Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida através da Evolução Tecnológica 4

Jorge González Aguilera
Alan Mario Zuffo
(Organizadores)

Atena Editora
Ano 2019

Jorge González Aguilera

Alan Mario Zuffo

(Organizadores)

Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida através da Evolução Tecnológica 4

Atena Editora

2019

2019 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Karine de Lima
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

C569 Ciências exatas e da terra e a dimensão adquirida através da evolução tecnológica 4 [recurso eletrônico] / Organizadores Jorge González Aguilera, Alan Mario Zuffo. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. – (Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida Através da Evolução Tecnológica; v. 4)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-475-7
DOI 10.22533/at.ed.757191107

1. Ciências exatas e da terra – Pesquisa – Brasil. 2. Tecnologia. I.Aguilera, Jorge González. II. Zuffo, Alan Mario
CDD 509.81

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2019

APRESENTAÇÃO

A obra "*Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida através da Evolução Tecnológica vol. 4*" aborda uma publicação da Atena Editora, apresenta, em seus 22 capítulos, conhecimentos tecnológicos e aplicados as Ciências Exatas e da Terra.

Este volume dedicado à Ciência Exatas e da Terra traz uma variedade de artigos que mostram a evolução tecnológica que vem acontecendo nestas duas ciências, e como isso tem impactado a vários setores produtivos e de pesquisas. São abordados temas relacionados com a produção de conhecimento na área da matemática, química do solo, computação, geoprocessamento de dados, biodigestores, educação ambiental, manejo da água, entre outros temas. Estas aplicações visam contribuir no aumento do conhecimento gerado por instituições públicas e privadas no país.

Aos autores dos diversos capítulos, pela dedicação e esforços sem limites, que viabilizaram esta obra que retrata os recentes avanços científicos e tecnológicos nas Ciências Exatas e da Terra, os agradecimentos dos Organizadores e da Atena Editora.

Por fim, esperamos que este livro possa colaborar e instigar mais estudantes e pesquisadores na constante busca de novas tecnologias para a área da Física, Matemática, e na Agronomia e, assim, contribuir na procura de novas pesquisas e tecnologias que possam solucionar os problemas que enfrentamos no dia a dia.

Jorge González Aguilera

Alan Mario Zuffo

SUMÁRIO

CAPÍTULO 17

UM ESTUDO SOBRE ANÉIS LOCAIS

Brendol Alves Oliveira Gomes
Universidade Estatual Paulista "Júlio de Mesquita Júnior" – UNESP Campus Rio Claro
Rio Claro - São Paulo

Eliris Cristina Rizziolli
Universidade Estatual Paulista "Júlio de Mesquita Júnior" – UNESP Campus Rio Claro
Rio Claro - São Paulo

RESUMO: O projeto consiste em abordar os elementos da Álgebra, em particular Anéis Locais, por meio de definições e resultados. Entre esses destacamos: Variedades, Ideais, Anéis de Coordenadas e Anéis Locais, com isso estamos interessados em demonstrar e explorar quando é um Domínio Local Noetheriano, em que é o conjunto das funções racionais definidas em . Para tanto, primeiramente faremos a definição do -espaço Afim, de Variedades e de Anel de Coordenadas, e tendo essa base podemos definir Anel Local e algumas de suas propriedades e resultados que facilitam a compreensão da demonstração do teorema.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Algébrica, Teorema Base de Hilbert, Anel Noetheriano.

A STUDY ON LOCAL RINGS

ABSTRACT: The project consisting of approach the Algebraic elements, in particular Local Rings, by means of definition and results. Among these we highlight: Varieties, Ideals, Coordinates Charges and Local Rings, with that we are interested in demonstrate and explorer when is a Noetherian Local Domain, in what is the set the Rational Function defined in . Therefore, first, we make the definition of the -space Affine, Varieties and Coordinates Charges; and having this basis we can define Local Ring and some of its properties and results that facilitate the understanding of the proof of the theorem.

KEYWORDS: Algebraic Geometry, Base Theorem of Hilbert, Noetherian Ring.

1 I INTRODUÇÃO

A seguir apresentamos algumas definições e resultados sobre o trabalho. No que se segue consideremos k um corpo e $k[X_1, \dots, X_n]$ o Anel de Polinômios nas variáveis com coeficientes no corpo.

