

**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
E SUAS TECNOLOGIAS 4**

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Atena
Editora

Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 4

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof^a Dr^a Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof.^a Dr.^a Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Dr.^a Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.^a Dr.^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof.^a Dr.^a Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof.^a Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

| Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG) | |
|---|---|
| E24 | Educação matemática e suas tecnologias 4 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 4) Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-350-7 DOI 10.22533/at.ed.507192405 1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série. CDD 510.7 |
| Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422 | |

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| CAPÍTULO 1 | 1 |
| CONSTRUÇÕES MATEMÁTICAS COM GEOGEBRA: ALÉM DO DESENHO | |
| Deire Lúcia de Oliveira | |
| DOI 10.22533/at.ed.5071924051 | |
| CAPÍTULO 2 | 13 |
| MATERIAL POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO COM O USO DA LOUSA DIGITAL PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM | |
| José Roberto da Silva | |
| Maria Aparecida da Silva Rufino | |
| Celso Luiz Gonçalves Felipe | |
| DOI 10.22533/at.ed.5071924052 | |
| CAPÍTULO 3 | 25 |
| O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO PROPORCIONAL NAS ESCOLAS PAROQUIAIS LUTERANAS DO SÉCULO XX NO RIO GRANDE DO SUL | |
| Malcus Cassiano Kuhn | |
| DOI 10.22533/at.ed.5071924053 | |
| CAPÍTULO 4 | 43 |
| O ENSINO DA MATEMÁTICA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE DO PERFIL DOS PROFESSORES DA CIDADE DE CAJAZEIRAS-PB | |
| Francisco Aureliano Vidal | |
| Waléria Quirino Patrício | |
| DOI 10.22533/at.ed.5071924054 | |
| CAPÍTULO 5 | 53 |
| FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA PARA O USO DE SOFTWARES EM SALA DE AULA | |
| Ailton Durigon | |
| Andrey de Aguiar Salvi | |
| Bruna Branco | |
| Marcelo Maraschin de Souza | |
| DOI 10.22533/at.ed.5071924055 | |
| CAPÍTULO 6 | 61 |
| ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS EM PESQUISAS DE OPINIÃO | |
| Felipe Júnio de Souza Oliveira | |
| DOI 10.22533/at.ed.5071924056 | |
| CAPÍTULO 7 | 79 |
| OS DESAFIOS DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INCLUSIVA: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA | |
| Cíntia Moralles Camillo | |
| Liziany Muller | |
| DOI 10.22533/at.ed.5071924057 | |

| | |
|---|------------|
| CAPÍTULO 8 | 87 |
| UM OLHAR SOBRE A FACE OCULTA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA ENVOLVENDO SISTEMAS LINEARES | |
| Wagner Gomes Barroso Abrantes Tula Maria Rocha Morais Luiz Gonzaga Xavier de Barros | |
| DOI 10.22533/at.ed.5071924058 | |
| CAPÍTULO 9 | 97 |
| UM MÉTODO PARA FACILITAR A RESOLUÇÃO DE DETERMINANTES | |
| Fernando Cezar Gonçalves Manso Diego Aguiar da Silva Flávia Aparecida Reitz Cardoso | |
| DOI 10.22533/at.ed.5071924059 | |
| CAPÍTULO 10 | 111 |
| UTILIZAÇÃO DE TÉCNICAS DE INTELIGÊNCIA COMPUTACIONAL PARA CARACTERIZAR PACIENTES CARDIOPATAS | |
| Juliana Baroni Azzi Robson Mariano da Silva | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240510 | |
| CAPÍTULO 11 | 122 |
| UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: AS QUATRO DIMENSÕES DA ÁLGEBRA E O USO DO GEOGEBRA PARA ANÁLISE DOS SIGNIFICADOS DAS RELAÇÕES ALGÉBRICAS NAS PARÁBOLAS | |
| Sarah Raphaele de Andrade Pereira Lúcia Cristina Silveira Monteiro | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240511 | |
| CAPÍTULO 12 | 132 |
| SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA: UM EXPERIMENTO COM NÚMEROS DECIMAIS E O TEMA TRANSVERSAL TRABALHO E CONSUMO COM ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL | |
| Rosana Pinheiro Fiuza Claudia Lisete Oliveira Groenwald | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240512 | |
| CAPÍTULO 13 | 145 |
| CONTEÚDOS ALGÉBRICOS DA PROVA DE MATEMÁTICA DO “NOVO ENEM” | |
| Alan Kardec Messias da Silva Acelmo de Jesus Brito Luciana Bertholdi Machado Marcio Urel Rodrigues | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240513 | |
| CAPÍTULO 14 | 157 |
| EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CRIATIVIDADE: UMA ABORDAGEM A PARTIR DA PERSPECTIVA DE SISTEMAS DE CRIATIVIDADE | |
| Cleyton Hércules Gontijo | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240514 | |

