

**Jorge González Aguilera  
Alan Mario Zuffo  
(Organizadores)**

# **Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida através da Evolução Tecnológica 4**



**Jorge González Aguilera**

**Alan Mario Zuffo**

(Organizadores)

# Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida através da Evolução Tecnológica 4

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2019 Os Autores  
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora  
Editora Executiva: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira  
Diagramação: Karine de Lima  
Edição de Arte: Lorena Prestes  
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

#### **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

### **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.ª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof.ª Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof.ª Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
C569	Ciências exatas e da terra e a dimensão adquirida através da evolução tecnológica 4 [recurso eletrônico] / Organizadores Jorge González Aguilera, Alan Mario Zuffo. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. – (Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida Através da Evolução Tecnológica; v. 4)  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-475-7 DOI 10.22533/at.ed.757191107  1. Ciências exatas e da terra – Pesquisa – Brasil. 2. Tecnologia. I. Aguilera, Jorge González. II. Zuffo, Alan Mario  CDD 509.81
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

A obra “*Ciências Exatas e da Terra e a Dimensão Adquirida através da Evolução Tecnológica vol. 4*” aborda uma publicação da Atena Editora, apresenta, em seus 22 capítulos, conhecimentos tecnológicos e aplicados as Ciências Exatas e da Terra.

Este volume dedicado à Ciência Exatas e da Terra traz uma variedade de artigos que mostram a evolução tecnológica que vem acontecendo nestas duas ciências, e como isso tem impactado a vários setores produtivos e de pesquisas. São abordados temas relacionados com a produção de conhecimento na área da matemática, química do solo, computação, geoprocessamento de dados, biodigestores, educação ambiental, manejo da água, entre outros temas. Estas aplicações visam contribuir no aumento do conhecimento gerado por instituições públicas e privadas no país.

Aos autores dos diversos capítulos, pela dedicação e esforços sem limites, que viabilizaram esta obra que retrata os recentes avanços científicos e tecnológicos nas Ciências Exatas e da Terra, os agradecimentos dos Organizadores e da Atena Editora.

Por fim, esperamos que este livro possa colaborar e instigar mais estudantes e pesquisadores na constante busca de novas tecnologias para a área da Física, Matemática, e na Agronomia e, assim, contribuir na procura de novas pesquisas e tecnologias que possam solucionar os problemas que enfrentamos no dia a dia.

Jorge González Aguilera  
Alan Mario Zuffo

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
ANÁLISIS DE LA SOBREVIVENCIA DE LAS CÉLULAS DE CARCINOMA DE CÁNCER DE BOCA DESPUÉS DE LA IRRADIACIÓN CON EQUIPO DE COBALTO	
Paula de Sanctis Brunno Felipe Ramos Caetano Luis Maurício Montoya Flórez Valéria Barbosa de Souza Luís Fernando Barbisan Marco Antônio Rodrigues Fernandes Ramon Kaneno Rogério Antônio de Oliveira Willian Fernando Zambuzzi Noeme Sousa Rocha	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7571911071</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>15</b>
AVALIAÇÃO COMPUTACIONAL DE INTERAÇÕES ENTRE AS PROTEÍNAS M E M2-1 DO VÍRUS SINCICIAL RESPIRATÓRIO HUMANO (HRSV) E RIBAVIRINA	
Ernesto Tavares Neto Leandro Cristante de Oliveira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7571911072</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>23</b>
ENCAPSULAMENTO DE NANOPARTÍCULAS FERROMAGNÉTICAS EM MATRIZ EPOXÍDICA PARA O TRATAMENTO DE HEPATOCARCINOMA	
Bruno de Vasconcellos Averaldo Hangai Alexandre Zirpoli Simões	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7571911073</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>38</b>
ESTUDO QUÍMICO DO EXTRATO CLOROFÓRMICO DAS FOLHAS DA <i>Annona muricata</i> L.	
Maria Luiza da Silva Pereira Karoline Pereira Ribeiro	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7571911074</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>48</b>
MÉTODO SIMPLIFICADO PARA CALCULAR A ROTAÇÃO DO SOL	
Matheus Leal Castanheira Dietmar Willian Foryta	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7571911075</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>55</b>
MONITORAMENTO AMBIENTAL DOS FOCOS DE QUEIMADAS NO ESTADO DE ALAGOAS PARA OS ANOS DE 2015 E 2016	
Esdras de Lima Andrade Whendel Cezar Silva de Couto Daniel Nivaldo da Conceição Alex Nazário Silva Oliveira Elizangela Lima de Oliveira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7571911076</b>	