Definição 1 O n-espaço A^n é o produto cartesiano "n-vezes" de k.

Definição 2 Dizemos que $X \subset A^n$ é um conjunto algébrico, se $X = V(S)$, sendo $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$ um subconjunto qualquer. Ou seja,

$$V = \{P \in A^n; f(P) = 0, \forall \in S\}.$$

Proposição 1: Se temos X um subconjunto algébrico de A^n, então o subconjunto de $k[X_1, \dots, X_n]$ definido por

$$I(X) = \{F \in k[X_1, \dots, X_n]; F(P) = 0, \forall P \in X\},$$

é um ideal do anel.

Demonstração: Basta observar que

- $I(X) \subset k[X_1, \dots, X_n]$.
- $0 \in I(X)$ já que $0(P) = 0, \forall P \in X$.
- $\forall F, G \in I(X), (F+G)(P) = F(P) + G(P) = 0 + 0 = 0, \forall P \in X$.
- $\forall F \in I(X)$ e $\forall \alpha \in k[X_1, \dots, X_n]$ $(\alpha F)(P) = \alpha(P)F(P) = 0, \forall \in X$

Definição 3. Dizemos que $X \subset A^n$ é um conjunto algébrico **redutível** se existem X_1 e X_2 conjuntos algébricos de A^n, tais que

$$X = X_1 \cup X_2.$$

Caso contrário temos que X é **irredutível**. Além disso, chamamos de *Variedade Afim* um conjunto algébrico irredutível.

Proposição 2. Um conjunto algébrico V é irredutível se, e somente se, $I((V)$ é um ideal primo.

Demonstração: Suponha que $I((V)$ não seja um ideal primo e mostremos que V é redutível.

Se $I((V)$ não é um ideal primo, então o produto $F_1.F_2 \in I(V)$, com $F_i \notin I(V)$ Veja que podemos fazer a separação de V do seguinte modo:

$$\mathrm{V} = (\mathrm{V} \cap \mathrm{V}(F_1) \cup (\mathrm{V} \cap \mathrm{V}(F_2))$$

com

$$V \cap V(F_1) \subsetneq V.$$

Pela construção, podemos ver que

$$(V \cap V(F_1)\ \cup (V \cap V(F_2)) \subset V.$$

Observe que temos a outra inclusão pois $\forall P\ \in V$, então $F_i(P) = 0, \forall i \neq \{1,2\}$, já para

$i = \{1,2\}$ sabemos que $F_1F_2 = 0$ por hipótese. E ainda cada $V \cap V(F_i)$ é um conjunto algébrico para $i = \{1,2\}$. Portanto V é um conjunto algébrico redutível.

Reciprocamente, supondo que V seja redutível mostremos que $I(V)$ não é primo.

Para isto, veja que $V = V_1\ \cup V_2,\ V_i \subsetneq V$,então por um resultado fácil de verificar, temos que quaisquer I e J ideais no qual $I \subset J$, então $V(I) \supset V(J)$, fazendo a substituição temos (Vi)$I(V_i) \supsetneq I(V)$, tomando $F_1 \in V_1$ e $F_2 \in V_2$ segue que tanto F_1 e F_2 não pertencem à $I(V)$ porém o produto $F_1F_2 \in I(V)$ portanto $I(V)$ não é primo.

Tomemos agora V uma variedade de $\mathbb{A}^n$ e $\Gamma(V)$ seu anel de coordenadas. Pelo fato de $\Gamma(V)$ ser um domínio, isto é, não possui divisores de zero, podemos construir seu corpo de frações. Esse corpo será chamado de **Corpo de Frações Racionais de V** e será denotado por $K(V)$, um elemento de $K(V)$ é uma função racional de V.

Se *f* é uma função racional de V e P pertence Ã V diremos que *f* está definida em P. Se para $a,\ b \in \Gamma(V)$, temos

$$f = \frac{a}{b}\ ;\ b(P) \neq 0$$

Observe que há diversas formas de escrever *f* como quociente de funções polinomiais, (caso a e b tenha um múltiplo comum). Diremos que F está definida em P se é possível encontrar um denominador b não anule em P.

