



As Engenharias frente a Sociedade, a Economia e o Meio Ambiente 3

Henrique Ajuz Holzmann
(Organizador)

Henrique Ajuz Holzmann
(Organizador)

As Engenharias frente a Sociedade, a
Economia e o Meio Ambiente 3

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.ª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof.ª Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.ª Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
E57	As engenharias frente a sociedade, a economia e o meio ambiente 3 [recurso eletrônico] / Organizador Henrique Ajuz Holzmann. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (As Engenharias Frente a Sociedade, a Economia e o Meio Ambiente; v. 3) Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-432-0 DOI 10.22533/at.ed.320192506 1. Engenharia – Aspectos sociais. 2. Engenharia – Aspectos econômicos. 3. Desenvolvimento sustentável. I. Holzmann, Henrique Ajuz. II. Série. CDD 658.5
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

As obras As Engenharias frente a Sociedade, a Economia e o Meio Ambiente Volume 1, 2, 3 e 4 abordam os mais diversos assuntos sobre métodos e ferramentas nas diversas áreas das engenharias a fim de melhorar a relação do homem com o meio ambiente e seus recursos.

O Volume 1 está disposto em 31 capítulos, com assuntos voltados a engenharia do meio ambiente, apresentando processos de recuperação e reaproveitamento de resíduos e uma melhor aplicação dos recursos disponíveis no ambiente, além do panorama sobre novos métodos de obtenção limpa da energia.

Já o Volume 2, está organizado em 32 capítulos e apresenta uma vertente ligada ao estudo dos solos e águas, com estudos de sua melhor utilização, visando uma menor degradação do ambiente; com aplicações voltadas a construção civil de baixo impacto.

O Volume 3 apresenta estudos de materiais para aplicação eficiente e econômica em projetos, bem como o desenvolvimento de projetos mecânico e eletroeletrônicos voltados a otimização industrial e a redução de impacto ambiental, sendo organizados na forma de 28 capítulos.

No último Volume, são apresentados capítulos com temas referentes a engenharia de alimentos, e a melhoria em processos e produtos.

Desta forma um compendio de temas e abordagens que facilitam as relações entre ensino-aprendizado são apresentados, a fim de se levantar dados e propostas para novas discussões em relação ao ensino nas engenharias, de maneira atual e com a aplicação das tecnologias hoje disponíveis.

Boa leitura

Henrique Ajuz Holzmann

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
ANÁLISE DE PROPRIEDADES MECÂNICAS DE COMPÓSITOS CERÂMICOS DE ALUMINA-ZIRCÔNIA PARA APLICAÇÃO COMO FERRAMENTAS DE CORTE	
Miguel Adriano Inácio Maria do Carmo de Andrade Nono José Vitor Cândido de Souza Sergio Luiz Mineiro Daniel Alessandro Nono	
DOI 10.22533/at.ed.3201925061	
CAPÍTULO 2	10
SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE MODELO ELASTOPLÁSTICO EM ROCHA CARBONÁTICA CARSTIFICADA	
Rayane Conceição Ribeiro da Silveira Mattos Daniel Araújo Farias de Melo Marinésio Pinheiro de Lima Tiago de Freitas Viana Igor Fernandes Gomes Leonardo José do Nascimento Guimarães	
DOI 10.22533/at.ed.3201925062	
CAPÍTULO 3	26
A INFLUÊNCIA DO NITROGÊNIO EM AÇOS INOXIDÁVEIS AUSTENÍTICOS COM APLICAÇÃO EM PRÓTESES ORTOPÉDICAS	
Glauber Rodrigues Cerqueira de Cerqueira Pedro Eliézer de Araújo Júnior	
DOI 10.22533/at.ed.3201925063	
CAPÍTULO 4	42
MICROPOROUS ACTIVATED CARBON FIBER FELT FROM BRAZILIAN TEXTILE PAN FIBER: PREPARATION, CHARACTERIZATION AND APPLICATION AS SUPERCAPACITOR ELECTRODE	
Jossano Saldanha Marcuzzo Aline Castilho Rodrigues Andres Cuña Nestor Tancredi Eduardo Mendez Heide Heloise Bernardi Mauricio Ribeiro Baldan	
DOI 10.22533/at.ed.3201925064	
CAPÍTULO 5	55
ANÁLISE COMPARADA DE UM AGREGADO DE ESCÓRIA DE ACIARIA COMO MATERIAL ALTERNATIVO PARA LASTRO DE VIAS FÉRREAS DO TIPO <i>HEAVY HAUL</i> POR MEIO DE ENSAIOS TRIAXIAIS	
Bruno Guimarães Delgado Antônio Viana da Fonseca Eduardo Fortunato Daniela Raquel Ferreira Coelho	
DOI 10.22533/at.ed.3201925065	

