

**Jorge González Aguilera
Alan Mario Zuffo
(Organizadores)**

Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida através da Evolução Tecnológica 4



Jorge González Aguilera

Alan Mario Zuffo

(Organizadores)

Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida através da Evolução Tecnológica 4

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Karine de Lima
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.ª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof.ª Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.ª Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
C569	Ciências exatas e da terra e a dimensão adquirida através da evolução tecnológica 4 [recurso eletrônico] / Organizadores Jorge González Aguilera, Alan Mario Zuffo. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. – (Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida Através da Evolução Tecnológica; v. 4) Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-475-7 DOI 10.22533/at.ed.757191107 1. Ciências exatas e da terra – Pesquisa – Brasil. 2. Tecnologia. I. Aguilera, Jorge González. II. Zuffo, Alan Mario CDD 509.81
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A obra “*Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida através da Evolução Tecnológica vol. 4*” aborda uma publicação da Atena Editora, apresenta, em seus 22 capítulos, conhecimentos tecnológicos e aplicados as Ciências Exatas e da Terra.

Este volume dedicado à Ciência Exatas e da Terra traz uma variedade de artigos que mostram a evolução tecnológica que vem acontecendo nestas duas ciências, e como isso tem impactado a vários setores produtivos e de pesquisas. São abordados temas relacionados com a produção de conhecimento na área da matemática, química do solo, computação, geoprocessamento de dados, biodigestores, educação ambiental, manejo da água, entre outros temas. Estas aplicações visam contribuir no aumento do conhecimento gerado por instituições públicas e privadas no país.

Aos autores dos diversos capítulos, pela dedicação e esforços sem limites, que viabilizaram esta obra que retrata os recentes avanços científicos e tecnológicos nas Ciências Exatas e da Terra, os agradecimentos dos Organizadores e da Atena Editora.

Por fim, esperamos que este livro possa colaborar e instigar mais estudantes e pesquisadores na constante busca de novas tecnologias para a área da Física, Matemática, e na Agronomia e, assim, contribuir na procura de novas pesquisas e tecnologias que possam solucionar os problemas que enfrentamos no dia a dia.

Jorge González Aguilera
Alan Mario Zuffo

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
ANÁLISIS DE LAS CÉLULAS DE CARCINOMA DE CÁNCER CANINO SUPERVIVENCIA DESPUÉS DE LA IRRADIACIÓN CON EQUIPO DE COBALTO	
Paula de Sanctis Brunno Felipe Ramos Caetano Luis Maurício Montoya Flórez Valéria Barbosa de Souza Luís Fernando Barbisan Marco Antônio Rodrigues Fernandes Ramon Kaneno Rogério Antônio de Oliveira Willian Fernando Zambuzzi Noeme Sousa Rocha	
DOI 10.22533/at.ed.7571911071	
CAPÍTULO 2	15
AVALIAÇÃO COMPUTACIONAL DE INTERAÇÕES ENTRE AS PROTEÍNAS M E M2-1 DO VÍRUS SINCICIAL RESPIRATÓRIO HUMANO (HRSV) E RIBAVIRINA	
Ernesto Tavares Neto Leandro Cristante de Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.7571911072	
CAPÍTULO 3	23
ENCAPSULAMENTO DE NANOPARTÍCULAS FERROMAGNÉTICAS EM MATRIZ EPOXÍDICA PARA O TRATAMENTO DE HEPATOCARCINOMA	
Bruno de Vasconcellos Averaldo Hangai Alexandre Zirpoli Simões	
DOI 10.22533/at.ed.7571911073	
CAPÍTULO 4	38
ESTUDO QUÍMICO DO EXTRATO CLOROFÓRMICO DAS FOLHAS DA <i>Annona muricata</i> L.	
Maria Luiza da Silva Pereira Karoline Pereira Ribeiro	
DOI 10.22533/at.ed.7571911074	
CAPÍTULO 5	48
MÉTODO SIMPLIFICADO PARA CALCULAR A ROTAÇÃO DO SOL	
Matheus Leal Castanheira Dietmar Willian Foryta	
DOI 10.22533/at.ed.7571911075	
CAPÍTULO 6	55
MONITORAMENTO AMBIENTAL DOS FOCOS DE QUEIMADAS NO ESTADO DE ALAGOAS PARA OS ANOS DE 2015 E 2016	
Esdras de Lima Andrade Whendel Cezar Silva de Couto Daniel Nivaldo da Conceição Alex Nazário Silva Oliveira Elizangela Lima de Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.7571911076	