<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>64</b>
MONITORAMENTO DE IMPACTOS AMBIENTAIS PÓS-IMPLANTAÇÃO DE ESTAÇÕES DE TRATAMENTO DE ESGOTOS SANITÁRIOS E AÇÕES CORRELATAS DO ÓRGÃO AMBIENTAL FISCALIZADOR	
Poliana Arruda Fajardo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7571911077</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>74</b>
OSCILADOR HARMÔNICO: MODELO PARA A DESCRIÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS EM EQUILÍBRIO ESTÁVEL SOFRENDO PEQUENAS OSCILAÇÕES	
Pedro Henrique Ferreira de Oliveira João Philipe Macedo Braga	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7571911078</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>86</b>
PALAVRAS CRUZADAS: UMA FERRAMENTA LÚDICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA E DAS CIÊNCIAS DA NATUREZA	
Osmar Luís Nascimento Gotardi Andréa Martini Ribeiro Fernanda Marchiori Grave Letícia Cristiane Malakowski Heck Mario Victor Vilas Boas	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7571911079</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>102</b>
QUANTIFICAÇÃO DE P-FENILENODIAMINA (PPD) EM FORMULAÇÃO DE CORANTE PERMANENTE DE CABELO	
Maria Letícia Mendes Soares Thamiris Costa dos Santos Carolina Venturini Uliana Mariele Mucio Pedroso Hideko Yamanaka	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110710</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>111</b>
RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO DIRETO DO POLIESTIRENO EXPANDIDO (EPS)	
Mariana Basolli Borsatto Beatriz Garcia Silva Paulo César Lodi Rogério Custódio Azevedo Souza Bruna Rafaela Malaghini Caio Henrique Buranello dos Santos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110711</b>	

<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>121</b>
SAÚDE E SEGURANÇA DO TRABALHO PARA O DESENVOLVIMENTO SEGURO DE BIOPROCESSOS	
<a href="#">Milson dos Santos Barbosa</a> <a href="#">Lays Carvalho De Almeida</a> <a href="#">Isabelle Maria Duarte Gonzaga</a> <a href="#">Aline Resende Dória</a> <a href="#">Luma Mirely Souza Brandão</a> <a href="#">Isabela Nascimento Souza</a> <a href="#">Débora da Silva Vilar</a> <a href="#">Juliana Lisboa Santana</a> <a href="#">Priscilla Sayonara de Sousa Brandão</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110712</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>129</b>
SÍNTESE DOS NÍVEIS INTERPRETANTES DAS ESTAÇÕES DO ANO APRESENTADOS POR FUTUROS PROFESSORES DE CIÊNCIAS	
<a href="#">Daniel Trevisan Sanzovo</a> <a href="#">Carlos Eduardo Laburú</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110713</b>	
<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>140</b>
SISTEMA DE CONTROLE EMPREGANDO TECNOLOGIA RFID	
<a href="#">Felipe de Carvalho Forti</a> <a href="#">Alexandre César Rodrigues da Silva</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110714</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>150</b>
TÉCNICAS DE MEDIÇÃO BASEADAS NA FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA PARA DETECÇÃO DE DANO BASEADA NA IMPEDÂNCIA ELETROMECAÂNICA	
<a href="#">Guilherme Silva Bergamim</a> <a href="#">Caio Henrique Rodrigues</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110715</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>164</b>
TÉCNICAS DE SENSORIAMENTO REMOTO APLICADAS À MINERAÇÃO NA REGIÃO SEMIÁRIDA DO SERIDÓ POTIGUAR	
<a href="#">Paulo Sérgio de Rezende Nascimento</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110716</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>180</b>
UM ESTUDO SOBRE ANÉIS LOCAIS	
<a href="#">Brendol Alves Oliveira Gomes</a> <a href="#">Eliris Cristina Rizzioli</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110717</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>192</b>
UMA VISÃO GERAL DE FRAMEWORKS PHP POPULARES PARA PROGRAMAÇÃO WEB	
<a href="#">Lilian N A Lazzarin</a> <a href="#">Leandro do Nascimento dos Anjos</a> <a href="#">João Florentino da Silva Junior</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110718</b>	



<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>202</b>
UM PANORAMA DA QUALIDADE DA INTERNET BANDA LARGA NA REGIÃO DO MATO GRANDE	
Igor Augusto De Carvalho Alves	
Hellen Adélia Oliveira Da Cruz	
Maria De Lourdes Assunção Soares Dantas Fonseca	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110719</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>216</b>
USO DE SUPPORT VECTOR MACHINE EM AMBIENTE SUBTERRÂNEO: APLICAÇÃO EM POÇO DE MONITORAMENTO PARA REGRESSÃO DE DADOS DE NÍVEL DE ÁGUA	
Thiago Boeno Patricio Luiz	
Guilherme de Freitas Gaiardo	
José Luiz Silvério da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110720</b>	
<b>CAPÍTULO 21</b> .....	<b>229</b>
UTILIZAÇÃO DA DIFRAÇÃO DE RAIOS X NA CARACTERIZAÇÃO DO HIDRÓXIDO DUPLO LAMELAR (HDL) MG/AL E SEU EFEITO MEMÓRIA	
Victor De Aguiar Pedott	
Elton Luis Hillesheim	
Iemedelais Bordin	
Rogério Marcos Dallago	
Marcelo Luís Mignoni	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110721</b>	
<b>CAPÍTULO 22</b> .....	<b>237</b>
UTILIZAÇÃO DE SIMULAÇÕES NUMÉRICAS PARA ESTUDO DE ONDAS OCEÂNICAS	
Matheus José de Deus	
Mateus das Neves Gomes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75719110722</b>	
<b>SOBRE OS ORGANIZADORES</b> .....	<b>242</b>