| | |
|---|------------|
| CAPÍTULO 15 | 164 |
| LINGUAGEM, IMAGENS E OS CONTEXTOS VISUAIS E FIGURATIVOS NA CONSTRUÇÃO DO SABER MATEMÁTICO QUE NORTEIAM OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA | |
| Alexandre Souza de Oliveira | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240515 | |
| CAPÍTULO 16 | 176 |
| LETRAMENTO ESTATÍSTICO NO ENSINO MÉDIO: ESTRUTURAS POSSÍVEIS NO LIVRO DIDÁTICO | |
| Laura Cristina dos Santos | |
| Cileda de Queiroz e Silva Coutinho | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240516 | |
| CAPÍTULO 17 | 184 |
| UM ESTADO DA ARTE DE PESQUISAS ACADÊMICAS SOBRE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (DE 1979 A 2015) | |
| Maria Rosana Soares | |
| Sonia Barbosa Camargo Iglioni | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240517 | |
| CAPÍTULO 18 | 195 |
| SCRATCH: DO PRIMEIRO OLHAR À PROGRAMAÇÃO NO ENSINO MÉDIO | |
| Taniele Loss Nesi | |
| Renata Oliveira Balbino | |
| Marco Aurélio Kalinke | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240518 | |
| CAPÍTULO 19 | 205 |
| OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM DISPONÍVEIS NO BANCO INTERNACIONAL DE OBJETOS EDUCACIONAIS PARA TRIGONOMETRIA EM TODOS OS NÍVEIS DE ENSINO | |
| Erica Edmajan de Abreu | |
| Mateus Rocha de Sousa | |
| Felícia Maria Fernandes de Oliveira | |
| Edilson Leite da Silva | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240519 | |
| CAPÍTULO 20 | 216 |
| MODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS REALIZADOS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL | |
| Milena Schneider Pudelco | |
| Tania Teresinha Bruns Zimer | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240520 | |
| CAPÍTULO 21 | 226 |
| O PACTO NACIONAL PELA ALFABETIZAÇÃO NA IDADE CERTA (PNAIC): FORMAÇÃO E PRÁTICA DOS PROFESSORES ALFABETIZADORES NO ENSINO DA MATEMÁTICA PARA ALUNOS SURDOS | |
| Renata Aparecida de Souza | |
| Maria Elizabete Rambo Kochhann | |
| Nilce Maria da Silva | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240521 | |

| | |
|--|------------|
| CAPÍTULO 22 | 236 |
| INVESTIGANDO CONCEPÇÕES E EXPLORANDO POTENCIALIDADES NUMA OFICINA REALIZADA COM A CALCULADORA CIENTÍFICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO | |
| José Edivam Braz Santana Kátia Maria de Medeiros | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240522 | |
| CAPÍTULO 23 | 248 |
| O QUE REVELAM AS PESQUISAS REALIZADAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA | |
| Francisco de Moura e Silva Junior | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240523 | |
| CAPÍTULO 24 | 259 |
| NÚMEROS NEGATIVOS E IMPRENSA NO BRASIL: AS DISCUSSÕES NO PERIÓDICO <i>UNIÃO ACADÊMICA</i> | |
| Wanderley Moura Rezende Bruno Alves Dassie | |
| DOI 10.22533/at.ed.50719240524 | |
| SOBRE O ORGANIZADOR | 268 |