CAPÍTULO 7	64
MONITORAMENTO DE IMPACTOS AMBIENTAIS PÓS-IMPLANTAÇÃO DE ESTAÇÕES DE TRATAMENTO DE ESGOTOS SANITÁRIOS E AÇÕES CORRELATAS DO ÓRGÃO AMBIENTAL FISCALIZADOR	
Poliana Arruda Fajardo	
DOI 10.22533/at.ed.7571911077	
CAPÍTULO 8	74
OSCILADOR HARMÔNICO: MODELO PARA A DESCRIÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS EM EQUILÍBRIO ESTÁVEL SOFRENDO PEQUENAS OSCILAÇÕES	
Pedro Henrique Ferreira de Oliveira João Philipe Macedo Braga	
DOI 10.22533/at.ed.7571911078	
CAPÍTULO 9	86
PALAVRAS CRUZADAS: UMA FERRAMENTA LÚDICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA E DAS CIÊNCIAS DA NATUREZA	
Osmar Luís Nascimento Gotardi Andréa Martini Ribeiro Fernanda Marchiori Grave Letícia Cristiane Malakowski Heck Mario Victor Vilas Boas	
DOI 10.22533/at.ed.7571911079	
CAPÍTULO 10	102
QUANTIFICAÇÃO DE P-FENILENODIAMINA (PPD) EM FORMULAÇÃO DE CORANTE PERMANENTE DE CABELO	
Maria Letícia Mendes Soares Thamiris Costa dos Santos Carolina Venturini Uliana Mariele Mucio Pedroso Hideko Yamanaka	
DOI 10.22533/at.ed.75719110710	
CAPÍTULO 11	111
RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO DIRETO DO POLIESTIRENO EXPANDIDO (EPS)	
Mariana Basolli Borsatto Beatriz Garcia Silva Paulo César Lodi Rogério Custódio Azevedo Souza Bruna Rafaela Malaghini Caio Henrique Buranello dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.75719110711	

CAPÍTULO 12	121
SAÚDE E SEGURANÇA DO TRABALHO PARA O DESENVOLVIMENTO SEGURO DE BIOPROCESSOS	
Milson dos Santos Barbosa Lays Carvalho De Almeida Isabelle Maria Duarte Gonzaga Aline Resende Dória Luma Mirely Souza Brandão Isabela Nascimento Souza Débora da Silva Vilar Juliana Lisboa Santana Priscilla Sayonara de Sousa Brandão	
DOI 10.22533/at.ed.75719110712	
CAPÍTULO 13	129
SÍNTESE DOS NÍVEIS INTERPRETANTES DAS ESTAÇÕES DO ANO APRESENTADOS POR FUTUROS PROFESSORES DE CIÊNCIAS	
Daniel Trevisan Sanzovo Carlos Eduardo Laburú	
DOI 10.22533/at.ed.75719110713	
CAPÍTULO 14	140
SISTEMA DE CONTROLE EMPREGANDO TECNOLOGIA RFID	
Felipe de Carvalho Forti Alexandre César Rodrigues da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.75719110714	
CAPÍTULO 15	150
TÉCNICAS DE MEDIÇÃO BASEADAS NA FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA PARA DETECÇÃO DE DANO BASEADA NA IMPEDÂNCIA ELETROMECAÂNICA	
Guilherme Silva Bergamim Caio Henrique Rodrigues	
DOI 10.22533/at.ed.75719110715	
CAPÍTULO 16	164
TÉCNICAS DE SENSORIAMENTO REMOTO APLICADAS À MINERAÇÃO NA REGIÃO SEMIÁRIDA DO SERIDÓ POTIGUAR	
Paulo Sérgio de Rezende Nascimento	
DOI 10.22533/at.ed.75719110716	
CAPÍTULO 17	180
UM ESTUDO SOBRE ANÉIS LOCAIS	
Brendol Alves Oliveira Gomes Eliris Cristina Rizzioli	
DOI 10.22533/at.ed.75719110717	
CAPÍTULO 18	192
UMA VISÃO GERAL DE FRAMEWORKS PHP POPULARES PARA PROGRAMAÇÃO WEB	
Lilian N A Lazzarin Leandro do Nascimento dos Anjos João Florentino da Silva Junior	
DOI 10.22533/at.ed.75719110718	

