamente estocástica.

Pelo teorema 3, a matriz *B* é uma combinação convexa de matrizes permutação. Cada matriz permutação dessa combinação convexa fornece uma diagonal positiva para *B*. Portanto *B* tem pelo menos uma diagonal positiva.

Como $\lim_{n\to\infty} A_n = B$ então existe algum A_n com diagonal positiva, mas isso significa que *A* também tem uma diagonal não nula. Portanto *A* tem suporte se o limite existir.

Agora se existirem matrizes diagonais positivas D_1, D_2 tais que $D_1\ AD_2$ é duplamente estocástica então

$$A = \sum_{i=1}^{s} c_i D_1^{-1} P_{\sigma_i} D_2^{-1},$$

onde $c_i > 0$ e $\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$ e pelo Teorema de Birkhoff. Note que as entradas não nulas de *A* vem das entradas não nulas de $P_{\sigma_1}, \dots, P_{\sigma_k}$. Portanto se $a_{ij} \neq 0$ então existe l tal que $(P_{\sigma_l})_{ij} \neq 0$.

Assim a diagonal $a_{1\sigma_l(1)}, \dots, a_{n\sigma_l(n)}$ é positiva e $a_{ij} = a_{i\sigma_l(i)}$.

Portanto dada qualquer entrada a_{ij} não nula, existe uma diagonal não nula de *A* que a contém, ou seja, *A* tem suporte total.

Exemplos:

1. Não existem matrizes diagonais positivas D_1,D_2 tais que $D_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_2$ é duplamente estocástica, pois $a_{1,2} = 1$ não pertence a uma diagonal não nula de *A*.

2. Entretanto $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem suporte, pois $a_{11} = a_{22} = 1$. Assim o processo iterativo de normalizar linhas e colunas alternadamente converge a uma matriz duplamente estocástica.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$A_{2n+1} = \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{2n+2} & \frac{1}{2n+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2n+1} \\ 0 & \frac{2n}{2n+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 I CONCLUSÃO

Neste trabalho utilizamos o teorema de Birkhoff para mostrar as condições necessárias do teorema de Sinkhorn e Knopp. Esse teorema nos ensina de quais matrizes com entradas não negativas podemos obter matrizes duplamente estocásticas através do processo iterativo de normalizar linhas e colunas. Essas condições necessárias também são suficientes e isso é surpreendente. Esses teoremas formam um capítulo muito interessantes da história da Análise Matricial.

REFERÊNCIAS

M. Marcus and H. Minc, **A Survey of matrix theory and matrix inequalities**, Courier Corporation, vol 14, 1992.

R. Sinkhorn and P. Knopp, **Concerning nonnegative matrices and doubly stochastic matrices**, Pacific Journal of Mathematics (1967) 21, no. 2, 343--348.

SOBRE O ORGANIZADOR

Eliel Constantino da Silva - Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Brasil, e Universidade do Minho, Portugal, respectivamente. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e membro do Grupo de Pesquisa Ensino e Aprendizagem como Objeto da Formação de Professores (GPEA). Atuou como professor bolsista do Departamento de Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Tem interesse e desenvolve pesquisas nos seguintes temas: Educação Matemática, Pensamento Computacional, Robótica, Programação Computacional, Tecnologias Digitais na Educação, Ensino e Aprendizagem, Teoria Histórico-Cultural e Formação de Professores. Atualmente é doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), editor de conteúdo da Geekie, colunista do InfoGeekie, membro do Comitê Técnico Científico da Atena Editora, professor do Colégio Internacional Radial e desenvolve ações de formação de professores relacionadas ao uso de tecnologias e Pensamento Computacional na Educação.

ÍNDICE REMISSIVO

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-545-7
9 788572 475457