As Engenharias frente a Sociedade, a Economia e o Meio Ambiente 3

Henrique Ajuz Holzmann
(Organizador)

Atena Editora
Ano 2019

Henrique Ajuz Holzmann
(Organizador)

As Engenharias frente a Sociedade, a Economia e o Meio Ambiente 3

Atena Editora
2019

2019 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E57 As engenharias frente a sociedade, a economia e o meio ambiente 3 [recurso eletrônico] / Organizador Henrique Ajuz Holzmann. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (As Engenharias Frente a Sociedade, a Economia e o Meio Ambiente; v. 3)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-432-0
DOI 10.22533/at.ed.320192506

1. Engenharia – Aspectos sociais. 2. Engenharia – Aspectos econômicos. 3. Desenvolvimento sustentável. I. Holzmann, Henrique Ajuz. II. Série.

CDD 658.5

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2019

APRESENTAÇÃO

As obras As Engenharias frente a Sociedade, a Economia e o Meio Ambiente Volume 1, 2, 3 e 4 abordam os mais diversos assuntos sobre métodos e ferramentas nas diversas áreas das engenharias a fim de melhorar a relação do homem com o meio ambiente e seus recursos.

O Volume 1 está disposto em 31 capítulos, com assuntos voltados a engenharia do meio ambiente, apresentando processos de recuperação e reaproveitamento de resíduos e uma melhor aplicação dos recursos disponíveis no ambiente, além do panorama sobre novos métodos de obtenção limpa da energia.

Já o Volume 2, está organizado em 32 capítulos e apresenta uma vertente ligada ao estudo dos solos e aguas, com estudos de sua melhor utilização, visando uma menor degradação do ambiente; com aplicações voltadas a construção civil de baixo impacto.

O Volume 3 apresenta estudos de materiais para aplicação eficiente e econômica em projetos, bem como o desenvolvimento de projetos mecânico e eletroeletrônicos voltados a otimização industrial e a redução de impacto ambiental, sendo organizados na forma de 28 capítulos.

No último Volume, são apresentados capítulos com temas referentes a engenharia de alimentos, e a melhoria em processos e produtos.

Desta forma um compendio de temas e abordagens que facilitam as relações entre ensino-aprendizado são apresentados, a fim de se levantar dados e propostas para novas discussões em relação ao ensino nas engenharias, de maneira atual e com a aplicação das tecnologias hoje disponíveis.

Boa leitura

Henrique Ajuz Holzmann

SUMÁRIO

CAPÍTULO 15

MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS DINÂMICOS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

Lucas Divino Alves
Centro Universitário de Formiga – UNIFOR-MG
Formiga-MG

Neylor Makalister Ribeiro Vieira
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
Belo Horizonte-MG

Emerson Paulino dos Reis
Centro Universitário de Formiga – UNIFOR-MG
Formiga-MG

RESUMO: Neste artigo é proposto, um estudo de exemplos relacionados a modelos matemáticos. São quatro modelos que mostram ao leitor o fenômeno visto através de uma fisionomia diferente, uma essência matemática que visa aguçar o interesse do estudante. Por meio do estudo de cada questão, foi feita uma análise referente ao que era solicitado e o método para se chegar à determinada resposta. Através da resolução dos exercícios buscou-se investigar as variáveis que afetam o problema em questão, e a partir das condições interpretadas foi encontrada uma equação que represente a situação descrita. Com base em suas condições e com um modelo já pronto, concluiu-se que se chegaria à resolução do problema utilizando recursos como a derivada e a integral. A resolução dos exercícios necessitou-se de conhecimentos prévios em algumas ferramentas de integração, como a regra da substituição e o método do fator integrante. Sendo assim, os exercícios tiveram como foco a prática educativa de ensino-aprendizagem, e possibilitou aos leitores assimilar o mecanismo que consiste em modelar.