CAPÍTULO 19	202
UM PANORAMA DA QUALIDADE DA INTERNET BANDA LARGA NA REGIÃO DO MATO GRANDE	
Igor Augusto De Carvalho Alves	
Hellen Adélia Oliveira Da Cruz	
Maria De Lourdes Assunção Soares Dantas Fonseca	
DOI 10.22533/at.ed.75719110719	
CAPÍTULO 20	216
USO DE SUPPORT VECTOR MACHINE EM AMBIENTE SUBTERRÂNEO: APLICAÇÃO EM POÇO DE MONITORAMENTO PARA REGRESSÃO DE DADOS DE NÍVEL DE ÁGUA	
Thiago Boeno Patricio Luiz	
Guilherme de Freitas Gaiardo	
José Luiz Silvério da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.75719110720	
CAPÍTULO 21	229
UTILIZAÇÃO DA DIFRAÇÃO DE RAIOS X NA CARACTERIZAÇÃO DO HIDRÓXIDO DUPLO LAMELAR (HDL) MG/AL E SEU EFEITO MEMÓRIA	
Victor De Aguiar Pedott	
Elton Luis Hillesheim	
Iemedelais Bordin	
Rogério Marcos Dallago	
Marcelo Luís Mignoni	
DOI 10.22533/at.ed.75719110721	
CAPÍTULO 22	237
UTILIZAÇÃO DE SIMULAÇÕES NUMÉRICAS PARA ESTUDO DE ONDAS OCEÂNICAS	
Matheus José de Deus	
Mateus das Neves Gomes	
DOI 10.22533/at.ed.75719110722	
SOBRE OS ORGANIZADORES	242

UM ESTUDO SOBRE ANÉIS LOCAIS

Brendol Alves Oliveira Gomes

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Júnior” – UNESP Campus Rio Claro
Rio Claro - São Paulo

Eliris Cristina Rizzioli

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Júnior” – UNESP Campus Rio Claro
Rio Claro - São Paulo

RESUMO: O projeto consiste em abordar os elementos da Álgebra, em particular Anéis Locais, por meio de definições e resultados. Entre esses destacamos: Variedades, Ideais, Anéis de Coordenadas e Anéis Locais, com isso estamos interessados em demonstrar e explorar quando é um Domínio Local Noetheriano, em que é o conjunto das funções racionais definidas em . Para tanto, primeiramente faremos a definição do -espaço Afim, de Variedades e de Anel de Coordenadas, e tendo essa base podemos definir Anel Local e algumas de suas propriedades e resultados que facilitam a compreensão da demonstração do teorema.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Algébrica, Teorema Base de Hilbert, Anel Noetheriano.

A STUDY ON LOCAL RINGS

ABSTRACT: The project consisting of approach the Algebraic elements, in particular Local Rings, by means of definition and results. Among these we highlight: Varieties, Ideals, Coordinates Charges and Local Rings, with that we are interested in demonstrate and explorer when is a Noetherian Local Domain, in what is the set the Rational Function defined in . Therefore, first, we make the definition of the -space Affine, Varieties and Coordinates Charges; and having this basis we can define Local Ring and some of its properties and results that facilitate the understanding of the proof of the theorem.

KEYWORDS: Algebraic Geometry, Base Theorem of Hilbert, Noetherian Ring.

1 | INTRODUÇÃO

A seguir apresentamos algumas definições e resultados sobre o trabalho. No que se segue consideremos k um corpo e $k[X_1, \dots, X_n]$ o Anel de Polinômios nas variáveis com coeficientes no corpo.

Definição 1 O n -espaço A^n é o produto cartesiano “ n -vezes” de k .

Definição 2 Dizemos que $X \subset A^n$ é um

conjunto algébrico, se $X = V(S)$, sendo $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$ um subconjunto qualquer. Ou seja,

$$V = \{P \in A^n; f(P) = 0, \forall f \in S\}.$$

Proposição 1: Se temos X um subconjunto algébrico de A^n , então o subconjunto de $k[X_1, \dots, X_n]$ definido por

$$I(X) = \{F \in k[X_1, \dots, X_n]; F(P) = 0, \forall P \in X\},$$

é um ideal do anel.

Demonstração: Basta observar que

- $I(X) \subset k[X_1, \dots, X_n]$.
- $0 \in I(X)$ já que $0(P) = 0, \forall P \in X$.
- $\forall F, G \in I(X), (F + G)(P) = F(P) + G(P) = 0 + 0 = 0, \forall P \in X$.
- $\forall F \in I(X)$ e $\forall \alpha \in k[X_1, \dots, X_n]$ $(\alpha F)(P) = \alpha(P)F(P) = 0, \forall P \in X$

Definição 3. Dizemos que $X \subset A^n$ é um conjunto algébrico **reduzível** se existem X_1 e X_2 conjuntos algébricos de A^n , tais que

$$X = X_1 \cup X_2.$$

Caso contrário temos que X é **irreduzível**. Além disso, chamamos de *Variedade Afim* um conjunto algébrico irreduzível.