CAPÍTULO 6	71
CARACTERIZAÇÃO EM FADIGA POR FLEXÃO ROTATIVA DE FIOS DE ARAME DE SOLDA	
Ingrid Ariani Belineli Barbosa	
Heide Heloise Bernardi	
William Marcos Muniz Menezes	
DOI 10.22533/at.ed.3201925066	
CAPÍTULO 7	80
ESTUDO DA MICROESTRUTURA NA ZONA TERMICAMENTE AFETADA COM A VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS DE SOLDAGEM	
Luís Henrique Pires da Silva	
Alex Sander Chaves da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.3201925067	
CAPÍTULO 8	92
ESTUDO DA USINAGEM DA SUPERLIGA A BASE DE FERRO-NÍQUEL UTILIZANDO FERRAMENTA CERÂMICA	
Eduardo Pires Bonhin	
Sarah David Müzel	
Marcel Yuzo Kondo	
Lúcia de Almeida Ribeiro	
José Vitor Candido de Souza	
Marcos Valério Ribeiro	
DOI 10.22533/at.ed.3201925068	
CAPÍTULO 9	100
CONSTRUÇÃO DE UMA MÁQUINA DE NÉVOA SALINA ATENDENDO AOS REQUISITOS MÍNIMOS CONTIDOS NAS NORMAS ISO 9227 e ASTM B-117	
Leonardo de Souza Coutinho	
Alexandre Alvarenga Palmeira	
DOI 10.22533/at.ed.3201925069	
CAPÍTULO 10	111
MECANIZAÇÃO AGRÍCOLA: COLHEITADEIRAS AXIAIS X RADIAIS	
Filipi José Arantes Lemos	
João Mario Mendes de Freitas	
DOI 10.22533/at.ed.32019250610	
CAPÍTULO 11	127
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA O PROJETO DE MODELOS DE BIELAS E TIRANTES	
Jamile Maria Araujo Tavares	
Rejane Martins Fernandes Canha	
DOI 10.22533/at.ed.32019250611	
CAPÍTULO 12	142
ESTUDO NUMÉRICO DE UM EQUIPAMENTO DE SECAGEM	
Eduardo Dal Piva Schuch	
Magaiver Gabriel Lamp	
Conrado Mendes Morais	
Ângela Beatrice Dewes Moura	
DOI 10.22533/at.ed.32019250612	

CAPÍTULO 13	153
SISTEMA DE AQUECIMENTO DE ÁGUA A COMBUSTÃO DE GASOLINA	
Felipe Michael Grein	
Jean Lucas Pereira	
Luiz Felipe Weck	
Olaf Graupmann	
DOI 10.22533/at.ed.32019250613	
CAPÍTULO 14	156
MODELAGEM DE PID PARA SISTEMA DE CONTROLE DE RAMPAS DE TEMPERATURA EM BRASSAGEM	
Gabriel Queiroz	
Marcelo Barros de Almeida	
Márcio Jose da Cunha	
DOI 10.22533/at.ed.32019250614	
CAPÍTULO 15	168
MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS DINÂMICOS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA	
Lucas Divino Alves	
Neylor Makalister Ribeiro Vieira	
Emerson Paulino dos Reis	
DOI 10.22533/at.ed.32019250615	
CAPÍTULO 16	183
APLICAÇÃO E ANÁLISE VIA MEC EM PROBLEMAS DE TERMOELASTICIDADE 2D	
Luis Vinicius Pereira Silva	
Gilberto Gomes	
João Carlos Barleta Uchôa	
DOI 10.22533/at.ed.32019250616	
CAPÍTULO 17	198
SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA INJEÇÃO DE ÁGUA EM RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO HETEROGÊNEO	
Raquel Oliveira Lima	
José Arthur Oliveira Santos	
Antônio Jorge Vasconcellos Garcia	
Felipe Barreiros Gomes	
DOI 10.22533/at.ed.32019250617	
CAPÍTULO 18	207
TANQUES FLASH: DIMENSIONAMENTO E ANÁLISE DE CUSTOS NO SOFTWARE DE MODELAGEM E SIMULAÇÃO EMSO	
Erich Potrich	
Sérgio Correia da Silva	
Larissa Souza Amaral	
DOI 10.22533/at.ed.32019250618	

CAPÍTULO 19	215
AVALIAÇÃO DO POTENCIAL DE DEPOSIÇÃO ORGÂNICA EM OPERAÇÕES DE MISTURA DE PETRÓLEOS NO TANQUE DE ESTOCAGEM EM REFINARIAS DE PETRÓLEO	
Rosberguer de Almeida Camargo	
Mauren Costa da Silva	
Rafael Beltrame	
Darci Alberto Gatto	
Antônio Carlos da Silva Ramos	
DOI 10.22533/at.ed.32019250619	
CAPÍTULO 20	223
AVALIAÇÃO DE UM SISTEMA EMBARCADO PARA MENSURAR A ILUMINÂNCIA EM UM AVIÁRIO EXPERIMENTAL	
Giovanni Polette Dalla Libera	
Victor Moreira Leão	
Vitor Augusto de Sousa	
Matheus Fernando Lima Zuccherelli de Souza	
Renata Lima Zuccherelli de Oliveira	
Marcelo Eduardo de Oliveira	
Adriano Rogério Bruno Tech	
DOI 10.22533/at.ed.32019250620	
CAPÍTULO 21	230
CONTROLADOR FUZZY SINTONIZADO POR ALGORITMO GENÉTICO EM SISTEMA DE ARMAZENAMENTO DE ENERGIA	
Lenon Diniz Seixas	
Diego Solak Castanho	
Hugo Valadares Siqueira	
Fernanda Cristina Corrêa	
DOI 10.22533/at.ed.32019250621	
CAPÍTULO 22	243
CONTROLADORES ROBUSTO APLICADO A CONVERSORES CC-CC	
Luiz Otávio Limurci dos Santos	
Luiz Antonio Maccari Junior	
DOI 10.22533/at.ed.32019250622	
CAPÍTULO 23	261
PROPOSTA DE PLATAFORMA PARA ESTUDO DE MOTOR A RELUTÂNCIA VARIÁVEL 8/6	
Marcos José de Moraes Filho	
Luciano Coutinho Gomes	
Darizon Alves de Andrade	
Josemar Alves dos Santos Junior	
Wanberton Gabriel de Souza	
Cássio Alves de Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.32019250623	