UM MÉTODO PARA FACILITAR A RESOLUÇÃO DE DETERMINANTES

Fernando Cezar Gonçalves Manso

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Campo Mourão – Paraná

Diego Aguiar da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Campo Mourão – Paraná

Flávia Aparecida Reitz Cardoso

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Campo Mourão – Paraná

A METHOD TO FACILITATE THE RESOLUTION OF DETERMINANTS

ABSTRACT: This study aims to present another way to solve determinants. The method is from Laplace and can be seen as a generalization of the cofactors method for calculating determinants or the method of cofactors as a particular case of this method, which is when we fix only 1 value for i or j . Didactically enables more direct calculations. Computationally is a better algorithm because it allows, for matrices of the same order, a smaller number of calculations. The method is well operative until determinant of matrix of order 6 and can extend to matrices of order 8. From $n > 8$ it is necessary computational calculations.

KEYWORDS: Mathematical resolution methods. Algorithms. Determinants.

RESUMO: Este estudo objetiva apresentar uma outra forma para resolver determinantes. O método é de Laplace e pode ser visto como uma generalização do método dos cofatores para cálculo de determinantes ou o método dos cofatores como um caso particular desse método, qual seja quando fixamos apenas 1 valor para i ou j . Didaticamente possibilita cálculos mais diretos. Computacionalmente é um algoritmo melhor pois possibilita, para matrizes de mesma ordem, um número menor de cálculos. O método é bem operacional até determinante de matriz de ordem 6 podendo se estender até matrizes de ordem 8. A partir de $n > 8$ faz-se necessário cálculos computacionais.

PALAVRAS-CHAVE: Métodos de resolução matemática. Algoritmos. Determinantes.

1 | INTRODUÇÃO

A história mostra que o início do estudo das Matrizes e Determinantes se deu pelos chineses por volta do século II a. C.. Entretanto, existem vestígios de estudos feitos pelos babilônios por volta do século IV a. C. que retratam a melhoria do manejo de terras com o intuito de aumentar a produção, e é nesse período que surgiram então os primeiros problemas

com duas incógnitas. Somente mais tarde, os chineses, com seu grande interesse pelos diagramas, introduziram os sistemas de equações com duas ou três variáveis, que podem ser vistos no livro (de autor desconhecido) “Nove Capítulos sobre a Arte Matemática”. Em suas explicações, fazem o uso de métodos surpreendentes, à frente de sua época, que muito se assemelham dos métodos atuais de resolução, ajustando os coeficientes do sistema de n equações lineares em n incógnitas formando uma tabela (Boyer, 1974). Um problema comum, do livro chinês, é o que segue:

Há três quantidades de grãos, das quais três fardos do primeiro tipo, dois do segundo e um do terceiro fazem 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de grãos estão contidas em um fardo de cada quantidade?

A partir deste livro, os estudos voltados às Matrizes e Determinantes só foram formalmente retomados a partir do século XVII, no Oriente, pelo maior matemático da época, o japonês SekiKowa (1642 - 1708), que resgatou as ideias chinesas e as sistematizou, mostrando os determinantes e como resolvê-los associando a um quadrado de números. A partir disto, com todo contexto de revolução intelectual da época, foi desencadeada a curiosidade de muitos matemáticos. Quase que ao mesmo tempo, agora no Ocidente, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1760) em seu trabalho, por meio de determinantes, explicou como resolver um sistema de equações. Em 1750, Gabriel Cramer (1704 - 1752), estabeleceu uma regra geral para resolver sistemas de equações de x incógnitas por x variáveis. Porém, foi o francês Alexandre-Theóphile (1735 - 1793) que propôs a notação mais apropriada e completa sugerida até então, sendo o primeiro a separar o determinante do estudo de sistemas lineares, usando-os apenas como resolução destes. No ano seguinte, Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) descreveu seu importante teorema que permite a expansão através dos menores, e Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), em 1773, também descreveu um método para o desenvolvimento de determinantes. O francês Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) estabeleceu o termo que conhecemos como determinante, em 1812, em um artigo e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes (Muir, 1930).