Proposição 2. Um conjunto algébrico V é irreduzível se, e somente se, $I(V)$ é um ideal primo.

Demonstração: Suponha que $I(V)$ não seja um ideal primo e mostremos que V é reduzível.

Se $I(V)$ não é um ideal primo, então o produto $F_1 \cdot F_2 \in I(V)$, com $F_i \notin I(V)$. Veja que podemos fazer a separação de V do seguinte modo:

$$V = (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$$

com

$$V \cap V(F_1) \subsetneq V.$$

Pela construção, podemos ver que

$$(V \cap V(F_1) \cup (V \cap V(F_2))) \subset V.$$

Observe que temos a outra inclusão pois $\forall P \in V$, então $F_i(P) = 0, \forall i \neq \{1, 2\}$, já para

$i = \{1, 2\}$ sabemos que $F_1 F_2 = 0$ por hipótese. E ainda cada $V \cap V(F_i)$ é um conjunto algébrico para $i = \{1, 2\}$. Portanto V é um conjunto algébrico redutível.

Reciprocamente, supondo que V seja redutível mostremos que $I(V)$ não é primo.

Para isto, veja que $V = V_1 \cup V_2$, $V_i \subsetneq V$, então por um resultado fácil de verificar, temos que quaisquer $I \in J$ ideais no qual $I \subset J$, então $V(I) \supset V(J)$, fazendo a substituição temos $(V_i)I(V_i) \supsetneq I(V)$, tomando $F_1 \in V_1$ e $F_2 \in V_2$ segue que tanto F_1 e F_2 não pertencem à $I(V)$ porém o produto $F_1 F_2 \in I(V)$ portanto $I(V)$ não é primo.

Tomemos agora V uma variedade de \mathbb{A}^n e $\Gamma(V)$ seu anel de coordenadas. Pelo fato de $\Gamma(V)$ ser um domínio, isto é, não possui divisores de zero, podemos construir seu corpo de frações. Esse corpo será chamado de **Corpo de Frações Racionais de V** e será denotado por $K(V)$, um elemento de $K(V)$ é uma função racional de V .

Se f é uma função racional de V e P pertence a V diremos que f está definida em P . Se para $a, b \in \Gamma(V)$, temos

$$f = \frac{a}{b}; b(P) \neq 0$$

Observe que há diversas formas de escrever f como quociente de funções polinomiais, (caso a e b tenha um múltiplo comum). Diremos que f está definida em P se é possível encontrar um denominador b não anule em P .

Se Γ é um domínio de fatoração única (DFU), então existe uma única representação de $f = a/b$, em que a e b não possuem divisores em comum e assim f estará definida em P se, e somente se, $b(P) \neq 0$.

Exemplo: Determinemos as funções racionais definidas na variedade $V = V(XW - YZ) \subset \mathbb{A}^4$.

O anel coordenadas é do tipo

$$\Gamma(V) = \frac{K[X, Y, Z, W]}{\langle XW - YZ \rangle}$$

Sendo $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ e \bar{W} as classes residuais de X, Y, Z e W , respectivamente, em $\Gamma(V)$, então

$$f = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{\bar{Z}}{\bar{W}} \in K(V).$$

Temos que $\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{\bar{Z}}{\bar{W}} \in K(V)$, pois

$$XW - ZY \in \langle XW - ZY \rangle.$$

Então,

$$XW + \langle XW - ZY \rangle = YZ + \langle XW - ZY \rangle$$

$$\overline{XW} = \overline{YZ}$$

ou seja,

$$\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{\bar{Z}}{\bar{W}}.$$

Dizemos ainda que, f está definida em $P = (x, y, z, w)$, se os denominadores \bar{Y} ou \bar{W} forem não nulos em P , isto é, $y \neq 0$ ou $w \neq 0$.

Definição 4 Dado $P \in V$, dizemos que $\mathcal{O}_P(V)$ será o conjunto de todas as funções racionais que estão definidas em P . Veja que $\mathcal{O}_P(V)$, constitui um subanel de $K(V)$ contendo $\Gamma(V)$ e satisfaz

$$K \subset \Gamma(V) \subset \mathcal{O}_P(V) \subset K(V).$$

Dizemos que $\mathcal{O}_P(V)$ é o **Anel Local de V em P** . E o conjunto dos pontos Q em V na qual f não está definida, chama-se **Conjunto de Polos de f** denotado por \mathcal{P}_f .