CAPÍTULO 24	275
ESTUDO COMPARATIVO DE MODELAGENS DE ENROLAMENTOS DE UM TRANSFORMADOR UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISES DE ESFORÇOS ELETROME CÂNICOS	
Pedro Henrique Aquino Barra Arnaldo José Pereira Rosentino Junior Antônio Carlos Delaiba	
DOI 10.22533/at.ed.32019250624	
CAPÍTULO 25	287
PROCEDIMENTO PARA AQUISIÇÃO E PROCESSAMENTO DO LAÇO DE HISTERESE MAGNÉTICA	
Vitor Hörbe Pereira Da Costa Antônio Flavio Licarião Nogueira Leonardo José Amador Salas Maldonado	
DOI 10.22533/at.ed.32019250625	
CAPÍTULO 26	294
SIMULAÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO DE CAMPO E CORRENTE ELÉTRICA EM TECIDOS BIOLÓGICOS	
Guilherme Brasil Pintarelli Afrânio de Castro Antonio Jr. Raul Guedert Sandra Cossul Daniela Ota Hisayasu Suzuki	
DOI 10.22533/at.ed.32019250626	
CAPÍTULO 27	307
SISTEMA DE PRESENÇA UTILIZANDO IDENTIFICAÇÃO POR RADIOFREQUÊNCIA	
Giovani Formaggio Mateus Ricardo Barroso Leite	
DOI 10.22533/at.ed.32019250627	
CAPÍTULO 28	322
SISTEMAS DEFASADORES EM ALTA FREQUÊNCIA UTILIZANDO MICROFITA EM SUBSTRATO FR4	
Jobson De Araújo Nascimento José Moraes Gurgel Neto Alexsandro Aleixo Pereira da Silva Regina Maria de Lima Neta	
DOI 10.22533/at.ed.32019250628	
CAPÍTULO 29	333
ANÁLISES DA RUPTURA EM TRECHO DA BR-060 NO MUNICÍPIO DE ALEXÂNIA, GOIÁS, E CONDIÇÕES APÓS SEIS ANOS DA RECUPERAÇÃO	
Rideci Farias Tiago Matias Lino Haroldo da Silva Paranhos Itamar de Souza Bezerra Ranieri Araújo Farias Dias Alexsandra Maiberg Hausser	
DOI 10.22533/at.ed.32019250629	
SOBRE O ORGANIZADOR	346

MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS DINÂMICOS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

Lucas Divino Alves

Centro Universitário de Formiga – UNIFOR-MG
Formiga-MG

Neylor Makalister Ribeiro Vieira

Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
Belo Horizonte-MG

Emerson Paulino dos Reis

Centro Universitário de Formiga – UNIFOR-MG
Formiga-MG

RESUMO: Neste artigo é proposto, um estudo de exemplos relacionados a modelos matemáticos. São quatro modelos que mostram ao leitor o fenômeno visto através de uma fisionomia diferente, uma essência matemática que visa aguçar o interesse do estudante. Por meio do estudo de cada questão, foi feita uma análise referente ao que era solicitado e o método para se chegar à determinada resposta. Através da resolução dos exercícios buscou-se investigar as variáveis que afetam o problema em questão, e a partir das condições interpretadas foi encontrada uma equação que represente a situação descrita. Com base em suas condições e com um modelo já pronto, concluiu-se que se chegaria à resolução do problema utilizando recursos como a derivada e a integral. A resolução dos exercícios necessitou-se de conhecimentos prévios em algumas

ferramentas de integração, como a regra da substituição e o método do fator integrante. Sendo assim, os exercícios tiveram como foco a prática educativa de ensino-aprendizagem, e possibilitou aos leitores assimilar o mecanismo que consiste em modelar.

PALAVRAS-CHAVE: modelagem, investigar, ensino-aprendizagem

MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC SYSTEMS: A DIDACTIC APPROACH

ABSTRACT: In this article we propose a study of examples related to mathematical models. There are four models that show the reader the phenomenon seen through a different physiognomy, a more mathematical look. Through the study of each question, an analysis was made regarding what was requested and the method to arrive at a certain answer. Through the resolution of the exercises we sought to investigate the variables that affect the problem in question, and from the interpreted conditions an equation that represents the described situation was found. Based on its conditions and with a ready-made model, it was concluded that the problem would be solved using resources such as derivatives and integrals. The resolution of the exercises required previous knowledge in some integration tools, such as the substitution

rule and the integral factor method. Thus, the exercises focused on the educational practice of teaching and learning, and enabled the readers to assimilate the mechanism that consists of modeling.

KEYWORDS: modeling, investigating, teaching-learning.

1 | INTRODUÇÃO

O termo modelagem matemática surgiu há muito tempo e que ao passar dos anos tornou-se extremamente importante para que os fenômenos possam ser compreendidos. Analisar os mecanismos que interferem a vida humana sempre foi um aspecto de grande relevância para a ciência, com isso a modelagem matemática surge como um método numérico para explicar os diversos processos físicos, químicos e biológicos que cercam a humanidade.

Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma base significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. [...] A modelagem matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias. (BIEMBENGUT, 2000, p.12-13).