## OSCILADOR HARMÔNICO: MODELO PARA A DESCRIÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS EM EQUILÍBRIO ESTÁVEL SOFRENDO PEQUENAS OSCILAÇÕES

**Pedro Henrique Ferreira de Oliveira**

Universidade Federal do Ceará  
Fortaleza – Ceará

**João Philipe Macedo Braga**

Universidade da Integração Internacional da  
Lusofonia Afro-Brasileira  
Acarape – Ceará

**RESUMO:** Quais as relações entre uma molécula, um pêndulo, uma conta em um fio e um líquido dentro de um tubo? A priori estes quatro sistemas parecem ser totalmente desvinculados um do outro, no entanto carregam no âmago de seu movimento algo em comum, há um modelo descritivo que abrange todos estes quatro, sob determinadas condições. A Matemática que nos possibilitou estudar e correlacionar estes problemas variados foi a Série de Taylor, instrumento matemático que possibilita aproximar a função energia potencial como um polinômio em torno do centro do movimento para pequenas oscilações. O objetivo deste capítulo, é discutir o poder de descrição de diversos sistemas físicos distintos do oscilador harmônico simples. A conclusão obtida é de que qualquer sistema físico em equilíbrio estável sofrendo pequenas oscilações é um oscilador harmônico, o que torna esse modelo fundamental para a compreensão de vários fenômenos na natureza. Desse modo, o presente trabalho

busca contribuir para um ensino de física mais contextualizado consolidando assim um arranjo no âmbito da pesquisa em Ensino de Física, tendo ainda o potencial para ser empregado como material complementar em cursos de Física e/ou Ciências correlatas em nível de graduação e pós-graduação.

**PALAVRAS-CHAVE:** Oscilador Harmônico. Teoria das pequenas oscilações. Ensino de Física.

### HARMONIC OSCILLATOR: MODEL FOR THE DESCRIPTION OF PHYSICAL SYSTEMS IN STABLE EQUILIBRIUM SUFFERING SMALL OSCILLATIONS

**ABSTRACT:** What are the relationships between a molecule, a pendulum, a bead in a wire and a liquid inside a tube? A priori these four systems seem to be totally unrelated to each other, yet carry at the heart of their movement something in common, there is a descriptive model that covers all these four, under certain conditions. The Mathematics that enabled us to study and correlate these varied problems was the Taylor Series, a mathematical tool that makes it possible to approximate the potential energy function as a polynomial around the center of the motion for small oscillations. The purpose of this chapter is to discuss the power of description of several different physical systems of the simple

harmonic oscillator. The conclusion obtained is that any physical system in stable equilibrium undergoing small oscillations is a harmonic oscillator, which makes this model fundamental to the understanding of various phenomena in nature. Therefore, the present work seeks to contribute to a more contextualized physics teaching, thus consolidating an arrangement within the scope of research in Physics Teaching, besides have the potential to be used as complementary material in Physics and/or related Sciences courses at undergraduate and postgraduate level.

**KEYWORDS:** Harmonic Oscillator. Theory of small oscillations. Teaching Physics.

## 1 | INTRODUÇÃO

Dentre todos os tipos de movimento presentes na natureza, os oscilatórios ganham certo destaque por surgirem em um número muito grande de situações físicas aparentemente distintas. Exemplos de oscilações vão desde pêndulos e candelabros até instrumentos musicais como a guitarra elétrica (NUSSENZVEIG, 2014). Seguindo o curso da história um dos primeiros a estudar analiticamente o problema do oscilador e, com isso, resolver sua equação de movimento foi o físico e matemático Euler (BASSALO; CATTANI, 2009).

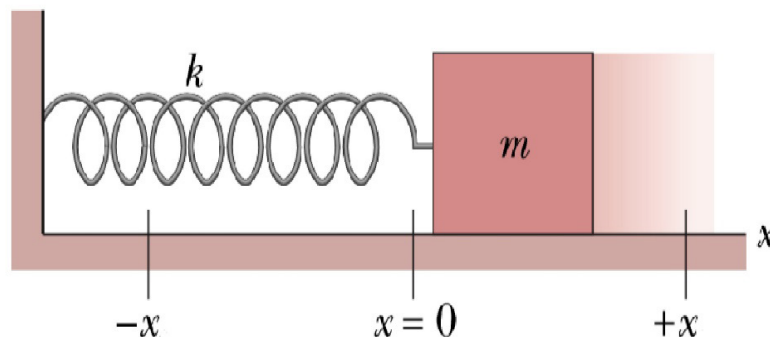
O Movimento Harmônico Simples em uma dimensão é um dos mais simples e icônicos problemas da Física (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2013) trabalhado, inclusive no Ensino Médio (MÁXIMO; ALVARENGA; GUIMARÃES, 2016; GASPAR, 2016), onde o sistema massa-mola representa um verdadeiro desafio em provas de Física.