PALAVRAS-CHAVE: modelagem, investigar, ensino-aprendizagem

MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC SYSTEMS: A DIDACTIC APPROACH

ABSTRACT: In this article we propose a study of examples related to mathematical models. There are four models that show the reader the phenomenon seen through a different physiognomy, a more mathematical look. Through the study of each question, an analysis was made regarding what was requested and the method to arrive at a certain answer. Through the resolution of the exercises we sought to investigate the variables that affect the problem in question, and from the interpreted conditions an equation that represents the described situation was found. Based on its conditions and with a ready-made model, it was concluded that the problem would be solved using resources such as derivatives and integrals. The resolution of the exercises required previous knowledge in some integration tools, such as the substitution

rule and the integral factor method. Thus, the exercises focused on the educational practice of teaching and learning, and enabled the readers to assimilate the mechanism that consists of modeling.

KEYWORDS: modeling, investigating, teaching-learning.

1 I INTRODUÇÃO

O termo modelagem matemática surgiu há muito tempo e que ao passar dos anos tornou-se extremamente importante para que os fenômenos possam ser compreendidos. Analisar os mecanismos que interferem a vida humana sempre foi um aspecto de grande relevância para a ciência, com isso a modelagem matemática surge como um método numérico para explicar os diversos processos físicos, químicos e biológicos que cercam a humanidade.

> Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma base significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. [...] A modelagem matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias. (BIEMBENGUT, 2000, p.12-13).

Para que se possa entender o conteúdo de modelagem o estudo de equações diferenciais é fundamental. Segundo Zill (2011, p. 2) “Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED).” Elas podem ser classificas pelo tipo, ordem e linearidade. Em sala de aula forma comum de ensinar issso se dá através de uma forma repetitiva e mecanicista.

De acordo com Laudares e Miranda (2007), a construção de conceitos relacionados às áreas nas ciências físicas, químicas, biológicas, econômicas e sociais obtêm-se através de uma quantitativa e qualitativa, beneficiando-se da matemática como ferramenta. Uma possível estratégia que busque despertar o interesse do discente é a incessante busca pela interdisciplinaridade e contextualização como mecanismo de resolução de problemas.

> O desenvolvimento de novas teorias matemáticas e suas apresentações como algo acabado e completo acabaram conduzindo seu ensino nas escolas de maneira desvinculada da realidade, e mesmo do processo histórico de construção da matemática. Assim é que um teorema é ensinado, seguindo o seguinte esquema: “enunciado → demonstração → aplicação”, quando de fato o que poderia ser feito é sua construção na ordem inversa (a mesma que deu origem ao teorema), isto é, sua motivação (externa ou não à matemática), a formulação de hipóteses, a validação das hipóteses e novos questionamentos, e finalmente seu enunciado (BASSANEZI, 2002, p. 36).

Conforme defendido por Alves (2006), o ensino das equações diferencias pode contribuir para o entendimento do conceito de derivada com base no estudo dos fenômenos científicos, e utilizando-se da taxa de variação para verificar o comportamento destes processos em relação à variável tempo.

> Para alguns estudantes, o interesse intrínseco do assunto é motivação suficiente, mas para a maioria, as possíveis aplicações importantes em outros campos é o que faz com que tal assunto valha a pena. Muitos dos princípios, ou leis que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem (BOYCE, DIPRIMA 2006, p.1).

O seguinte trabalho tem por finalidade auxiliar os leitores na compreensão e resolução de exercícios introduzindo o conceito de modelagem matemática e reforçando a relevância do entendimento e solução de problemas principalmente no ramo das engenharias. Visa proporcioná-los, através da análise de problemas, uma forma didática de investigar as variáveis que interferem no sistema e chegar a uma conclusão referente ao que o problema propõe.

Para Bassanezi (2002), a modelagem se inicia com a fase da experimentação, que equivale à obtenção dos dados do problema, para que ela fique bem executada, recomenda-se que o modelador se baseie em um desenho que represente o fenômeno. A segunda fase trata-se da abstração, etapa em que há a seleção de variáveis, verificando quais os elementos que atuam diretamente no problema em questão, logo depois vem a problematização do modelo seguindo uma linguagem matemática, tem se também a formulação de hipóteses em que permite ao pesquisador inferir deduções e finalmente a simplificação que visa simplificar ao máximo o modelo criado, deixando-o o mais simples possível. A quarta etapa é a validação, ou seja, verificar se determinado modelo descreve aquela situação real em questão, caso haja algumas discrepâncias há necessidade de modifica-lo. Logo a modelagem matemática é um mecanismo complexo porem de extrema importância para que se analisem os fenômenos que ocorrem na natureza e possam assim ser entendidos. A Figura 1 exemplifica o processo.