Para que se possa entender o conteúdo de modelagem o estudo de equações diferenciais é fundamental. Segundo Zill (2011, p. 2) “Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED).” Elas podem ser classificadas pelo tipo, ordem e linearidade. Em sala de aula forma comum de ensinar isso se dá através de uma forma repetitiva e mecanicista.

De acordo com Laudares e Miranda (2007), a construção de conceitos relacionados às áreas nas ciências físicas, químicas, biológicas, econômicas e sociais obtêm-se através de uma quantitativa e qualitativa, beneficiando-se da matemática como ferramenta. Uma possível estratégia que busque despertar o interesse do discente é a incessante busca pela interdisciplinaridade e contextualização como mecanismo de resolução de problemas.

O desenvolvimento de novas teorias matemáticas e suas apresentações como algo acabado e completo acabaram conduzindo seu ensino nas escolas de maneira desvinculada da realidade, e mesmo do processo histórico de construção da matemática. Assim é que um teorema é ensinado, seguindo o seguinte esquema: “enunciado → demonstração → aplicação”, quando de fato o que poderia ser feito é sua construção na ordem inversa (a mesma que deu origem ao teorema), isto é, sua motivação (externa ou não à matemática), a formulação de hipóteses, a validação das hipóteses e novos questionamentos, e finalmente seu enunciado (BASSANEZI, 2002, p. 36).

Conforme defendido por Alves (2006), o ensino das equações diferenciais pode contribuir para o entendimento do conceito de derivada com base no estudo

dos fenômenos científicos, e utilizando-se da taxa de variação para verificar o comportamento destes processos em relação à variável tempo.

Para alguns estudantes, o interesse intrínseco do assunto é motivação suficiente, mas para a maioria, as possíveis aplicações importantes em outros campos é o que faz com que tal assunto valha a pena. Muitos dos princípios, ou leis que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem (BOYCE, DIPRIMA 2006, p.1).

O seguinte trabalho tem por finalidade auxiliar os leitores na compreensão e resolução de exercícios introduzindo o conceito de modelagem matemática e reforçando a relevância do entendimento e solução de problemas principalmente no ramo das engenharias. Visa proporcioná-los, através da análise de problemas, uma forma didática de investigar as variáveis que interferem no sistema e chegar a uma conclusão referente ao que o problema propõe.

Para Bassanezi (2002), a modelagem se inicia com a fase da experimentação, que equivale à obtenção dos dados do problema, para que ela fique bem executada, recomenda-se que o modelador se baseie em um desenho que represente o fenômeno. A segunda fase trata-se da abstração, etapa em que há a seleção de variáveis, verificando quais os elementos que atuam diretamente no problema em questão, logo depois vem a problematização do modelo seguindo uma linguagem matemática, tem se também a formulação de hipóteses em que permite ao pesquisador inferir deduções e finalmente a simplificação que visa simplificar ao máximo o modelo criado, deixando-o o mais simples possível. A quarta etapa é a validação, ou seja, verificar se determinado modelo descreve aquela situação real em questão, caso haja algumas discrepâncias há necessidade de modifica-lo. Logo a modelagem matemática é um mecanismo complexo porem de extrema importância para que se analisem os fenômenos que ocorrem na natureza e possam assim ser entendidos. A Figura 1 exemplifica o processo.