Se Γ é um domínio de fatoração única (DFU), então existe uma única representação de $f = a/b$, em que a e b não possuem divisores em comum e assim *f* estará definida em P se, e somente se, $b(P) \neq 0$.

Exemplo: Determinemos as funções racionais definidas na variedade $V = V(XW - YZ) \subset \mathbb{A}^4$.

O anel coordenadas é do tipo

$$\Gamma(V) = \frac{K[X,Y,Z,W]}{\langle XW - YZ \rangle}$$

Sendo $\overline{X},\ \overline{Y},\ \overline{Z}$ e $\overline{W}$ as classes residuais de $X,\ Y,\ Z$ e W, respectivamente, em $\Gamma(V)$, então

$$f = \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \frac{\overline{Z}}{\overline{W}} \in K(V).$$

Temos que $\frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \frac{\overline{Z}}{\overline{W}} \in K(V)$, pois

$$XW - ZY \in \langle XW - ZY \rangle.$$

Então,

$$XW + \langle XW - ZY \rangle = YZ + \langle XW - ZY \rangle$$

$$\overline{XW} = \overline{YZ}$$

ou seja,

$$\frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \frac{\overline{Z}}{\overline{W}}.$$

Dizemos ainda que, *f* está definida em $P = (x, y, z, w)$, se os denominadores $\overline{Y}$ ou $\overline{W}$ forem não nulos em P, isto é, $y \neq 0$ ou $w \neq 0$.

Definição 4 *Dado $P \in V$, dizemos que $\mathcal{O}_P(V)$ será o conjunto de todas as funções racionais que estão definidas em .*Veja que $\mathcal{O}_P(V)$, constitui um subanel de $K(V)$ contendo $\Gamma(V)$ e satisfaz

$$K \subset \Gamma(V) \subset \mathcal{O}_P(V) \subset K(V).$$

Dizemos que $\mathcal{O}_P(V)$ é o **Anel Local de V em P**. E o conjunto dos pontos *Q* em *V* na qual *f* não está definida, chama-se **Conjunto de Polos de *f*** denotado por $\mathcal{P}_f$.

Proposição 3 *O conjunto de polos de uma função racional sobre V é um subconjunto algébrico de V.*

Demonstração: Suponha que $V \subset \mathbb{A}^n$. Para cada $G \in K[X_1, \ldots, X_n]$, temos $\overline{G}$ como a classe residual de G em $\Gamma(V)$. Seja agora $f \in K(V)$ e o conjunto

$$J_f = \{G \in K[X_1, \ldots, X_n], \overline{G}f \in \Gamma(V)\}.$$

Veja que J_f é um ideal de $K[X_1, \ldots, X_n]$.

De fato,

- $J_f \subset K[X_1, \dots, X_n]$.
- Para quaisquer $G, H \in J_f$ temos que $\overline{G}f$ e $\overline{H}f$ pertencem à $\Gamma(V)$ e como esse é um anel, temos que a soma $\overline{G}f + \overline{H}f$ também pertence à $\Gamma(V)$ e é associativo, $(\overline{G} + \overline{H})f$ e veja que

$$\overline{G} + \overline{H} = (G + I(V)) + (H + I(V)) = (G + H) + I(V) = \overline{G + H}.$$

Portanto,

$$(\overline{G}f + \overline{H})f = \overline{G + H}f$$

então $G + H \in J_f$.

- Para quaisquer $\alpha \in K[X_1, \dots, X_n]$ e $G \in J_f$, temos que, considerando $\overline{\alpha}$ como a classe residual de α em $\Gamma(V)$,

$$\overline{\alpha G}f = \overline{\alpha}\overline{G}f \in \Gamma(V).$$

Veja agora que $I(V) \subset J_f$, pois para qualquer $h \in I(V)$, temos

$$h \in K[X_1, \dots, X_n], h(P) = 0, \forall P \in V.$$

Isto significa que $\overline{h}f \in \Gamma(V)$, já que $(\overline{h}f)(P) = \overline{0}$, para todo $P \in V$.
Mostremos que o conjunto dos polos de f, $\mathcal{P}_f$, é o conjunto $V(J_f)$.