Mas afinal, qual a relevância de se estudar o movimento de uma massa cujo movimento é restrito à uma mola se aparentemente quase ninguém se depara com um sistema como esse no seu dia-a-dia? Certamente esse questionamento já passou ao menos uma vez na cabeça de todos quando são introduzidos a este problema sem uma devida contextualização de sua relevância. O Oscilador Harmônico é, possivelmente, o problema mais importante do movimento unidimensional (WATARI, 2004).

Nessa perspectiva o presente trabalho tem como objetivo realizar uma análise crítica e ao mesmo tempo didático-pedagógica de quatro sistemas onde não há necessariamente massas fixas à molas de determinada constante elástica, sendo então de grande importância para a compreensão da teoria de pequenas oscilações, consolidando assim um arranjo no âmbito da pesquisa em Ensino de Física nessa temática, tendo potencial para ser empregado como material auxiliar em cursos em nível de graduação e pós-graduação. Na próxima seção, faremos uma revisão da teoria básica do oscilador harmônico clássico unidimensional. Na terceira seção desse capítulo, estudaremos quatro sistemas físicos distintos sofrendo pequenas oscilações. Por fim, na seção 4, traremos nossas conclusões.

## 2 | OSCILADOR HARMÔNICO: UMA REVISÃO CLÁSSICA

O primeiro contato que se tem com osciladores harmônicos nas escolas ou nas universidades é inicialmente rudimentar, no qual estuda-se um problema simples unidimensional, denominado sistema massa-mola (Fig. 1).



**Figura 1.** Sistema massa-mola usualmente trabalhado no ensino médio, no qual um bloco de massa tem seu movimento restrito no intervalo por uma mola de constante elástica.

Fonte: (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2013).

Neste caso, para uma deformação (alongação ou compressão) por um fator a partir da posição de equilíbrio, há o surgimento de uma força restauradora que depende (neste caso) unicamente da posição [3], dada pela Lei de Hooke,

$$F(x) = -kx, \quad (01)$$

onde  $k$  é uma constante que depende das propriedades da mola envolvida. Com o surgimento dessa força restauradora unicamente dependente da posição, é possível associar a ela uma energia potencial elástica uma vez que, para campos conservativos,

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}, \quad (02)$$

impondo que a energia potencial seja dada por

$$V(x) = -\int_{x_0}^x F(x) dx, \quad (03)$$

desse modo a energia potencial elástica, tomando a posição (a posição é totalmente arbitrária, podendo ser tomada, por exemplo, no ponto que zera a função) como sendo a posição de equilíbrio na origem do sistema de coordenadas, temos que

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (04)$$

Note que a expressão acima impõe uma energia potencial parabólica (Fig. 2) (WATARI, 2004), onde uma partícula com determinado limiar de energia só poderá se mover em uma determinada amplitude (neste caso constante), em um movimento oscilatório (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2013).

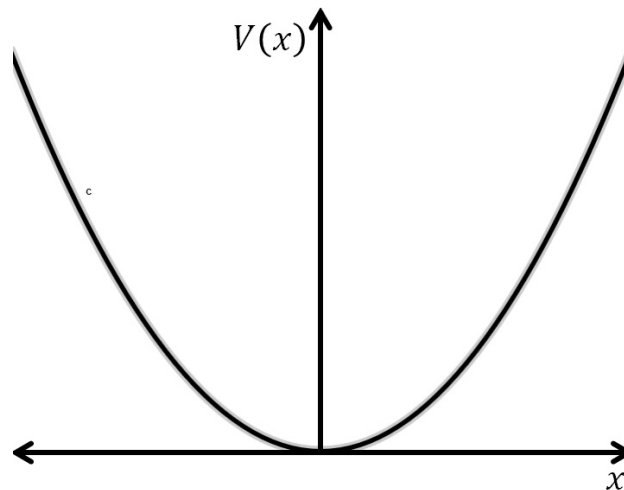


Figura 2. Potencial elástico  $V(x) = kx^2/2$ .

Fonte: Elaborado pelos autores desse trabalho.

Para nos convenceremos um pouco mais sobre o movimento é possível escrever uma expressão que contenha todas as informações sobre a partícula (NUSSENZVEIG, 2014). Mecanicamente é o Princípio Fundamental da Dinâmica que nos permite obter isto, uma vez que

$$F_R = m \frac{d^2x}{dt^2} \equiv m\ddot{x}, \quad (05)$$

onde  $F_R$  é a soma das forças resultantes que atuam sobre o sistema, para este caso é apenas a força restauradora da mola que faz o sistema se mover e, portanto

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (06)$$

onde  $\omega := \sqrt{k/m}$ , é a frequência angular do movimento, a partir dela podemos calcular a frequência  $f$  como a razão  $\omega/2\pi$ . A expressão acima é uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem Homogênea Linear com Coeficientes Constantes, que dadas duas condições iniciais impõe uma solução única e, com isto, a determinação total da partícula como uma função do tempo (passado e futuro)

(SYMON, 1982). A EDO expressa na equação (06) é facilmente resolvida, como uma combinação linear de senos e cossenos (BASSALO; CATTANI, 2009), de modo que

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \equiv A \sin(\omega t + \varphi), \quad (07)$$

onde  $A$  e  $B$  são parâmetros determinados pelas condições de contorno e pelos valores iniciais, isto é  $x(t_0) = x_0$  e  $\dot{x}(t_0) = v_0$ .