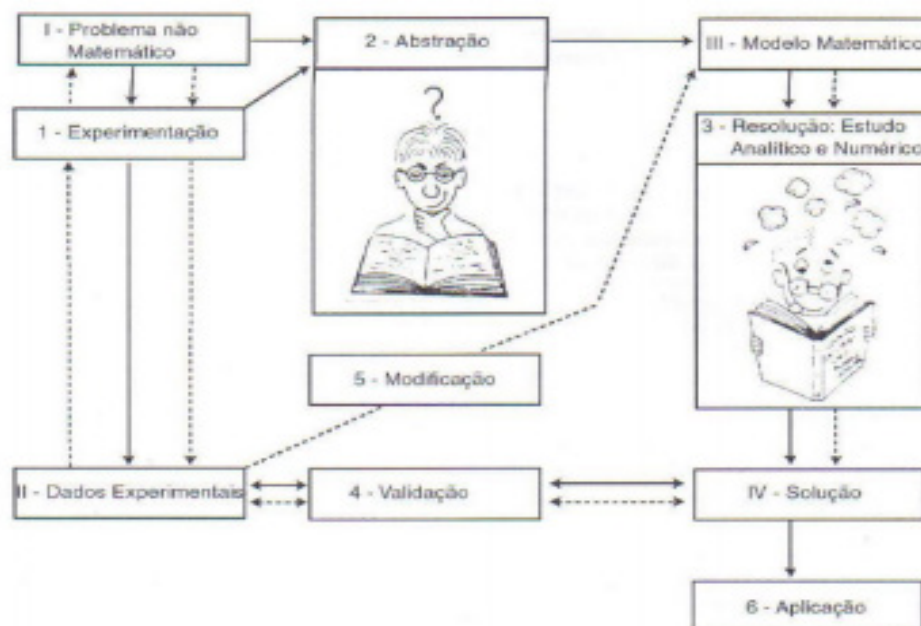


Figura 1 - Processo de Modelagem

2 | MATERIAIS E MÉTODOS

O método utilizado para elaborar o estudo foi a resolução de exercícios que descrevem modelos matemáticos. Trata-se de quatro exemplos que permitem ao leitor ter uma introdução sobre o conteúdo de modelagem matemática. O primeiro exemplo retrata a variação de temperatura sofrida por um termômetro, quando colocado em ambientes diferentes. O segundo exemplo relata o crescimento de uma cidade qualquer, em que, à medida que o tempo vai transcorrendo o número de habitantes cresce. No terceiro exemplo verifica-se o caso de uma mistura de salmoura presente em um tanque e no quarto exemplo verificam-se as forças atuantes no corpo de um paraquedista. Como já se tinha o modelo dos quatro exemplos, somente foi preciso separar as variáveis e realizar o procedimento de integração. Para resolver a integral dos exercícios utilizou-se a regra da substituição e do fator integrante. Como são problemas de valor inicial, por meio das condições que o problema ofereceu foi descoberta uma equação que regia o modelo. Porém no último problema foi feita uma investigação sobre as variáveis que atuam sobre o corpo do paraquedista, logo depois um diagrama de forças representou as forças que atuam sobre o mesmo. A partir disso, encontrou uma equação diferencial de segunda ordem que representa a situação descrita.

3 | RESULTADOS

Propuseram-se a estudar e solucionar quatro exercícios exemplos para que o leitor possa analisar as variáveis que afetam o sistema e entender como ocorre o processo de modelagem.

3.1 Modelo Matemático de Aquecimento e Resfriamento de Newton

Este modelo é definido como: A taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia. Logo, obtêm-se a expressão.

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_M \quad \text{ou} \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_M) \quad (1)$$

Como se trata de taxa deve-se recorrer ao uso da derivada. Sendo assim, empregando o método de separação de variáveis e integrando-a, encontrou-se a equação característica do modelo descrito.

$$\frac{dT}{(T - T_M)} = kdt \quad (2)$$

$$\int \frac{dT}{(T - T_M)} = \int kdt \quad (3)$$

$$\ln |T - T_M| + c_1 = kt + c_2 \quad (4)$$

$$\ln |T - T_M| = kt + c_3 \quad (5)$$

Utilizando as propriedades do logaritmo natural, estabeleceu a seguinte equação.

$$\begin{cases} \ln b = k \\ b = e^k \end{cases} \quad (6)$$

$$T = e^{kt} \cdot c + T_M \quad (7)$$

Na Eq. (7), T, e, k, t, c e T_M, são respectivamente, temperatura do corpo, número de Euler, constante de proporcionalidade, tempo, constante e temperatura do meio.

Em vista disso, para demonstrar sua utilização será mostrado um exercício que relaciona o modelo matemático de aquecimento e resfriamento de Newton.

Situação Problema: Um termômetro é removido de uma sala onde a temperatura ambiente é de 70°F e levado para fora, onde a temperatura é de 10°F. Após meio minuto o termômetro indica 50°F. Qual a leitura do termômetro em t = 1 min? Quanto tempo levará para o termômetro atingir 15°F? (ZILL, D.G. Equações diferenciais: com aplicações em modelagem. 9.ed. Cengage Learning, São Paulo, BRA,93p.,2014.)

Visando utilizar o Sistema Internacional de Unidades (SI), recorreremos a uma fórmula que converta a temperatura de Fahrenheit para Kelvin, de acordo com a Eq. (8). A unidade de medida de tempo no exercício está em minutos, porém será utilizado o segundo para resolução do problema. Para os cálculos considerou-se uma aproximação de quatro casas decimais, após a vírgula.

$$\frac{T_K - 273}{5} = \frac{(T_F - 32)}{9} \quad (8)$$

Na Eq.(8), os termos T_K e T_F referem-se respectivamente à temperatura em Kelvin e graus Fahrenheit. Como o exercício relata temperaturas de 70°F, 10°F, 50°F e 15°F, fazendo o uso da fórmula, elas correspondem respectivamente a 294,1111K, 260,7778K, 283K e 263,5556K. Através da interpretação do problema obtêm-se as seguintes informações:

$$\begin{cases} T_M = 260,7778K \\ T(0) = 294,1111K \\ T(30) = 283K \end{cases} \quad (9)$$

Quando $t = 0$; $T = 294,1111K$. Substituindo em (7)

$$294,1111 = e^{k \cdot 0} \cdot c + 260,7778 \quad (10)$$

$$c = 33,3334 \quad (11)$$

Quando $t = 30s$; $T = 283K$. Substituindo em (7) e usando o valor de c , obtido em (11) tem-se:

$$283 = e^{30k} \cdot 33,3334 + 260,7778 \quad (12)$$

$$\frac{22,2223}{33,3334} = e^{30k} \quad (13)$$

Para descobrir o valor da constante k , deve utilizar as propriedades do logaritmo natural.

$$\ln |22,2223| - \ln |33,3334| = 30k \quad (14)$$

$$3,1011 - 3,5066 = 30k \quad (15)$$

$$k = -0,0135 \quad (16)$$

A expressão que representa este modelo ficaria a seguinte:

$$T(t) = 33,3334e^{-0,0135t} + 260,7778 \quad (17)$$

O exercício em questão deseja saber:

$$\begin{cases} T(60) = ? \\ T(?) = 263,5556 F \end{cases} \quad (18)$$

Utilizando a equação (17), e substituindo os valores:

$$T(60) = 33,3334 \cdot e^{-0,0135 \cdot 60} + 260,7778 \quad (19)$$

$$T(60) = 275,6064 \quad (20)$$

Como o tempo equivale a 60 segundos, obtêm-se uma temperatura de 275,6064K. Agora para descobrir sua segunda condição, basta substituir os dados na equação (17). Assim:

$$263,5556 = 33,3334e^{-0,0135t} + 260,7778 \quad (21)$$

$$\frac{2,7778}{33,3334} = e^{-0,0135t} \quad (22)$$

Utilizando as propriedades do logaritmo natural:

$$\ln|2,7778| - \ln|33,3334| = -0,0135t \quad (23)$$

$$t = 184,0667 \quad (24)$$

Então, para termômetro atingir 263,5556K são necessários 184,0667 segundos.