A consolidação dos estudos sobre determinantes ocorreu com o trabalho de Carl Gustav Jakob Jacobi (1804 - 1857), que tornou a notação mais simples. As matrizes (sim, as matrizes surgiram depois dos determinantes) e suas propriedades algébricas aparecem pela primeira vez apenas em 1839, apesar de se organizar, atualmente, as matrizes como conceito anterior ao estudo de determinantes (Muir, 1930).

2 | MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Tradicionalmente, os métodos de resolução dos determinantes são dados pelo Teorema de Laplace, Regra de Chió, Regra de Sarrus, Regra de Cramer, Método do

Escalonamento e Método de Dodgson, conforme desenvolvimento a seguir.

2.1 Teorema de Laplace

Astrônomo e matemático francês, Marquês de Pierre Simon de Laplace nasceu na localidade de Beumont-en-Auge, Província da Normandia em 28 de março de 1749. Formulou um importante método para resolver determinantes, o teorema de Laplace, que, utilizando o conceito do cofator, conduz o cálculo dos determinantes para regras que se aplicam a quaisquer matrizes quadradas de ordem $n \geq 2$ (Dante, 2009).

O método dos cofatores consiste em escolher uma das filas (linha ou coluna) da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores. O método pode ser considerado proveitoso para matrizes de ordem maior ou igual a 4, pelo fato de haver métodos mais eficientes para matrizes quadradas de ordem menores a estas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Tomando-se a primeira coluna, tem-se que $\det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$, no qual A_{ij} é o cofator do elemento a_{ij} e sua representação final é dada por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplificando-se, toma-se uma matriz de ordem 4 na qual será aplicado o método dos cofatores para encontrar o seu determinante:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De acordo com o método, devemos escolher uma fila (linha ou coluna) para calcular o determinante. Vamos utilizar a primeira coluna:

$$\det C = (2)A_{11} + (0)A_{21} + (3)A_{31} + (1)A_{41}$$

Precisamos então encontrar os valores dos cofatores:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11}$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = 1 \cdot 3$$

$$A_{11} = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot D_{31}$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = 1 \cdot 1$$

$$A_{31} = 1$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot D_{41}$$

$$A_{41} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{41} = (-1) \cdot (-27)$$

$$A_{41} = 27$$

Sendo assim, pelo método dos cofatores, o determinante da matriz C é dado pela seguinte expressão:

$$\det C = (2)A_{11} + (0)A_{21} + (3)A_{31} + (1)A_{41}$$

$$\det C = (2)3 + (0)A_{21} + (3)1 + (1)27$$

$$\det C = 36$$

Não foi preciso calcular o cofator do elemento da matriz que era igual a zero, afinal, ao multiplicar o cofator, o resultado seria zero de qualquer forma. Diante disso, quando se depara com matrizes que possuem muitos zeros em alguma de suas filas, a utilização do método dos cofatores se torna interessante, pois não será necessário calcular diversos termos.

2.2 Regra de Sarrus

O matemático Pierre Frédéric Sarrus (1789-1861), nascido em Saint-Affrique, foi responsável pela regra utilizada no cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem 3. Sua aplicação permite o cálculo de maneira prática, relacionando a diagonal principal com a diagonal secundária.

O método consiste inicialmente em repetir as duas primeiras colunas ao lado da terceira, afim de obter a soma do produto dos elementos da diagonal principal com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve proceder com um sinal positivo). Por fim, deve-se obter a soma do produto dos elementos da diagonal secundária com os dois produtos obtidos pela

multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve proceder com um sinal negativo).

Assim, para matrizes de ordem maior que 3, deve-se empregar o método dos cofatores para chegar a determinantes de ordem 3 e depois aplicar a regra de Sarrus (Dante, 2009).

Dado o determinante de ordem 3x3, veja como aplicar a Regra de Sarrus.

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Repete-se as duas primeiras colunas:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Multiplicam-se os elementos das diagonais secundárias e os elementos das diagonais principais. Sendo que os produtos das diagonais secundárias devem ter seus sinais invertidos, ficando da seguinte forma o valor numérico desse determinante:

$$\det C = -2 + 6 - 5$$

$$\det C = -1$$

Todos os determinantes de ordem 3 serão resolvidos seguindo esse mesmo processo.