Agora a grande dúvida reside sobre o porquê de um sistema, relativamente simples, ser imbuído como modelo central para todo um formalismo. Note então que, caso um sistema possa ser descrito unicamente como função da posição, é possível estabelecer para o mesmo, uma função potencial (KITELL; KNIGHT; RUDERMAN, 1973), de modo que  $V = V(x)$ , contudo isto por si só não abre oportunidades para uma generalização de muitos sistemas à uma mesma abordagem.

Analisemos, portanto, uma função potencial analítica e arbitrária da posição, através de uma Série de Taylor, a qual é dada matematicamente para uma função  $f(x)$  qualquer, como sendo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{(n)}f(x)}{n!} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^n, \quad (08)$$

Onde  $D^{(n)}$  representa a  $n$ -ésima derivada de  $f(x)$  em relação à  $x$ . Assim sendo, o potencial é escrito como

$$V(x) = V(x_0) + \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2V(x)}{dx^2} \Big|_{x=x-x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (09)$$

neste caso tomemos agora algumas considerações. Seja o sistema físico tomado em equilíbrio estável sofrendo pequenas oscilações, desse modo surgem algumas consequências desta abordagem

i) A energia potencial em um ponto de referência pode ser tomada como sendo igual à zero sem qualquer perda de generalidade, isto é  $V(x_0) = 0$ , pois para a dinâmica o que influencia é apenas a diferença de potencial.

ii) Como o sistema está em equilíbrio, então em  $x = x_0$  a função possui um ponto crítico

$$\frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} = 0.$$

iii) E não apenas isto, mas o mesmo é um equilíbrio estável, no qual

$$\left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} = k > 0,$$

Onde  $k$  é uma constante positiva definida.

iv) Além disso o fato de o sistema sofrer pequenas oscilações implica que  $|x - x_0| \rightarrow 0$ , de modo que termos de grau 3 em diante são desprezíveis e, portanto, não contribuiriam efetivamente na soma.

Combinando essas quatro considerações à equação (09), obtemos

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \equiv \frac{1}{2}k\tilde{x}^2, \quad (10)$$

onde  $\tilde{x}$  corresponde à uma translação de eixos de coordenadas, tal que  $\tilde{x} = x - x_0$ .

Note que a equação (10) implica que todo sistema físico em equilíbrio estável sofrendo pequenas oscilações, é um Oscilador Harmônico. Esta afirmação, até mesmo poética, evidencia todo o poder do formalismo, pois o que molda um sistema físico é sua energia potencial, tomada em sua forma geral para esta demonstração.

### 3 | DISCUSSÃO DE SISTEMAS FÍSICOS

Pois bem, vimos aqui que o Oscilador Harmônico é teoricamente um modelo primordial para o estudo de sistemas físicos em equilíbrio estável sofrendo pequenas oscilações. Eis então o seguinte questionamento natural: a aplicação de tal formulação é tão ampla assim, perpassando casos onde não há especificamente uma 'massa' e uma 'mola'?

A seguir discutiremos a solução de quatro problemas interessantes, apresentando ao final uma breve conclusão.

#### 3.1 Sistema 1: Conta sobre um aro vertical em Movimento Circular e Uniforme (MCU)

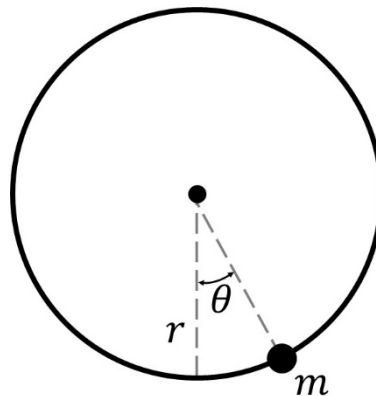
Seja uma conta (partícula) de massa enfiada em um aro vertical fixo de raio  $r$ , no qual desliza sem atrito, deslocando-se em torno do ponto mais baixo, de forma que o ângulo (fig. 3) permanece pequeno.

Note que o movimento da conta, em geral, é um movimento circular e, portanto, pode ser feita a associação de um torque devido à força peso. A definição de torque, ou melhor, de seu módulo possui duas formulações equivalentes, em termo do ângulo  $\theta$ .

$$\tau = rF \text{ sen } \theta, \quad (11)$$

ou ainda

$$\tau = I\alpha, \quad (12)$$



**Figura 3.** Representação do sistema 1.

**Fonte:** Elaborado pelos autores desse trabalho.

em que  $I$  é o momento de inércia da conta ( $I = mr^2$ ) e  $\alpha$  é a sua aceleração angular. Igualando as equações (11) e (12), obtemos

$$I\alpha = rF \text{ sen } \theta,$$

no entanto os valores de  $I$  e  $\theta$  são conhecidos,  $F$  é a força peso,  $\alpha = \ddot{\theta}$  e  $\theta \ll 1$ . Logo

$$mr^2\ddot{\theta} = -rmg\theta,$$

portanto

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0, \quad (13)$$

onde  $\omega^2 \equiv g/r$ . Note que a equação acima é idêntica à do Oscilador Harmônico Simples no qual não possui atrito e nem forças externas sobre o mesmo. A partir disso podemos tomar a seguinte hipótese, a conta pode ser tratada como tal para pequenas oscilações.