- $\mathcal{P}_f \subset V(J_f)$.

De fato, seja $P_0 \in \mathcal{P}_f$ qualquer, com $b(P) = 0$, para $\overline{b}$, tal que $f = a/b$, $(a \neq 0)$.

Seja algum $G \in J_f$, (com $G \neq 0$). Logo $\overline{G}f \in J_f$, ou seja, $\overline{G}f = c$, para algum $c \in \Gamma(V)$. Como sabemos:

$$\overline{G} = \frac{G + I(V)}{1 + I(V)} \qquad e \qquad f = \frac{a + I(V)}{b + I(V)}.$$

Assim temos:

$$\overline{G} = \frac{G + I(V)}{1 + I(V)} \cdot f = \frac{a + I(V)}{b + I(V)} = c + I(V)$$

então,

$$Ga + I(V) = bc + I(V)\,. \qquad (1)$$

Como temos $b(P_0) = 0$, assim $b \in I(V)$, consequentemente $bc \in I(V)$, isto é, $bc + I(V) = I(V)$. E portanto, pela Equação (1), temos

$$Ga + I(V) = I(V) \to Ga \in I(V)$$

ou seja, $a(P) = 0$ ou $G(P) = 0$, para todo $P \in V$, como a é não nulo, então $G(P)$ =0, $\forall P \in V$ e tomando $P_0 \in \mathcal{P}_f \subset V$, segue que

$$G(P_0) = 0$$

Portanto, $P_0 \in V(J_f)$.

- $V(J_f) \subset \mathcal{P}_f$

Seja $P \in V(J_f)$ qualquer, então $G(P) = 0$, para todo $G \in J_f$, observe que $b \in J_f$, já que

$$\overline{b}f = b \cdot \frac{a}{b} = a \in \Gamma(V)$$

Logo $b(P) = 0$.

Proposição 4 *Para qualquer anel de coordenadas de V e conjunto de funções racionais sobre temos a relação*

$$\Gamma(V) = \bigcap_{P\in V} \mathcal{O}_P(V)\,.$$

Demonstração: Seja $f \in \bigcap_{P\in V} \mathcal{O}_P(V)$, então a função racional *f* está bem definida em todo $P \in V$. Observe que $V(J_f) \neq \varnothing$, já que na Proposição 4.1 temos que este é conjunto de todos os pontos em que *f* não está definida e assim pelo *Teorema Fraco de Hilbert* temos que J_f não é um ideal próprio, ou seja $1 \in J_f$ então podemos escrever

$$\overline{1}f = f \in \Gamma(V).$$

Para a outra inclusão temos um resultado fácil de mostrar Sendo S um conjunto de polinômios de $k[X_1, ..., X_n]$ e X um conjunto algébrico de A^n, temos:

$$S \subset I(V(S)) \text{ e } X \subset V(I(X)).$$

Segue que $\Gamma(V) \subset \mathcal{O}_P(V)$

Definição 5 *Dado* $f = a/b \in \mathcal{O}_P(V)$, *com* a *e* $b \in \Gamma(V)$, *definimos o* ***Valor de f em P*** *denotado por* $f(P) = a(p)/b(P)$, *independente da escolha de* a *e* b.

Lema 1 *O subconjunto* $M_P(V) = \{f \in \mathcal{O}_P(V), f(P) = 0\}$ *de* $\mathcal{O}_P(V)$ *é um ideal maximal de V em P.*

Demonstração: Mostremos que $\mathcal{O}_P(V)/M_P(V)$ é um corpo, para isto considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{llll} \varphi: & \mathcal{O}_P(V) & \longrightarrow & k \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) := f(P) \end{array}$$

A aplicação φ é um homomorfismo de anéis.

Para isto, sejam f, g e h quaisquer em $\mathcal{O}_P(V)$.

$$\varphi(hf + g)(P) = (hf + g)(P) = h(P)f(P) + g(P) = \varphi(h) \cdot \varphi(f) + \varphi(g)$$

Observe agora o núcleo de φ,

$$Ker(\varphi) = \{f \in \mathcal{O}_P(V), \varphi(f) = 0\} = \{f \in \mathcal{O}_P(V), f(P) = 0\} = M_P(V)\,.$$

Assim pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo

$$\frac{\mathcal{O}_P(V)}{M_P(V)} \simeq Im(\varphi).$$

Além disso, $Im(\varphi) = k$, já que φ é sobrejetiva, pois para todo temos uma função racional constante, a saber, tal que $a(P) = a$.