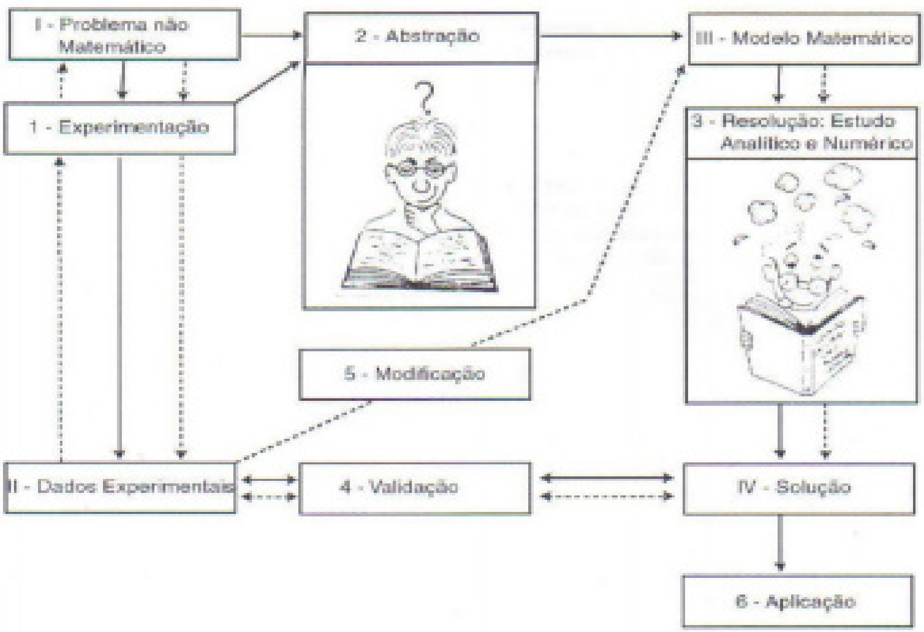

Figura 1 - Processo de Modelagem

Fonte: Bassanezi (2002)

2 I MATERIAIS E MÉTODOS

O método utilizado para elaborar o estudo foi a resolução de exercícios que descrevem modelos matemáticos. Trata-se de quatro exemplos que permitem ao leitor ter uma introdução sobre o conteúdo de modelagem matemática. O primeiro exemplo retrata a variação de temperatura sofrida por um termômetro, quando colocado em ambientes diferentes. O segundo exemplo relata o crescimento de uma cidade qualquer, em que, à medida que o tempo vai transcorrendo o número de habitantes cresce. No terceiro exemplo verifica-se o caso de uma mistura de salmoura presente em um tanque e no quarto exemplo verificam-se as forças atuantes no corpo de um paraquedista. Como já se tinha o modelo dos quatro exemplos, somente foi preciso separar as variáveis e realizar o procedimento de integração. Para resolver a integral dos exercícios utilizou-se a regra da substituição e do fator integrante. Como são problemas de valor inicial, por meio das condições que o problema ofereceu foi descoberta uma equação que regia o modelo. Porém no último problema foi feita uma investigação sobre as variáveis que atuam sobre o corpo do paraquedista, logo depois um diagrama de forças representou as forças que atuam sobre o mesmo. A partir disso, encontrou uma equação diferencial de segunda ordem que representa a situação descrita.

3 I RESULTADOS

Propuseram-se a estudar e solucionar quatro exercícios exemplos para que o leitor possa analisar as variáveis que afetam o sistema e entender como ocorre o processo de modelagem.

3.1 Modelo Matemático de Aquecimento e Resfriamento de Newton

Este modelo é definido como: A taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia. Logo, obtêm-se a expressão.