Por fim, podemos calcular a frequência de tais oscilações, uma vez que

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (14)$$

portanto

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{r}}. \quad (15)$$

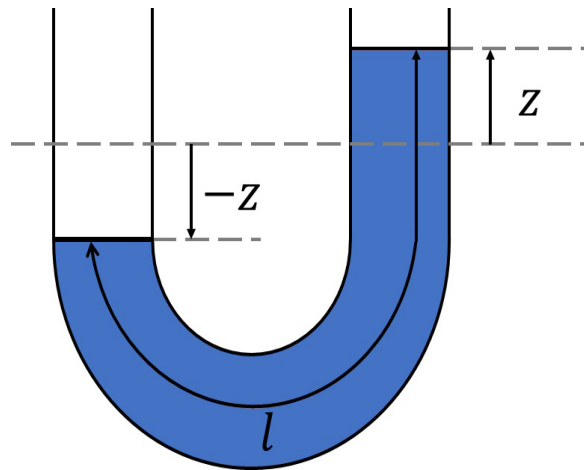
### 3.2 Sistema 2: Fluido em um tubo com formato de “U”

Seja disposto um líquido de densidade  $\rho$  contido em um tubo em U de seção transversal A, e seja  $l$  o comprimento total da coluna líquida, assim a massa total de líquido disposta é  $M = \rho Al$ . Este sistema é mais comum, aparecendo muito em construções, nas quais o mestre de obras (ou um de seus funcionários) utiliza uma mangueira com água para determinar o nível de uma parede com base na variação do



nível da água.

Em equilíbrio, o líquido tem o mesmo nível nos dois ramos, que tomamos como nível  $z = 0$  (fig. 4), correspondente à energia potencial  $U = 0$ . Se o nível baixa de uma altura  $z$  num ramo, subirá de  $z$  no outro, consideremos que essa variação é pequena se comparada as dimensões do problema.



**Figura 4.** Representação do sistema 2.

Fonte: Elaborado pelos autores desse trabalho.

Dadas as informações já citadas é possível definir a energia potencial a qual o fluido está submetido já que há um ponto de referência. Neste caso  $U=U(z)$ , onde  $z$  é a altura relativa com a posição de equilíbrio, cuja forma funcional é

$$U(z) = mgz,$$

importante frisar que estamos analisando apenas uma fração da massa total, a equivalente à massa deslocada durante as oscilações e, portanto  $m \equiv \rho Az$ . Desse modo a energia potencial é dada por

$$U(z) = \rho Agz^2, \tag{16}$$

isto é, um potencial parabólico, similar ao potencial restaurador do oscilador harmônico, note então que para este caso a ‘constante elástica’ seria dada por  $k \equiv 2\rho Ag$ , equivalendo à uma taxa de crescimento da força de empuxo do fluido em relação à variação no nível do mesmo.

Deste modo é possível calcular a frequência natural de vibração  $\omega$ , uma vez conhecida uma expressão para  $k$ ,

$$\omega^2 = \frac{k}{M'}$$

agora a massa é a massa total do fluido, pois supomos inicialmente que o mesmo se desloca dentro do tubo de modo homogêneo. Desse modo

$$\omega^2 = 2 \frac{g}{l}, \tag{17}$$

e, portanto, a frequência para pequenas oscilações é

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}}, \quad (18)$$

observe que quanto maior for a coluna de água, menor é a oscilação do movimento, garantindo, por exemplo uma maior precisão para a medida do nível em uma obra.

### 3.3 Sistema 3: Molécula diatômica

Um outro tipo de sistema interessante de estudarmos são as moléculas. Uma molécula é formada por alguns átomos formando uma determinada estrutura, a qual dará origem à diversas propriedades físicas e/ou químicas que podem ser essenciais para a vida ou até mesmo úteis para o desenvolvimento científico e/ou tecnológico.

Um dos exemplos mais simples de moléculas são as chamadas diatômicas, pois possuem apenas dois átomos em sua composição. Exemplos de moléculas diatômicas presentes no nosso dia a dia são o oxigênio ( $O_2$ ) e o nitrogênio ( $N_2$ ) que constituem cerca de 99% da atmosfera terrestre.

Sabe-se que a energia potencial para a força de interação entre dois átomos numa molécula diatômica tem a forma aproximada dada pelo potencial de Lennard-Jones (CHIQUITO; ALMEIDA, 1999)

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}, \quad (19)$$

onde  $a \propto a_0^6$  e  $b \propto a_0^{12}$  são constantes positivas,  $a_0$  é uma constante com dimensão de comprimento e  $x$  é a distância entre os átomos.