3.2 Modelo Matemático de Crescimento e Decaimento

O modelo é definido como, a taxa segundo a qual a população cresce ou decresce em determinado instante é proporcional à população total naquele instante. Logo, obtêm-se a seguinte expressão:

$$\frac{dP}{dt} \propto P \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{dt} = kP \quad (25)$$

Como a definição do modelo menciona taxa, há necessidade de uso da derivada. Utilizando o método da separação de variáveis e integrando-a, a equação ficará da seguinte forma:

$$\frac{dP}{P} = kdt \quad (26)$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt \quad (27)$$

$$\ln|P| + c_1 = kt + c_2 \quad (28)$$

$$P = e^{kt} \cdot c \quad (29)$$

Na Eq. (29) os termos P, e, k, t e c são respectivamente, população em determinado instante de tempo, número de Euler, constante de proporcionalidade, tempo e constante. Assim sendo, para demonstrar sua utilização será resolvido um exercício que relaciona o modelo matemático de crescimento e decaimento.

Situação Problema: A população de uma cidade cresce a uma taxa proporcional à população no instante t . A população inicial de 500 indivíduos cresce 15% em 10 anos. Qual será a população em 30 anos? Qual o crescimento populacional em $t=30$? (ZILL, D.G. Equações diferenciais: com aplicações em modelagem. 9.ed. Cengage Learning, São Paulo, BRA, 91p.,2014) Através da interpretação do problema obtêm-se as seguintes informações:

$$\begin{cases} P(0) = 500 \\ P(10) = 500 + (500 \cdot 15\%) \\ P(10) = 575 \end{cases} \quad (30)$$

Quando $P = 500$; $t = 0$. Substituindo-se em (29).

$$500 = e^{k \cdot 0} \cdot c \quad (31)$$

$$c = 500 \quad (32)$$

A partir dessa condição encontra-se a constante c , e quando $P = 575$; $t = 10$. Substituindo-se em (29).

$$575 = e^{10k} \cdot 500 \quad (33)$$

$$\frac{575}{500} = e^{10k} \quad (34)$$

$$1.15 = e^{10k} \quad (35)$$

Para descobrir o valor da constante k utiliza-se as propriedades do logaritmo natural, conforme Eq. (6). Considerando uma aproximação de quatro casas decimais após a vírgula.

$$\ln|1.15| = 10k \quad (36)$$

$$k = 0.0140 \quad (37)$$

A expressão que representa este modelo ficará da seguinte forma:

$$P(t) = 500 \cdot e^{0.0140t} \quad (38)$$

O exercício em questão deseja saber:

$$\begin{cases} P(30) = ? \\ \text{Crescimento em } (t = 30) = P(30) - P(29) \end{cases} \quad (39)$$

Fazendo o uso da equação (38) e substituindo os dados:

$$P(30) = 500 \cdot e^{0.0140 \cdot 30} \quad (40)$$

$$P(30) = 760.9808 \quad (41)$$

Logo, a população dessa cidade daqui a 30 anos será de 760.9808 indivíduos. Agora o exercício deseja encontrar qual foi o crescimento em $t=30$, ou seja, o crescimento que essa cidade teve no ano 30. Assim, utilizará a segunda condição descrita acima.

$$P(29) = 500 \cdot e^{0.0140 \cdot 29} \quad (42)$$

$$P(29) = 750.4013 \quad (43)$$

Como se tem que o crescimento é $P(30) - P(29)$, logo:

$$\text{Crescimento em } (t = 30) = P(30) - P(29) \quad (44)$$

$$\text{Crescimento em } (t = 30) = 760.9808 - 750.4013 \quad (45)$$

Então, houve um crescimento de 10.5795 indivíduos ao longo do ano 30.

3.3 Modelo Matemático de Misturas

Determinado modelo trata-se da análise de duas misturas que se encontram em um tanque. Para que se investigue a concentração das misturas é necessário verificar que existe uma relação descrita pela seguinte fórmula.

$$\frac{dA}{dt} = \text{TAXA DE ENTRADA DE SAL} - \text{TAXA DE SAÍDA DE SAL} \quad (46)$$

Através da fórmula descrita, depreende-se que existe uma taxa, logo, a aplicação da derivada buscará estabelecer as concentrações das misturas analisadas. Situação problema: Um grande tanque é enchido completamente com 500 galões de água pura. Uma salmoura contendo 2 libras por galão é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 5 gal/min. A solução bem misturada é bombeada para fora à mesma taxa. Ache a quantidade $A(t)$ de libras de sal no tanque no instante t . (ZILL, D.G. Equações

diferenciais: com aplicações em modelagem. 9. ed. Cengage Learning, São Paulo, BRA, 93p.,2014) Como o exercício estabelece medidas fora do Sistema Internacional de Unidades (SI), iremos modifica-las. Libra é uma unidade de massa utilizada no sistema inglês de pesos e medidas, e equivale a 0,4536 kg (HALLIDAY, RESNIK, WALKER, 2002). Na resolução do exercício utilizaremos segundos.