Portanto

$$\frac{\mathcal{O}_P(V)}{M_P(V)} \simeq k\,.$$

Lema 2 *Um elemento de $\mathcal{O}_P(V)$ é invertível se, e somente se, seu valor é não nulo.*

Demonstração: Suponha que $f(P) \neq 0$, ou seja, $\frac{a(P)}{b(P)} \neq 0$, como $\frac{a(P)}{b(P)} \in k$, então temos o seu inverso, isto é, $a(P)/b(P) \in k$.

$$\frac{a(P)}{b(P)} \frac{b(P)}{a(P)} = 1$$

Assim tomando, $g = b/a$ a qual será o inverso de *f*, portanto *f* é unitário.

Reciprocamente, suponha que $f = a/b$ é unitário, isto é, existe $g = c/d$, tal que

$$fg = \frac{ac}{bd} = 1$$

Assim, valorando fg em P, temos

$$(fg)(P) = \frac{ac(P)}{bd(P)} = \frac{a(P)}{b(P)} \frac{c(P)}{d(P)} = 1(P) = 1$$

e do fato de K se um corpo,

$$\frac{a(P)}{b(P)} \neq 0 \neq \frac{c(P)}{d(P)}.$$

Lema 3 *Em um anel as seguintes condições são equivalentes:*

- O conjunto dos elementos de que não são unitários constituem um ideal.
- *R* possui um único ideal maximal que contém todo ideal próprio de *R*.

Demonstração: $(1. \Rightarrow 2.)$ Suponha que o conjunto dos elementos de *R* que não são invertíeis um ideal.

Afirmação: *I* é o único ideal maximal que contém todo ideal próprio de *R*.

Seja $J \subset R$ ideal, com $J \neq R$. Veja que, se $a \in J$ é qualquer, caso a é invertível temos assim $J = R$, o que contradiz a hipótese, logo a não pode ser invertível, isto é, $a \in I$, o que concluímos $J \subset I$.

$(2. \Rightarrow 1.)$ Sendo $a \in J$ é invertível em *R*, então existe $a^{-1} \in R$ tal que $aa^{-1} = 1_R$, isto é, $1_R \in J$.

$$J = R = \langle 1_R \rangle.$$

Definição 6 *Dizemos que um anel é um* ***Anel Local*** *se possuir um único ideal maximal. No caso de um Domínio de Integridade, chamaremos de Domínio Local.*

Todas as propriedades de V que depende apenas do "ambiente" de P, (propriedades locais de P) se refletem no anel $\mathcal{O}_P(V)$.

Corolário 1 *Se* $\mathcal{O}_P(V)$ *é um domínio local em que* $M_P(V)$ *é seu único ideal maximal.*

Definição 7 *Dizemos que um anel é* ***Noetheriano*** *se todo ideal deste anel é finitamente gerado.*

Teorema 1 ***[Fundamental de Hilbert]*** *Se R é um anel noetheriano então* $R[X_1, \dots, X_n]$ *é um anel noetheriano.*

Demonstração: Sabemos que $R[X_1, \dots, X_n] \simeq R[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$, então a demostração deste teorema será construída sobre indução em X_n, isto é, mostremos que $R[X_1]$ é noetheriano se R o é.

Então inicialmente vamos buscar um conjunto finito de geradores de I.

Se $F = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d \in R[X]$, $a_d \neq 0$, chamaremos a_d de coeficiente líder (ou principal) de F. Seja J um conjunto de coeficientes lideres de todos os polinômios de I. O subconjunto é um ideal de R.