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_M \quad \text{ou} \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_M) \qquad (1)$$

Como se trata de taxa deve-se recorrer ao uso da derivada. Sendo assim, empregando o método de separação de variáveis e integrando-a, encontrou-se a equação característica do modelo descrito.

$$\frac{dT}{(T - T_M)} = kdt \tag{2}$$

$$\int \frac{dT}{(T - T_M)} = \int kdt \tag{3}$$

$$\ln|T - T_M| + c_1 = kt + c_2 \tag{4}$$

$$\ln|T - T_M| = kt + c_3 \tag{5}$$

Utilizando as propriedades do logaritmo natural, estabeleceu a seguinte equação.

$$\begin{cases} \ln b = k \\ b = e^k \end{cases} \tag{6}$$

$$T = e^{kt}.c + T_M \tag{7}$$

Na Eq. (7), T, e, k, t, c e TM, são respectivamente, temperatura do corpo, número de Euller, constante de proporcionalidade, tempo, constante e temperatura do meio.

Em vista disso, para demonstrar sua utilização será mostrado um exercício que relaciona o modelo matemático de aquecimento e resfriamento de Newton.

Situação Problema: Um termômetro é removido de uma sala onde a temperatura ambiente é de 70°F e levado para fora, onde a temperatura é de 10°F. Após meio minuto o termômetro indica 50°F. Qual a leitura do termômetro em t = 1 min? Quanto tempo levará para o termômetro atingir 15°F? (ZILL, D.G. Equações diferenciais: com aplicações em modelagem. 9.ed. Cengage Learning, São Paulo, BRA,93p.,2014.)

Visando utilizar o Sistema Internacional de Unidades (SI), recorreremos a uma fórmula que converta a temperatura de Fahrenheit para Kelvin, de acordo com a Eq. (8). A unidade de medida de tempo no exercício está em minutos, porém será utilizado o segundo para resolução do problema. Para os cálculos considerou-se uma aproximação de quatro casas decimais, após a vírgula.

$$\frac{T_K - 273}{5} = \frac{(T_F - 32)}{9} \tag{8}$$

Na Eq.(8), os termos TK e TF referem-se respectivamente à temperatura em Kelvin e graus Fahrenheit. Como o exercício relata temperaturas de 70°F, 10°F, 50°F e 15°F, fazendo o uso da fórmula, elas correspondem respectivamente a 294,1111K, 260,7778K, 283K e 263,5556K. Através da interpretação do problema obtêm-se as seguintes informações:

$$\begin{cases} T_M = 260{,}7778K \\ T(0) = 294{,}1111K \\ T(30) = 283K \end{cases} \quad (9)$$

Quando t = 0; T = 294,1111K. Substituindo em (7)

$$294{,}1111 = e^{k.0}.c + 260{,}7778 \quad (10)$$

$$c = 33{,}3334 \quad (11)$$

Quando t = 30s; T = 283K. Substituindo em (7) e usando o valor de c, obtido em (11) tem-se:

$$283 = e^{30k}.33{,}3334 + 260{,}7778 \quad (12)$$

$$\frac{22{,}2223}{33{,}3334} = e^{30k} \quad (13)$$

Para descobrir o valor da constante k, deve utilizar as propriedades do logaritmo natural.

$$\ln|22{,}2223| - \ln|33{,}3334| = 30k \quad (14)$$

$$3{,}1011 - 3{,}5066 = 30k \quad (15)$$

$$k = -0{,}0135 \quad (16)$$

A expressão que representa este modelo ficaria a seguinte:

$$T(t) = 33{,}3334e^{-0{,}0135t} + 260{,}7778 \quad (17)$$

O exercício em questão deseja saber:

$$\begin{cases} T(60) = ? \\ T(?) = 263{,}5556\ F \end{cases} \quad (18)$$

Utilizando a equação (17), e substituindo os valores:

$$T(60) = 33{,}3334.e^{-0{,}0135.60} + 260{,}7778 \quad (19)$$

$$T(60) = 275{,}6064 \quad (20)$$

Como o tempo equivale a 60 segundos, obtêm-se uma temperatura de 275,6064K. Agora para descobrir sua segunda condição, basta substituir os dados na equação (17). Assim:

$$263{,}5556 = 33{,}3334e^{-0{,}0135t} + 260{,}7778 \quad (21)$$

$$\frac{2{,}7778}{33{,}3334} = e^{-0{,}0135t} \quad (22)$$

Utilizando as propriedades do logaritmo natural:

$$\ln|2{,}7778| - \ln|33{,}3334| = -0{,}0135t \quad (23)$$

$$t = 184{,}0667 \quad (24)$$

Então, para termômetro atingir 263,5556K são necessários 184,0667 segundos.