Proposição 3 O conjunto de polos de uma função racional sobre V é um subconjunto algébrico de V .

Demonstração: Suponha que $V \subset \mathbb{A}^n$. Para cada $G \in K[X_1, \dots, X_n]$, temos \bar{G} como a classe residual de G em $\Gamma(V)$. Seja agora $f \in K(V)$ e o conjunto

$$J_f = \{G \in K[X_1, \dots, X_n], \bar{G}f \in \Gamma(V)\}.$$

Veja que J_f é um ideal de $K[X_1, \dots, X_n]$.

De fato,

- $J_f \subset K[X_1, \dots, X_n]$.
- Para quaisquer $G, H \in J_f$ temos que $\overline{G}f$ e $\overline{H}f$ pertencem à $\Gamma(V)$ e como esse é um anel, temos que a soma $\overline{G}f + \overline{H}f$ também pertence à $\Gamma(V)$ e é associativo, $(\overline{G} + \overline{H})f$ e veja que

$$\overline{G} + \overline{H} = (G + I(V)) + (H + I(V)) = (G + H) + I(V) = \overline{G + H}.$$

Portanto,

$$(\overline{G}f + \overline{H}f) = \overline{G + H}f$$

então $G + H \in J_f$.

- Para quaisquer $\alpha \in K[X_1, \dots, X_n]$ e $G \in J_f$, temos que, considerando $\overline{\alpha}$ como a classe residual de α em $\Gamma(V)$,

$$\overline{\alpha}Gf = \overline{\alpha}\overline{G}f \in \Gamma(V).$$

Veja agora que $I(V) \subset J_f$, pois para qualquer $h \in I(V)$, temos

$$h \in K[X_1, \dots, X_n], h(P) = 0, \forall P \in V.$$

Isto significa que $\overline{h}f \in \Gamma(V)$, já que $(\overline{h}f)(P) = \overline{0}$, para todo $P \in V$.

Mostremos que o conjunto dos polos de f , \mathcal{P}_f , é o conjunto $V(J_f)$.

- $\mathcal{P}_f \subset V(J_f)$.

De fato, seja $P_0 \in \mathcal{P}_f$ qualquer, com $b(P_0) = 0$, para \overline{b} , tal que $f = a/b$, ($a \neq 0$).

Seja algum $G \in J_f$, (com $G \neq 0$). Logo $\overline{G}f \in J_f$, ou seja, $\overline{G}f = c$, para algum $c \in \Gamma(V)$. Como sabemos:

$$\overline{G} = \frac{G + I(V)}{1 + I(V)} \quad e \quad f = \frac{a + I(V)}{b + I(V)}.$$

Assim temos:

$$\overline{G} = \frac{G + I(V)}{1 + I(V)} \cdot f = \frac{a + I(V)}{b + I(V)} = c + I(V)$$

então,

$$Ga + I(V) = bc + I(V). \quad (1)$$

Como temos $b(P_0) = 0$, assim $b \in I(V)$, conseqüentemente $bc \in I(V)$, isto é, $bc + I(V) = I(V)$. E portanto, pela Equação (1), temos

$$Ga + I(V) = I(V) \rightarrow Ga \in I(V)$$

ou seja, $a(P) = 0$ ou $G(P) = 0$, para todo $P \in V$, como a é não nulo, então $G(P) = 0, \forall P \in V$ e tomando $P_0 \in \mathcal{P}_f \subset V$, segue que

$$G(P_0) = 0$$

Portanto, $P_0 \in V(J_f)$.

$$\bullet \quad V(J_f) \subset \mathcal{P}_f$$

Seja $P \in V(J_f)$ qualquer, então $G(P) = 0$, para todo $G \in J_f$, observe que $b \in J_f$, já que

$$\bar{b}f = b \cdot \frac{a}{b} = a \in \Gamma(V)$$

Logo $b(P) = 0$.

Proposição 4 Para qualquer anel de coordenadas de V e conjunto de funções racionais sobre V temos a relação

$$\Gamma(V) = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V).$$

Demonstração: Seja $f \in \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V)$, então a função racional f está bem definida em todo $P \in V$. Observe que $V(J_f) \neq \emptyset$, já que na Proposição 4.1 temos que este é conjunto de todos os pontos em que f não está definida e assim pelo *Teorema Fraco de Hilbert* temos que J_f não é um ideal próprio, ou seja $1 \in J_f$ então podemos escrever

$$\bar{1}f = f \in \Gamma(V).$$

Para a outra inclusão temos um resultado fácil de mostrar Sendo S um conjunto de polinômios de $k[X_1, \dots, X_n]$ e X um conjunto algébrico de A^n , temos:

$$S \subset I(V(S)) \text{ e } X \subset V(I(X)).$$

Segue que $\Gamma(V) \subset \mathcal{O}_P(V)$

Definição 5 Dado $f = a/b \in \mathcal{O}_P(V)$, com a e $b \in \Gamma(V)$, definimos o **Valor de f em P** denotado por $f(P) = a(P)/b(P)$, independente da escolha de a e b .