De fato,

- $J \subset R$.
- $\forall a, b \in J$ temos que $a \cdot b \in J$, já que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pertencem ao J, logo existem $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$ e $g = b_0 + b_1X + \cdots b_eX^e$, quando fazemos a operação produto entre esses polinômios, temos

$$f \cdot g = c_0 + c_1X + \cdots + c_{d+e}X^{d+e}$$

em que

$$\sum_{i+j=k} a_ib_j = c_k$$

observe que $c_{d+e} \neq 0$ pois

$$c_{d+e} = \sum_{i+j=d+e} a_ib_j = a_db_e + a_{d-1}\underbrace{b_{e+1}}_{0} + \underbrace{a_{d+1}}_{0}b_{e-1} + \cdots$$

ou seja, $a_db_e = c_{d+e}$ é um coeficiente principal.

- $\forall \alpha \in R$ e $\forall a_d \in J$, temos que $\alpha \cdot a_d \in J$. Como $a_d \in J$ temos que existe

$$F = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d,$$

em que

$$\alpha F = \alpha(a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d) = \alpha a_0 + \alpha a_1 X + \cdots + \alpha a_d X^d$$

no qual αa_d é o coeficiente líder de αF.

Afirmação: Existem $F_1, F_2, \ldots, F_m \in I$, cujo os coeficientes lideres geram o ideal J.

Com efeito, seja *N* um inteiro maior que o grau de cada F_i

Para cada $l \leqslant N$, construímos o ideal J_l de R, tal que é constituído por todos os coeficientes lideres de $F \in I$, que possuem grau menor ou igual a l.

$$gr(F) \leqslant l\,.$$

Considere $\{F_{lj}\}$ um conjunto finito de polinômios de I, que possuem grau menor que l, que geram J_l. Agora tomando o ideal I' que é gerado tanto pelos F_i como pelos F_{lj}. Mostremos que $I = I'$.

Vamos supor por absurdo que, $I' \subsetneq I$. Tomemos $G \in I$ que é o polinômio de menor grau que não está em I'.

- Se $gr(G) > N$, então podemos encontrar Q_i polinômios em $R[X]$, tais que $\sum Q_i F_i$ e G tem o mesmo coeficiente líder. Mas $gr(G = \sum Q_i F_i) < gr(G)$, e pelo fato de *G* ser o menor grau que não está em I' temos

$$G = \sum Q_i F_i \in I'$$

e como I' é ideal, temos $G \in I'$.

- Suponha que $gr(G) = l < N$, podemos diminuir o seu grau subtraindo $\sum Q_i F_{lj}$ para Q_i, convenientes. Isto Ã©, sejam $Q_i \in R[X]$, tais que:

$$\sum Q_j F_{lj} = G$$

possuem o mesmo coeficiente líder.

Logo $gr(\sum Q_i F_i = G) < gr(G)$ e pelo mesmo argumento anterior, temos $\sum Q_i F_i - G \in I'$ e isso significa que $G \in I'$. Absurdo.

Portanto, $I = I'$.

Proposição 5 *Seja I um ideal de um anel R e $\pi: R \longrightarrow R/I$ o homomorfismo natural. Se J' é finitamente gerado se J é. Conclua que R/I é noetheriano se R.*

Demonstração: Seja J' um ideal qualquer em R/I, como $J = \pi^{-1}(J')$ é finitamente gerado, segue que existem $\alpha_1, \dots . \alpha_n \in R$ tal que $J = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$.

Afirmação: $J' = \langle \pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n) \rangle$

De fato,

- $\langle \pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n) \rangle \subset J'$.

Pois para cada α_i, $(i \in \{1, \dots, n\})$ em J, temos que $\alpha \in \pi^{-1}(J')$, isto significa que $\pi(\alpha_i) \in J'$, para todo i. Como J' é ideal, temos que $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \subset J$.

- $J' \subset \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$.

Seja $\bar{b} \in J'$ qualquer, como π é sobrejetiva, então existe $b \in R$, tal que, $\pi(b) = \bar{b} \in J'$, ou seja, $b \in \pi^{-1}(J') = J$, assim temos que b é uma combinação dos $\alpha_1, \dots . \alpha_n$, podemos escrever, sendo $s_i \in R$.

$$b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \in \pi^{-1}(J').$$

Então

$$\bar{b} = \pi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i\right) \in J'.$$

Como π é um homomorfismo,

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^{n} \pi(\alpha_i)\pi(s_i) \in J' \Rightarrow \bar{b} = \langle \pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n) \rangle .$$

Portanto, J' é finitamente gerado.