3.2 Modelo Matemático de Crescimento e Decaimento

O modelo é definido como, a taxa segundo a qual a população cresce ou decresce em determinado instante é proporcional à população total naquele instante. Logo, obtêm-se a seguinte expressão:

$$\frac{dP}{dt} \propto P \qquad \text{ou} \qquad \frac{dP}{dt} = kP \quad (25)$$

Como a definição do modelo menciona taxa, há necessidade de uso da derivada. Utilizando o método da separação de variáveis e integrando-a, a equação ficará da seguinte forma:

$$\frac{dP}{P} = kdt \quad (26)$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt \quad (27)$$

$$\ln|\,P\,| + c_1 = kt + c_2 \quad (28)$$

$$P = e^{kt}.c \quad (29)$$

Na Eq. (29) os termos P, e, k, t e c são respectivamente, população em determinado instante de tempo, número de Euller, constante de proporcionalidade, tempo e constante. Assim sendo, para demonstrar sua utilização será resolvido um exercício que relaciona o modelo matemático de crescimento e decaimento.

Situação Problema: A população de uma cidade cresce a uma taxa proporcional à população no instante t. A população inicial de 500 indivíduos cresce 15% em 10 anos. Qual será a população em 30 anos? Qual o crescimento populacional em t=30? (ZILL, D.G. Equações diferenciais: com aplicações em modelagem. 9.ed. Cengage Learning, São Paulo, BRA, 91p.,2014) Através da interpretação do problema obtêm-se as seguintes informações:

$$\begin{cases} P\,(0) = 500 \\ P\,(10) = 500 + (500.15\%) \\ P\,(10) = 575 \end{cases} \tag{30}$$

Quando P = 500; t = 0. Substituindo-se em (29).

$$500 = e^{k.0}.c \tag{31}$$

$$c = 500 \tag{32}$$

A partir dessa condição encontra-se a constante c, e quando P = 575; t = 10. Substituindo-se em (29).

$$575 = e^{10k}.500 \tag{33}$$

$$\frac{575}{500} = e^{10k} \tag{34}$$

$$1.15 = e^{10k} \tag{35}$$

Para descobrir o valor da constante k utiliza-se as propriedades do logaritmo natural, conforme Eq. (6). Considerando uma aproximação de quatro casas decimais após a vírgula.

$$\ln|\,1.15\,| = 10k \tag{36}$$

$$k = 0.0140 \tag{37}$$

A expressão que representa este modelo ficará da seguinte forma:

$$P(t) = 500.e^{0.0140t} \tag{38}$$

O exercício em questão deseja saber:

$$\begin{cases} P\,(30) = ? \\ \text{Crescimento em } (t = 30) \; = P(30) - P(29) \end{cases} \tag{39}$$

Fazendo o uso da equação (38) e substituindo os dados:

$$P(30) = 500.\, e^{0.0140.30} \tag{40}$$

$$P(30) = 760.9808 \tag{41}$$

Logo, a população dessa cidade daqui a 30 anos será de 760.9808 indivíduos. Agora o exercício deseja encontrar qual foi o crescimento em t=30, ou seja, o crescimento que essa cidade teve no ano 30. Assim, utilizará a segunda condição descrita acima.

$$P(29) = 500.\, e^{0.0140.29} \tag{42}$$

$$P(29) = 750.4013 \tag{43}$$

Como se tem que o crescimento é P(30) – P(29), logo:

$$\text{Crescimento em } (t = 30) = \; P(30) - P(29) \tag{44}$$

$$\text{Crescimento em } (t = 30) = 760.9808 - 750.4013 \tag{45}$$

Então, houve um crescimento de 10.5795 indivíduos ao longo do ano 30.