Por meio da interpretação do problema às seguintes conclusões.

$$\begin{cases} \text{ENTRADA} = \frac{5 \text{ GALÕES}}{\text{MINUTO}} \cdot \frac{2 \text{ LIBRAS}}{\text{GALÃO}} = \frac{0,0833 \text{ GALÃO}}{\text{SEGUNDO}} \cdot \frac{0,9072 \text{ Kg}}{\text{GALÃO}} \\ \text{SAÍDA} = \frac{5 \text{ GALÕES}}{\text{MINUTO}} \cdot \frac{A}{500 \text{ GALÕES}} = \frac{0,0833 \text{ GALÃO}}{\text{SEGUNDO}} \cdot \frac{A}{500 \text{ GALÃO}} \end{cases} \quad (47)$$

Então se obtêm as seguintes taxas de concentração:

$$\begin{cases} \text{ENTRADA} = \frac{10 \text{ LIBRAS}}{\text{MINUTO}} = \frac{0,0756}{\text{SEGUNDO}} \\ \text{SAÍDA} = \frac{0,0833 \text{ GALÃO}}{\text{SEGUNDO}} \cdot \frac{A}{500 \text{ GALÕES}} = \frac{A}{5000 \text{ SEGUNDOS}} \end{cases} \quad (48)$$

Assim tem-se que:

$$\frac{dA}{dt} = \text{TAXA DE ENTRADA} - \text{TAXA DE SAÍDA} \quad (49)$$

A partir disso obtêm-se a expressão que descreve a situação.

$$\frac{dA}{dt} = 0,0756 - \frac{A}{5000} \quad (50)$$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{5000} = 0,0756 \quad (51)$$

Para resolver tal expressão deve-se utilizar o fator de integração cuja fórmula é a seguinte.

$$\mu = e^{\int P(t)dt} \quad (52)$$

Então o fator de integração ficará da seguinte forma:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{5000} dt} \quad (53)$$

$$\mu = e^{\frac{t}{5000}} \quad (54)$$

Com isso pode utilizar a seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} [e^{\int P(t)dt} \cdot y] = e^{\int P(t)dt} \cdot f(x) \quad (55)$$

Logo:

$$\frac{d}{dt} [A \cdot e^{\frac{t}{5000}}] = 0,0756 \cdot e^{\frac{t}{5000}} \quad (56)$$

Sendo assim, agora integramos os dois lados da expressão descrita:

$$\int \frac{d}{dt} [A \cdot e^{\frac{t}{5000}}] = \int 0,0756 \cdot e^{\frac{t}{5000}} dt \quad (57)$$

A partir de agora se tem duas integrais, sendo que uma é a derivada da integral, diante disso o resultado dessa integração é o próprio termo, já a outra terá de ser resolvida pelo método da substituição.

$$\int 0,0756 e^{\frac{t}{5000}} dt \quad (58)$$

Considerando:

$$u = \frac{t}{5000} \quad e \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{5000} \quad \text{logo } dt = 5000 du \quad (59)$$

Agora fazendo as devidas substituições encontra-se:

$$\int 0,0756 e^u \cdot 5000 du = 0,0756 \cdot 5000 \int e^u du \quad (60)$$

Sendo assim:

$$378e^{\frac{t}{5000}} + c \quad (61)$$

Então, como já se têm as devidas integrais, obtêm-se:

$$A \cdot e^{\frac{t}{5000}} = 378e^{\frac{t}{5000}} + c \quad (62)$$

$$A = \frac{378e^{\frac{t}{5000}}}{e^{\frac{t}{5000}}} + \frac{c}{e^{\frac{t}{5000}}} \quad (63)$$

$$A(t) = 378 + ce^{\frac{-t}{5000}} \quad (64)$$

Na Eq.(64) os termos A, c, e, e t, são respectivamente, concentração em função de um determinado tempo, constante, número de Euler e tempo. Como taxa que entra é a mesma que sai, logo não possui diferença nas concentrações. Com isso no tempo zero, tem-se a seguinte condição $A(0) = 0$, a partir dessa relação encontra-se o valor da constante c. Substituindo a relação descrita em (64) obtêm-se:

$$0 = 378 + ce^{\frac{-0}{5000}} \quad (65)$$

$$c = -378 \quad (66)$$

Logo a equação que representa a situação descrita é a seguinte:

$$A(t) = 378 - 378e^{\frac{-t}{5000}} \quad (67)$$

3.4 Modelo Matemático Queda-livre

Um corpo em queda livre sofre influência da gravidade e da resistência do ar, mediante a isso tais fatores vão interferir na velocidade do objeto. Para que se possa compreender tal situação torna-se necessário desenhar o diagrama de corpo livre para saber quais as forças que atuam sobre o objeto. Para entender determinada situação, analisa-se o seguinte exemplo físico.