Utilizando um simulador gráfico (Geogebra) e ferramentas básicas do Cálculo Diferencial e Integral é possível plotar o potencial em função da posição. Já que o fator  $x$  representa uma distância entre átomos então não é necessário considerar o seu sentido negativo. A figura 5 apresenta um esboço desse potencial.

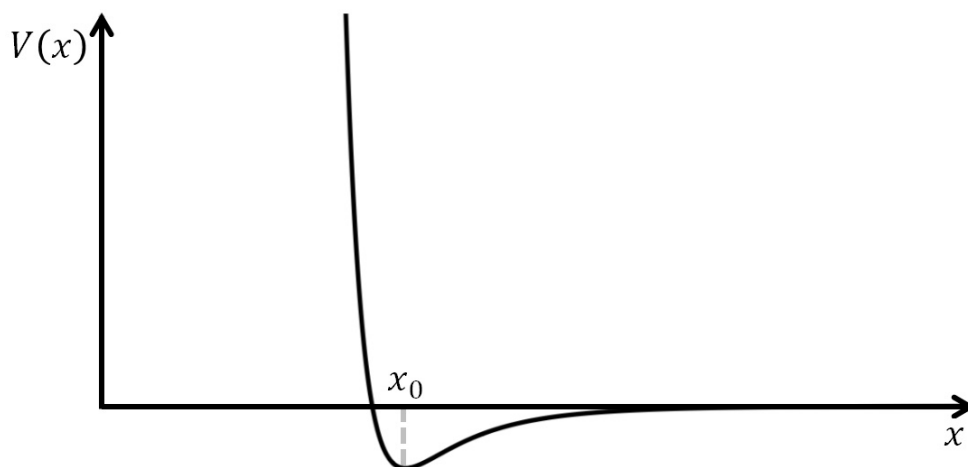


Figura 5. Potencial de interação da molécula diatômica com valores  $a$  e  $b$ .

Fonte: Elaborado pelos autores desse trabalho.

Observando o gráfico acima, notamos que há um ponto de equilíbrio estável, em  $x_0$  e com isto como já vimos na discussão teórica deste escrito, o mesmo pode ser visto como um oscilador harmônico para pequenas oscilações em torno de  $x_0$ .

Deste modo é possível associar uma frequência natural de oscilação  $\omega_0$  sob o qual a partícula executa um movimento oscilatório harmônico. Note que,  $\omega_0^2 = k/m$ , deste modo lembre que

$$k \equiv \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0}, \quad (20)$$

a frequência natural de oscilação é

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m} \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0}, \quad (21)$$

deste modo, é essencial determinar a posição de equilíbrio para determinar a frequência natural e com isto a frequência para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio. Para determinar  $x_0$  buscamos o ponto o qual a derivada da função é nula, desse modo

$$\frac{dV}{dx} = 0,$$

com isto

$$\frac{6a}{x_0^7} - \frac{12b}{x_0^{13}} = 0,$$

portanto, obtemos

$$x_0 = \sqrt[6]{\frac{2b}{a}}. \quad (22)$$

A frequência  $f$  pode ser obtida resolvendo a expressão abaixo

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{m}} \sqrt{\left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0}}. \quad (23)$$

Diferenciando duas vezes o potencial e aplicando o ponto de equilíbrio  $x_0$ , obtemos que a frequência para pequenas oscilações em torno de  $x_0$  é

$$f = \frac{3a}{2\pi\sqrt{m}} \sqrt{\frac{2}{b} \left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{1}{3}}}. \quad (24)$$

### 3.4 Sistema 4: Pêndulo preso por uma mola

O pêndulo da figura abaixo é formado por uma barra de massa desprezível e comprimento  $l$  com uma massa suspensa, ligada a barra em seu ponto médio há uma mola horizontal de massa desprezível e constante elástica  $k$ , com a outra

extremidade fixa e relaxada quando o pêndulo está em equilíbrio na vertical. Suponha que a massa ganhe uma pequena velocidade no sentido de disposição da mola, independentemente de seu movimento ser para a direita (esticando a mola) ou para a esquerda (comprimindo a mola), haverá o surgimento de uma força restauradora dada pela Lei de Hooke, se o sistema estiver isolado então o movimento se perpetuará indefinidamente.

Pois bem, para resolver tal situação basta compreender que há um balanço de torques envolvidos, assim como o tratado no sistema , há um torque gerado sobre o pêndulo devido à força peso da massa, isto é

$$\tau_p = -mgl \operatorname{sen} \theta \equiv -mgl\theta,$$

e de um torque gerado pela força elástica, dado por

$$\tau_m = -k \left( \frac{l}{2} \theta \right) \frac{l}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \equiv -\frac{kl^2}{4} \theta.$$

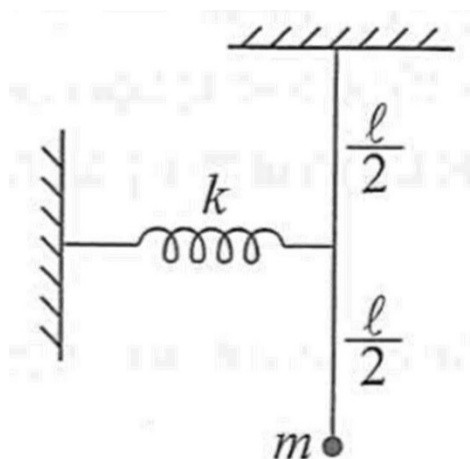


Figura 5. Representação do sistema 4.