3.3 Modelo Matemático de Misturas

Determinado modelo trata-se da análise de duas misturas que se encontram em um tanque. Para que se investigue a concentração das misturas é necessário verificar que existe uma relação descrita pela seguinte fórmula.

$$\frac{dA}{dt} = \text{TAXA DE ENTRADA DE SAL} - \text{TAXA DE SAÍDA DE SAL} \tag{46}$$

Através da fórmula descrita, depreende-se que existe uma taxa, logo, a aplicação da derivada buscará estabelecer as concentrações das misturas analisadas. Situação problema: Um grande tanque é enchido completamente com 500 galões de água pura. Uma salmoura contendo 2 libras por galão é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 5 gal/min. A solução bem misturada é bombeada para fora à mesma taxa. Ache a quantidade A(t) de libras de sal no tanque no instante t. (ZILL, D.G. Equações diferenciais: com aplicações em modelagem. 9. ed. Cengage Learning, São Paulo, BRA, 93p.,2014) Como o exercício estabelece medidas fora do Sistema Internacional de Unidades (SI), iremos modifica-las. Libra é uma unidade de massa utilizada no sistema inglês de pesos e medidas, e equivale a 0,4536 kg (HALLIDAY, RESNIK, WALKER, 2002). Na resolução do exercício utilizaremos segundos.

Por meio da interpretação do problema às seguintes conclusões.

$$\begin{cases} \text{ENTRADA} = \dfrac{\text{5 GALÕES}}{\text{MINUTO}} \cdot \dfrac{\text{2 LIBRAS}}{\text{GALÃO}} = \dfrac{0{,}0833\ GALÃO}{SEGUNDO} \cdot \dfrac{0{,}9072\ Kg}{GALÃO} \\ \text{SAÍDA} = \dfrac{\text{5 GALÕES}}{\text{MINUTO}} \cdot \dfrac{\text{A}}{\text{500 GALÕES}} = \dfrac{0{,}0833\ GALÃO}{SEGUNDO} \cdot \dfrac{A}{500\ GALÕE} \end{cases} \tag{47}$$

Então se obtêm as seguintes taxas de concentração:

$$\begin{cases} \text{ENTRADA} = \dfrac{\text{10 LIBRAS}}{\text{MINUTO}} = \dfrac{0{,}0756}{SEGUNDO} \\ \text{SAÍDA} = \dfrac{0{,}0833\ GALÃO}{SEGUNDO} \cdot \dfrac{A}{500\ GALÕES} = \dfrac{A}{5000\ SEGUNDOS} \end{cases} \tag{48}$$

Assim tem-se que:

$$\frac{dA}{dt} = \text{TAXA DE ENTRADA} - \text{TAXA DE SAÍDA} \tag{49}$$

A partir disso obtêm-se a expressão que descreve a situação.

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}0756 - \frac{A}{5000} \tag{50}$$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{5000} = 0{,}0756 \tag{51}$$

Para resolver tal expressão deve-se utilizar o fator de integração cuja fórmula é a seguinte.

$$\mu = e^{\int P(t)dt} \tag{52}$$

Então o fator de integração ficará da seguinte forma:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{5000} dt} \tag{53}$$

$$\mu = e^{\frac{t}{5000}} \tag{54}$$

Com isso pode utilizar a seguinte relação:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\int P(t)dt}.y \right] = e^{\int P(t)dt}.f(x) \tag{55}$$

Logo:

$$\frac{d}{dt}\left[A.e^{\frac{t}{5000}} \right] = 0{,}0756.e^{\frac{t}{5000}} \tag{56}$$

Sendo assim, agora integramos os dois lados da expressão descrita:

$$\int \frac{d}{dt}\left[A.e^{\frac{t}{5000}} \right] = \int 0{,}0756.e^{\frac{t}{5000}}\, dt \tag{57}$$

A partir de agora se tem duas integrais, sendo que uma é a derivada da integral, diante disso o resultado dessa integração é o próprio termo, já a outra terá de ser resolvida pelo método da substituição.