Lema 1 O subconjunto $M_P(V) = \{f \in \mathcal{O}_P(V), f(P) = 0\}$ de $\mathcal{O}_P(V)$ é um ideal maximal de V em P .

Demonstração: Mostremos que $\mathcal{O}_P(V)/M_P(V)$ é um corpo, para isto considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{O}_P(V) &\rightarrow k \\ f &\mapsto \varphi(f) := f(P) \end{aligned}$$

A aplicação φ é um homomorfismo de anéis.

Para isto, sejam f, g e h quaisquer em $\mathcal{O}_P(V)$.

$$\varphi(hf + g)(P) = (hf + g)(P) = h(P)f(P) + g(P) = \varphi(h) \cdot \varphi(f) + \varphi(g)$$

Observe agora o núcleo de φ ,

$$\text{Ker}(\varphi) = \{f \in \mathcal{O}_P(V), \varphi(f) = 0\} = \{f \in \mathcal{O}_P(V), f(P) = 0\} = M_P(V).$$

Assim pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo

$$\frac{\mathcal{O}_P(V)}{M_P(V)} \simeq \text{Im}(\varphi).$$

Além disso, $\text{Im}(\varphi) = k$, já que φ é sobrejetiva, pois para todo a temos uma função racional constante, a saber, tal que $a(P) = a$.

Portanto

$$\frac{\mathcal{O}_P(V)}{M_P(V)} \simeq k.$$

Lema 2 Um elemento de $\mathcal{O}_P(V)$ é invertível se, e somente se, seu valor é não nulo.

Demonstração: Suponha que $f(P) \neq 0$, ou seja, $\frac{a(P)}{b(P)} \neq 0$, como $\frac{a(P)}{b(P)} \in k$, então temos o seu inverso, isto é, $a(P)/b(P) \in k$.

$$\frac{a(P)b(P)}{b(P)a(P)} = 1$$

Assim tomando, $g = b/a$ a qual será o inverso de f , portanto f é unitário.

Reciprocamente, suponha que $f = a/b$ é unitário, isto é, existe $g = c/d$, tal que

$$fg = \frac{ac}{bd} = 1$$

Assim, valorando fg em P , temos

$$(fg)(P) = \frac{ac(P)}{bd(P)} = \frac{a(P)c(P)}{b(P)d(P)} = 1(P) = 1$$

e do fato de K ser um corpo,

$$\frac{a(P)}{b(P)} \neq 0 \neq \frac{c(P)}{d(P)}.$$

Lema 3 Em um anel as seguintes condições são equivalentes:

- O conjunto dos elementos de R que não são unitários constituem um ideal.
- R possui um único ideal maximal que contém todo ideal próprio de R .

Demonstração: (1. \Rightarrow 2.) Suponha que o conjunto dos elementos de R que não são invertíveis é um ideal.

Afirmção: I é o único ideal maximal que contém todo ideal próprio de R .

Seja $J \subset R$ ideal, com $J \neq R$. Veja que, se $a \in J$ é qualquer, caso a é invertível temos assim $J = R$, o que contradiz a hipótese, logo a não pode ser invertível, isto é, $a \in I$, o que concluímos $J \subset I$.

(2. \Rightarrow 1.) Sendo $a \in J$ é invertível em R , então existe $a^{-1} \in R$ tal que $aa^{-1} = 1_R$, isto é, $1_R \in J$.

$$J = R = \langle 1_R \rangle.$$

Definição 6 Dizemos que um anel é um **Anel Local** se possuir um único ideal maximal. No caso de um Domínio de Integridade, chamaremos de Domínio Local.

Todas as propriedades de V que depende apenas do “ambiente” de P , (propriedades locais de P) se refletem no anel $\mathcal{O}_P(V)$.

Corolário 1 Se $\mathcal{O}_P(V)$ é um domínio local em que $M_P(V)$ é seu único ideal maximal.

Definição 7 Dizemos que um anel é **Noetheriano** se todo ideal deste anel é finitamente gerado.

Teorema 1 [Fundamental de Hilbert] Se R é um anel noetheriano então $R[X_1, \dots, X_n]$ é um anel noetheriano.