Situação Problema: Em certas circunstâncias, um corpo B de massa m em queda como o páraquedista mostrado na figura (Figura 2), encontra resistência do ar proporcional à sua velocidade v. Use a segunda lei de Newton para encontrar a equação diferencial para a velocidade v do corpo em qualquer instante. Lembre-se de que a aceleração é $a = dv/dt$. Suponha neste caso que a direção positiva é para baixo. (CULLEN, M.R.; ZILL, D.G. Equações diferenciais. 3.ed. Person Makron Books, São

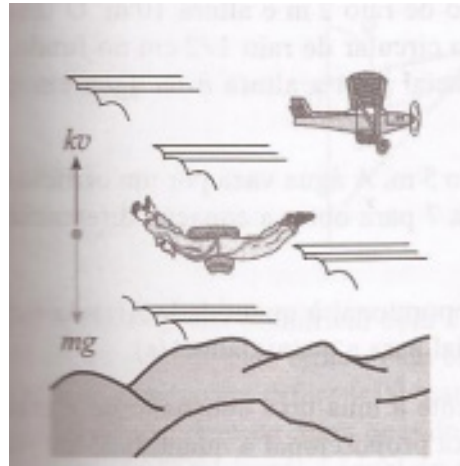


Figura 2 - Paraquedista em queda.

Fonte: Cullen e Zill (2001)

Como a resistência do ar é proporcional à velocidade, então:

$$k \propto V \quad \text{logo} \quad kV \quad (68)$$

Assim, quanto maior é a velocidade(V), maior será a resistência do ar(k). Através da segunda lei de Newton, conhecida como princípio fundamental da Dinâmica, verifica-se que a força resultante que atua sobre um corpo é resultado da multiplicação da massa do corpo por sua aceleração.

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a} \quad (69)$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \quad (70)$$

Na Eq. (70), a aceleração é representada como a derivada da velocidade em um determinado intervalo de tempo. A figura (figura 3) representa a análise das forças atuantes no paraquedista.

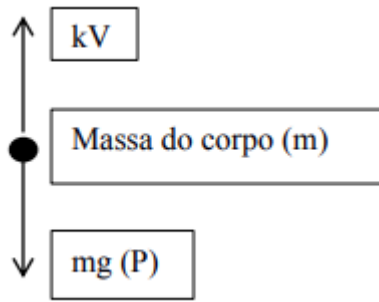


Figura3 – Diagrama de Forças

Fonte: Próprio autor (2018)

$$F_R = mg - kV \quad (71)$$

$$ma = mg - kV \quad (72)$$

$$ma + kV = mg \quad (73)$$

Por meio da análise dos vetores do Diagrama de forças da Figura 3, apresenta-se uma equação que caracteriza a situação referida. A Eq. (71) retrata a Força resultante como sendo a diferença entre o produto da massa e gravidade, pelo produto da resistência do ar e velocidade. Na Eq. (73) há uma substituição da termo F_R , pois se sabe que força resultante equivale ao produto da massa pela aceleração. Conforme $a = dV/dt$, substituindo:

$$m \frac{dV}{dt} + kV = mg \quad (74)$$

$$g = \frac{m}{m} \frac{dV}{dt} + \frac{kV}{m} \quad (75)$$

Portanto a equação diferencial que descreve a situação problema é a seguinte:

$$g = \frac{dV}{dt} + \frac{kV}{m} \quad (76)$$

Na Eq. (76) o termos g , dV/dt , k , V e m , equivalem a respectivamente, gravidade, derivada da velocidade em função do tempo (que representa a aceleração), resistência do ar, velocidade e massa.

4 | CONCLUSÃO

Através dos problemas propostos percebe-se que a modelagem matemática

é essencial para que os processos possam ser compreendidos. É uma ferramenta numérica que busca auxiliar, por intermédio de cálculos, a solução do sistema em questão. Através disso, a resolução dos exercícios feita de forma passo a passo objetiva propiciar um melhor entendimento, facilitando assim o aprendizado. Foram selecionados exercícios referentes à questão de transferência de calor (análise da temperatura do corpo), crescimento populacional, um exemplo químico relacionado com o fator de misturas e por fim foi feita uma investigação em relação às variáveis que atuam em um corpo em queda. Muitos alunos possuem a dificuldade em entender o que está ocorrendo no sistema, visto que a metodologia empregada em sala de aula é feita de maneira mecanicista e repetitiva. Então, determinado artigo teve o objetivo de explicar como reproduzir um modelo e resolvê-lo, de forma simples e abordando todos os passos ao longo de sua resolução. Portanto é muito importante entender os fatores que afetam o sistema e buscar métodos para solucioná-lo, assim o estudo da modelagem deseja despertar o gosto investigativo pelo modo como ocorrem os fenômenos.

5 | AUTORIZAÇÃO/RECONHECIMENTO

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo das informações contidas neste artigo.

REFERÊNCIAS

- ALVES, M.B. **Equações diferenciais ordinárias em cursos de licenciatura de matemática: formulação, resolução de problemas e introdução à modelagem matemática**. 2008. 90p. Mestrado Profissional (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte,2008.Disponível em: Acesso em: 6 mai. 2017.
- BASSANEZI, C.R. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Contexto, São Paulo, BRA, 2002.
- BIEMBENGUT, M.S. **Modelagem matemática no ensino**. Contexto, São Paulo, BRA, 2000
- BOYCE, W.E.; DIPRIMA. R.C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8.ed. LTC, Rio de Janeiro, BRA, 2006.
- CULLEN, M.R.; ZILL, D.G. **Equações diferenciais**. 3.ed. Person Makron Books, São Paulo, BRA, 2001.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**. 6.ed. LTC, Rio de Janeiro, BRA, 2002.
- LAUDARES, J.B; MIRANDA, D.F. **Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.9, n.1, p.103-120, 2007. Disponível em: Acesso em: 23 ago. 2018.
- ZILL, D.G. **Equações diferenciais: com aplicações em modelagem**. 9.ed. Cengage Learning, São Paulo,BRA, 2017.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-432-0