$$\int 0{,}0756e^{\frac{t}{5000}} dt \tag{58}$$

Considerando:

$$u = \frac{t}{5000} \qquad e \qquad \frac{du}{dt} = \frac{1}{5000} \qquad \text{logo} \quad dt = 5000du \tag{59}$$

Agora fazendo as devidas substituições encontra-se:

$$\int 0{,}0756e^{u}.5000du = 0{,}0756.5000 \int e^{u}\, du \tag{60}$$

Sendo assim:

$$378e^{\frac{t}{5000}} + c \quad (61)$$

Então, como já se têm as devidas integrais, obtêm-se:

$$A.\,e^{\frac{t}{5000}} = 378e^{\frac{t}{5000}} + c \quad (62)$$

$$A = \frac{378e^{\frac{t}{5000}}}{e^{\frac{t}{5000}}} + \frac{c}{e^{\frac{t}{5000}}} \quad (63)$$

$$A(t) = 378 + ce^{\frac{-t}{5000}} \quad (64)$$

Na Eq.(64) os termos A, c, e, e t, são respectivamente, concentração em função de um determinado tempo, constante, número de Euler e tempo. Como taxa que entra é a mesma que sai, logo não possui diferença nas concentrações. Com isso no tempo zero, tem-se a seguinte condição A(0) = 0, a partir dessa relação encontra-se o valor da constante c. Substituindo a relação descrita em (64) obtêm-se:

$$0 = 378 + \; ce^{\frac{-0}{5000}} \quad (65)$$

$$c = \; -378 \quad (66)$$

Logo a equação que representa a situação descrita é a seguinte:

$$A(t) = 378 - 378e^{\frac{-t}{5000}} \quad (67)$$

3.4 Modelo Matemático Queda-livre

Um corpo em queda livre sofre influência da gravidade e da resistência do ar, mediante a isso tais fatores vão interferir na velocidade do objeto. Para que se possa compreender tal situação torna-se necessário desenhar o diagrama de corpo livre para saber quais as forças que atuam sobre o objeto. Para entender determinada situação, analisa-se o seguinte exemplo físico.

Situação Problema: Em certas circunstâncias, um corpo B de massa m em queda como o páraquedista mostrado na figura (Figura 2), encontra resistência do ar proporcional à sua velocidade v. Use a segunda lei de Newton para encontrar a equação diferencial para a velocidade v do corpo em qualquer instante. Lembre-se de que a aceleração é a = dv/dt. Suponha neste caso que a direção positiva é para baixo. (CULLEN, M.R.; ZILL, D.G. Equações diferenciais. 3.ed. Person Makron Books, São

Paulo, BRA, 31p.,2001.)

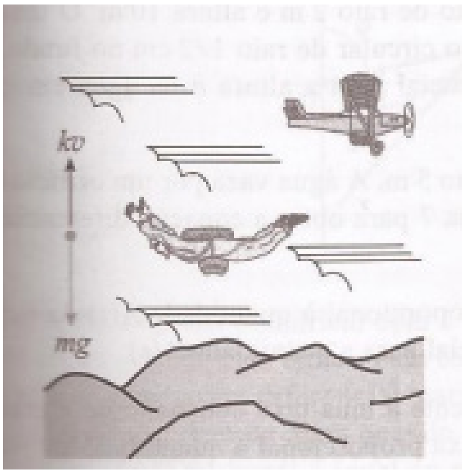

Figura 2 - Paraquedista em queda.

Fonte: Cullen e Zill (2001)

Como a resistência do ar é proporcional à velocidade, então:

$$k \propto V \qquad \text{logo} \qquad kV \tag{68}$$

Assim, quanto maior é a velocidade(V), maior será a resistência do ar(k). Através da segunda lei de Newton, conhecida como princípio fundamental da Dinâmica, verifica-se que a força resultante que atua sobre um corpo é resultado da multiplicação da massa do corpo por sua aceleração.

$$\overrightarrow{F_R} = m.\,\vec{a} \tag{69}$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \tag{70}$$

Na Eq. (70), a aceleração é representada como a derivada da velocidade em um determinado intervalo de tempo. A figura (figura 3) representa a análise das forças atuantes no paraquedista.