Demonstração: Sabemos que $R[X_1, \dots, X_n] \simeq R[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$, então a demonstração deste teorema será construída sobre indução em X_n , isto é, mostremos que $R[X_1]$ é noetheriano se R o é.

Então inicialmente vamos buscar um conjunto finito de geradores de I .

Se $F = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d \in R[X]$, $a_d \neq 0$, chamaremos a_d de coeficiente líder (ou principal) de F . Seja J um conjunto de coeficientes líderes de todos os polinômios de I . O subconjunto é um ideal de R .

De fato,

- $J \subset R$.
- $\forall a, b \in J$ temos que $a \cdot b \in J$, já que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pertencem ao J , logo existem $f = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$ e $g = b_0 + b_1X + \dots + b_eX^e$, quando fazemos a operação produto entre esses polinômios, temos

$$f \cdot g = c_0 + c_1X + \dots + c_{d+e}X^{d+e}$$

em que

$$\sum_{i+j=k} a_i b_j = c_k$$

observe que $c_{d+e} \neq 0$ pois

$$c_{d+e} = \sum_{i+j=d+e} a_i b_j = a_d b_e + a_{d-1} \underbrace{b_{e+1}}_0 + \underbrace{a_{d+1}}_0 b_{e-1} + \dots$$

ou seja, $a_d b_e = c_{d+e}$ é um coeficiente principal.

- $\forall \alpha \in R$ e $\forall a_d \in J$, temos que $\alpha \cdot a_d \in J$. Como $a_d \in J$ temos que existe

$$F = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d,$$

em que

$$\alpha F = \alpha(a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d) = \alpha a_0 + \alpha a_1X + \dots + \alpha a_dX^d$$

no qual αa_d é o coeficiente líder de αF .

Afirmção: Existem $F_1, F_2, \dots, F_m \in I$, cujo os coeficientes líderes geram o ideal J .

Com efeito, seja N um inteiro maior que o grau de cada F_j

Para cada $l \leq N$, construímos o ideal J_l de R , tal que é constituído por todos os coeficientes líderes de $F \in I$, que possuem grau menor ou igual a l .

$$gr(F) \leq l.$$

Considere $\{F_{lj}\}$ um conjunto finito de polinômios de I , que possuem grau menor que l , que geram J_l . Agora tomando o ideal I' que é gerado tanto pelos F_j como pelos F_{lj} . Mostremos que $I = I'$.

Vamos supor por absurdo que, $I' \subsetneq I$. Tomemos $G \in I$ que é o polinômio de menor grau que não está em I' .

- Se $gr(G) > N$, então podemos encontrar Q_i polinômios em $R[X]$, tais que $\sum Q_i F_i$ e G tem o mesmo coeficiente líder. Mas $gr(G = \sum Q_i F_i) < gr(G)$, e pelo fato de G ser o menor grau que não está em I' temos

$$G = \sum Q_i F_i \in I'$$

e como I' é ideal, temos $G \in I'$.

- Suponha que $gr(G) = l < N$, podemos diminuir o seu grau subtraindo $\sum Q_i F_{ij}$ para Q_i , convenientes. Isto é, sejam $Q_i \in R[X]$, tais que:

$$\sum Q_j F_{lj} = G$$

possuem o mesmo coeficiente líder.

Logo $gr(\sum Q_i F_i = G) < gr(G)$ e pelo mesmo argumento anterior, temos $\sum Q_i F_i - G \in I'$ e isso significa que $G \in I'$. Absurdo.

Portanto, $I = I'$.

Proposição 5 *Seja I um ideal de um anel R e $\pi: R \rightarrow R/I$ o homomorfismo natural. Se J' é finitamente gerado se J é. Conclua que R/I é noetheriano se R .*

Demonstração: Seja J' um ideal qualquer em R/I , como $J = \pi^{-1}(J')$ é finitamente gerado, segue que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$ tal que $J = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$.

Afirmção: $J' = \langle \pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n) \rangle$

De fato,

$$\bullet \langle \pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n) \rangle \subset J'$$

Pois para cada α_i , ($i \in \{1, \dots, n\}$) em J , temos que $\alpha \in \pi^{-1}(J')$, isto significa que $\pi(\alpha_i) \in J'$, para todo i . Como J' é ideal, temos que $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \subset J$.

$$\bullet J' \subset \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle.$$

Seja $\bar{b} \in J'$ qualquer, como π é sobrejetiva, então existe $b \in R$, tal que, $\pi(b) = \bar{b} \in J'$, ou seja, $b \in \pi^{-1}(J') = J$, assim temos que b é uma combinação dos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, podemos escrever, sendo $s_i \in R$.

$$b = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i \in \pi^{-1}(J').$$

Então

$$\bar{b} = \pi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i \right) \in J'.$$

Como π é um homomorfismo,

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^n \pi(\alpha_i) \pi(s_i) \in J' \Rightarrow \bar{b} \in \langle \pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n) \rangle.$$

Portanto, J' é finitamente gerado.