Caso R é um anel noetheriano, pela correspondência biunívoca, temos que também noetheriano.

Teorema 2 *$\mathcal{O}_P(V)$ é um domínio local noetheriano.*

Demonstração: Mostremos que todo ideal de $\mathcal{O}_P(V)$ é finitamente gerado.

Primeiramente, observe que

$$\Gamma(V) = \frac{K[X_1, \dots, X_n]}{I(V)}$$

é um anel noetheriano.

Sejam os geradores $f_1, \dots, f_r$ do ideal $I \cap \Gamma(V)$ de $\Gamma(V)$ (estes existem, pois $\Gamma(V)$ é noetheriano).

Afirmação: $f_1, \dots, f_r$ gera o ideal *I*, como ideal de $\mathcal{O}_P(V)$.

Com efeito,

- $I \subset \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{O}_P(V)}$.

Seja $f \in I \subset \mathcal{O}_P(V)$, assim existe $b \in \Gamma(V)$, com $b(P) \neq 0$, tal que $bf \in \Gamma(V)$ e veja também que $bf \in I$, já que *I* é ideal e $f \in I$.

Então, $bf \in I \cap \Gamma(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\Gamma(V)}$.

Assim temos,

$$bf = \sum_{i=1}^{r} f_i s_i \quad com \quad s_i \in \Gamma(V)$$

e obtemos,

$$f = \sum_{i=1}^{r} \frac{s_i}{b} f_i$$

com $s_i/b \in \mathcal{O}_P(V)$, já que $b(P) \neq 0$, portanto, $f \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{O}_P(V)}$.

- $\langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{O}_P(V)} \subset I$.

Seja $a \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathcal{O}_P(V)}$ qualquer, isto é

$$a = \sum_{i=1}^{r} p_i f_i \quad com \quad p_i \in \mathcal{O}_P(V)$$

como $f \in I \cap \Gamma(V) \subset I$, assim temos, $f_i \in I$ e como *I* é ideal de $\mathcal{O}_P(V)$, $a \in I$

REFERÊNCIAS

FULTON, W. **Algebraic curves: an Introduction to Algebraic Geometry**. 1ª. ed. [S.l.]: W. A. Benjamin, 1969.

SOBRE OS ORGANIZADORES

Jorge González Aguilera: Engenheiro Agrônomo (Instituto Superior de Ciências Agrícolas de Bayamo (ISCA-B) hoje Universidad de Granma (UG)), Especialista em Biotecnologia pela Universidad de Oriente (UO), CUBA (2002), Mestre em Fitotecnia (UFV/2007) e Doutorado em Genética e Melhoramento (UFV/2011). Atualmente, é professor visitante na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) no Campus Chapadão do Sul. Têm experiência na área de melhoramento de plantas e aplicação de campos magnéticos na agricultura, com especialização em Biotecnologia Vegetal, atuando principalmente nos seguintes temas: pre-melhoramento, fitotecnia e cultivo de hortaliças, estudo de fontes de resistência para estres abiótico e biótico, marcadores moleculares, associação de características e adaptação e obtenção de vitroplantas. Tem experiência na multiplicação “on farm” de insumos biológicos (fungos em suporte sólido; Trichoderma, Beauveria e Metharrizum, assim como bactérias em suporte líquido) para o controle de doenças e insetos nas lavouras, principalmente de soja, milho e feijão. E-mail para contato: jorge.aguilera@ufms.br

Alan Mario Zuffo: Engenheiro Agrônomo (Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT/2010), Mestre em Agronomia – Produção Vegetal (Universidade Federal do Piauí – UFPI/2013), Doutor em Agronomia – Produção Vegetal (Universidade Federal de Lavras – UFLA/2016). Atualmente, é professor visitante na Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS no Campus Chapadão do Sul. Tem experiência na área de Agronomia – Agricultura, com ênfase em fisiologia das plantas cultivadas e manejo da fertilidade do solo, atuando principalmente nas culturas de soja, milho, feijão, arroz, milheto, sorgo, plantas de cobertura e integração lavoura pecuária. E-mail para contato: alan_zuffo@hotmail.com

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-475-7
9 788572 474757