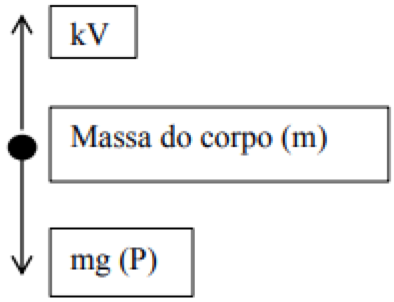

Figura3 – Diagrama de Forças

Fonte: Próprio autor (2018)

$$F_R = mg - kV \quad (71)$$

$$ma = mg - kV \quad (72)$$

$$ma + kV = mg \quad (73)$$

Por meio da análise dos vetores do Diagrama de forças da Figura 3, apresenta-se uma equação que caracteriza a situação referida. A Eq. (71) retrata a Força resultante como sendo a diferença entre o produto da massa e gravidade, pelo produto da resistência do ar e velocidade. Na Eq. (73) há uma substituição da termo FR, pois se sabe que força resultante equivale ao produto da massa pela aceleração. Conforme a = dV/dt, substituindo:

$$m\frac{dV}{dt} + kV = mg \quad (74)$$

$$g = \frac{m\,dV}{m\,dt} + \frac{kV}{m} \quad (75)$$

Portanto a equação diferencial que descreve a situação problema é a seguinte:

$$g = \frac{dV}{dt} + \frac{kV}{m} \quad (76)$$

Na Eq. (76) o termos g, dV/dt, k, V e m, equivalem a respectivamente, gravidade, derivada da velocidade em função do tempo (que representa a aceleração), resistência do ar, velocidade e massa.

4 I CONCLUSÃO

Através dos problemas propostos percebe-se que a modelagem matemática é essencial para que os processos possam ser compreendidos. É uma ferramenta numérica que busca auxiliar, por intermédio de cálculos, a solução do sistema em questão. Através disso, a resolução dos exercícios feita de forma passo a passo objetiva propiciar um melhor entendimento, facilitando assim o aprendizado. Foram selecionados exercícios referentes à questão de transferência de calor (análise da temperatura do corpo), crescimento populacional, um exemplo químico relacionado com o fator de misturas e por fim foi feita uma investigação em relação às variáveis que atuam em um corpo em queda. Muitos alunos possuem a dificuldade em entender o que está ocorrendo no sistema, visto que a metodologia empregada em sala de aula é feita de maneira mecanicista e repetitiva. Então, determinado artigo teve o objetivo de explicar como reproduzir um modelo e resolvê-lo, de forma simples e abordando todos os passos ao longo de sua resolução. Portanto é muito importante entender os fatores que afetam o sistema e buscar métodos para solucioná-lo, assim o estudo da modelagem deseja despertar o gosto investigativo pelo modo como ocorrem os fenômenos.

5 I AUTORIZAÇÃO/RECONHECIMENTO

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo das informações contidas neste artigo.

REFERÊNCIAS

ALVES, M.B. **Equações diferenciais ordinárias em cursos de licenciatura de matemática: formulação, resolução de problemas e introdução à modelagem matemática.** 2008. 90p. Mestrado Profissional (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte,2008.Disponívelem:, Acesso em: 6 mai. 2017.

BASSANEZI, C.R. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** Contexto, São Paulo, BRA, 2002.

BIEMBENGUT, M.S. **Modelagem matemática no ensino.** Contexto, São Paulo, BRA, 2000

BOYCE, W.E.; DIPRIMA. R.C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 8.ed. LTC, Rio de Janeiro, BRA, 2006.

CULLEN, M.R.; ZILL, D.G. **Equações diferenciais.** 3.ed. Person Makron Books, São Paulo, BRA, 2001.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física.** 6.ed. LTC, Rio de Janeiro, BRA, 2002.

LAUDARES, J.B; MIRANDA, D.F. **Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.9, n.1, p.103-120, 2007. Disponível em: ,Acesso em: 23 ago. 2018.

ZILL, D.G. **Equações diferenciais: com aplicações em modelagem.** 9.ed. Cengage Learning, São Paulo,BRA, 2017.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-432-0
9 788572 474320