Caso R é um anel noetheriano, pela correspondência biunívoca, temos que também noetheriano.

Teorema 2 $\mathcal{O}_p(V)$ é um domínio local noetheriano.

Demonstração: Mostremos que todo ideal de $\mathcal{O}_p(V)$ é finitamente gerado.

Primeiramente, observe que

$$\Gamma(V) = \frac{K[X_1, \dots, X_n]}{I(V)}$$

é um anel noetheriano.

Sejam os geradores f_1, \dots, f_r do ideal $I \cap \Gamma(V)$ de $\Gamma(V)$ (estes existem, pois $\Gamma(V)$ é noetheriano).

Afirmção: f_1, \dots, f_r gera o ideal I , como ideal de $\mathcal{O}_P(V)$.

Com efeito,

$$\bullet \quad I \subset \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{O}_P(V)}.$$

Seja $f \in I \subset \mathcal{O}_P(V)$, assim existe $b \in \Gamma(V)$, com $b(P) \neq 0$, tal que $bf \in \Gamma(V)$ e veja também que $bf \in I$, já que I é ideal e $f \in I$.

Então, $bf \in I \cap \Gamma(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\Gamma(V)}$.

Assim temos,

$$bf = \sum_{i=1}^r f_i s_i \quad \text{com } s_i \in \Gamma(V)$$

e obtemos,

$$f = \sum_{i=1}^r \frac{s_i}{b} f_i$$

com $s_i/b \in \mathcal{O}_P(V)$, já que $b(P) \neq 0$, portanto, $f \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{O}_P(V)}$.

$$\bullet \quad \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{O}_P(V)} \subset I.$$

Seja $a \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{O}_P(V)}$ qualquer, isto é

$$a = \sum_{i=1}^r p_i f_i \quad \text{com } p_i \in \mathcal{O}_P(V)$$

como $f \in I \cap \Gamma(V) \subset I$, assim temos, $f_i \in I$ e como I é ideal de $\mathcal{O}_P(V)$, $a \in I$

REFERÊNCIAS

FULTON, W. **Algebraic curves: an Introduction to Algebraic Geometry**. 1ª. ed. [S.l.]: W. A. Benjamin, 1969.

SOBRE OS ORGANIZADORES

Jorge González Aguilera: Engenheiro Agrônomo (Instituto Superior de Ciências Agrícolas de Bayamo (ISCA-B) hoje Universidad de Granma (UG)), Especialista em Biotecnologia pela Universidad de Oriente (UO), CUBA (2002), Mestre em Fitotecnia (UFV/2007) e Doutorado em Genética e Melhoramento (UFV/2011). Atualmente, é professor visitante na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) no Campus Chapadão do Sul. Têm experiência na área de melhoramento de plantas e aplicação de campos magnéticos na agricultura, com especialização em Biotecnologia Vegetal, atuando principalmente nos seguintes temas: pre-melhoramento, fitotecnia e cultivo de hortaliças, estudo de fontes de resistência para estres abiótico e biótico, marcadores moleculares, associação de características e adaptação e obtenção de vitroplantas. Tem experiência na multiplicação “on farm” de insumos biológicos (fungos em suporte sólido; Trichoderma, Beauveria e Metharrizum, assim como bactérias em suporte líquido) para o controle de doenças e insetos nas lavouras, principalmente de soja, milho e feijão. E-mail para contato: jorge.aguilera@ufms.br

Alan Mario Zuffo: Engenheiro Agrônomo (Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT/2010), Mestre em Agronomia – Produção Vegetal (Universidade Federal do Piauí – UFPI/2013), Doutor em Agronomia – Produção Vegetal (Universidade Federal de Lavras – UFLA/2016). Atualmente, é professor visitante na Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS no Campus Chapadão do Sul. Tem experiência na área de Agronomia – Agricultura, com ênfase em fisiologia das plantas cultivadas e manejo da fertilidade do solo, atuando principalmente nas culturas de soja, milho, feijão, arroz, milheto, sorgo, plantas de cobertura e integração lavoura pecuária. E-mail para contato: alan_zuffo@hotmail.com

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-475-7