Fonte: Nussenzveig (2014).

Desse modo o torque resultante,  $\tau = \tau_p + \tau_m \equiv I\ddot{\theta}$ , onde  $I$  é o momento de inércia da partícula e, portanto,  $I = ml^2$ . Logo,

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\theta - \frac{kl^2}{4}\theta,$$

ao reorganizamos a expressão obtemos

$$\ddot{\theta} + \theta \left( \frac{g}{l} + \frac{k}{4m} \right) = 0, \quad (25)$$

que é a equação de movimento do oscilador harmônico na direção de crescimento da variável angular  $\theta$ . Deste modo é possível efetuar o cálculo da frequência de pequenas oscilações e obter

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}. \quad (26)$$

## 4 | CONCLUSÃO

Ao longo deste capítulo foi possível notar a incrível capacidade do oscilador harmônico de servir como modelo para descrição de diversos sistemas físicos bastante diferentes do conhecido sistema massa-mola. Mostramos que qualquer sistema físico em equilíbrio estável sofrendo pequenas oscilações é um oscilador harmônico. Além disso, obtemos a frequência de pequenas oscilações para alguns exemplos específicos. De tal modo que o presente trabalho contribui para um ensino de física mais contextualizado, tendo o potencial para ser empregado como material complementar em cursos de Física e/ou Ciências correlatas em nível de graduação e pós-graduação.

## REFERÊNCIAS

BASSALO, J. M. B.; CATTANI, M. S. D. **Osciladores Harmônicos Clássicos e Quânticos**. São Paulo: Editora da Física, 2009.

CHIQUITO, A. J.; ALMEIDA, N. G. O Potencial de Lennard-Jones: Aplicação à Moléculas Diatômicas. In: **Revista Brasileira de Ensino de Física**. v 21. n 2. Junho, 1999.

GASPAR, A. **Compreendendo a Física**. 3 ed. v 1. São Paulo: Ática, 2016

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**. 9 ed., v. 2. São Paulo: LTC, 2013.

KITELL, C.; KNIGHT, W. D.; RUDERMAN, M. A. **Mecânica – Curso de Física de Berkeley**. V. 1. São Paulo: Edgard Blucher, 1973.

MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B.; GUIMARÃES, C. **Física: Contexto & Aplicações**. 2 ed. v 1. São Paulo: Scipione, 2016.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 5 ed. v. 2. Blücher: São Paulo, 2014.

SYMON, K. R. **Mecânica**. 5 ed. São Paulo: Campus, 1982.

WATARI, K. **Mecânica Clássica**. 2 ed. v. 1. São Paulo: Livraria da Física, 2004.

## **SOBRE OS ORGANIZADORES**

**Jorge González Aguilera:** Engenheiro Agrônomo (Instituto Superior de Ciências Agrícolas de Bayamo (ISCA-B) hoje Universidad de Granma (UG)), Especialista em Biotecnologia pela Universidad de Oriente (UO), CUBA (2002), Mestre em Fitotecnia (UFV/2007) e Doutorado em Genética e Melhoramento (UFV/2011). Atualmente, é professor visitante na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) no Campus Chapadão do Sul. Têm experiência na área de melhoramento de plantas e aplicação de campos magnéticos na agricultura, com especialização em Biotecnologia Vegetal, atuando principalmente nos seguintes temas: pre-melhoramento, fitotecnia e cultivo de hortaliças, estudo de fontes de resistência para estres abiótico e biótico, marcadores moleculares, associação de características e adaptação e obtenção de vitroplantas. Tem experiência na multiplicação “on farm” de insumos biológicos (fungos em suporte sólido; Trichoderma, Beauveria e Metharrizum, assim como bactérias em suporte líquido) para o controle de doenças e insetos nas lavouras, principalmente de soja, milho e feijão. E-mail para contato: [jorge.aguilera@ufms.br](mailto:jorge.aguilera@ufms.br)

**Alan Mario Zuffo:** Engenheiro Agrônomo (Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT/2010), Mestre em Agronomia – Produção Vegetal (Universidade Federal do Piauí – UFPI/2013), Doutor em Agronomia – Produção Vegetal (Universidade Federal de Lavras – UFLA/2016). Atualmente, é professor visitante na Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS no Campus Chapadão do Sul. Tem experiência na área de Agronomia – Agricultura, com ênfase em fisiologia das plantas cultivadas e manejo da fertilidade do solo, atuando principalmente nas culturas de soja, milho, feijão, arroz, milheto, sorgo, plantas de cobertura e integração lavoura pecuária. E-mail para contato: [alan\\_zuffo@hotmail.com](mailto:alan_zuffo@hotmail.com)

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-475-7