2.3 Regra de Chió

Felice Chió, (1813-1871) foi um matemático e político italiano. Sua regra, (a regra de Chió) proporciona calcular o determinante de uma matriz de ordem $n - 1$ por meio de uma matriz de ordem $n - 1$ (isto é, uma ordem abaixo). Há uma condição importante para a aplicação do processo da regra de Chió, o primeiro elemento da matriz, o elemento a_{11} deve corresponder ao a_{11} . Assim se faz possível aplicar o processo da regra de Chió primeiramente suprimindo a primeira linha e a primeira coluna da matriz, e dos elementos que restaram na matriz, subtrai-se o produto dos dois elementos suprimidos (um da linha e o outro da coluna) correspondente a este elemento restante e, por fim, obtém-se uma nova matriz, com ordem menor, mas com determinante igual à matriz original (Dantes, 2009).

Para uma melhor compreensão destes passos, vejamos um exemplo utilizando o processo da regra de Chió.

$$A_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Temos uma matriz quadrada de ordem 5. Sabemos que não é possível aplicar

a regra de Sarrus para calcular este determinante, com isso buscaremos baixar a ordem desta matriz. Desse modo, a fim de encontrar seu valor, utilizaremos alguma propriedade de determinantes.

Veja que o primeiro elemento da matriz equivale a_1 ($a_{11} = 1$), logo, é possível aplicar a regra de Chió. Façamos o procedimento:

$$A_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Destacamos os elementos que serão suprimidos; agora iremos montar a nossa matriz de menor ordem seguindo o segundo passo da regra:

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 3 - 1.2 & 7 - 1.5 & 3 - 1.3 & 4 - 1.2 \\ 5 - 0.2 & 2 - 0.5 & 2 - 0.3 & 1 - 0.2 \\ 3 - 1.2 & 0 - 1.5 & 1 - 1.3 & 2 - 1.2 \\ 6 - 0.2 & 7 - 0.5 & 4 - 0.3 & 7 - 0.2 \end{bmatrix}. \text{ Subtraindo os elementos suprimidos:}$$

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}. \text{ Note que podemos utilizar a regra de Chió novamente:}$$

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 - 5.2 & 2 - 5.0 & 1 - 5.2 \\ -5 - 1.2 & -2 - 1.0 & 0 - 1.2 \\ 7 - 6.2 & 4 - 6.0 & 7 - 6.2 \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -9 \\ -7 & -2 & -2 \\ -5 & 4 & -5 \end{bmatrix}. \text{ Nesta matriz de ordem 3 podemos utilizar Sarrus.}$$

De tal modo, obtemos o determinante da matriz inicial $A_{5 \times 5}$. Note que nenhuma das matrizes é igual, mas, pela regra de Chió, podemos afirmar que o determinante de todas elas é o mesmo.

$$\det A_{3 \times 3} = 148$$

$$\det A_{5 \times 5} = \det A_{4 \times 4} = \det A_{3 \times 3} = 148$$

Podemos verificar que a regra Chió foi aplicada duas vezes, mas isso foi porque o primeiro elemento era igual a 1. Em casos em que o elemento não seja igual a 1, podemos aplicar algumas propriedades de determinantes de forma a encontrar uma matriz em que o primeiro elemento seja igual a 1.

2.4 Regra de Cramer

Diante da relação existente entre um sistema linear e uma matriz, o matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752) desenvolveu um método de resolução de sistemas

envolvendo as propriedades das matrizes e dos determinantes (Dante, 2009).

A regra de Cramer afirma que os valores das incógnitas de um sistema linear são dados por frações no qual o denominador é o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas e o numerador é o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas após a troca de cada coluna pela coluna que representa os termos independentes do sistema. O cálculo é compreendido nos seguintes passos:

- Escrever a matriz que representa os coeficientes das incógnitas e obter seu determinante.
- Excluir a primeira coluna da matriz dos coeficientes das incógnitas e substituí-la pelos termos independentes do sistema.
- Calcular o determinante.
- Repetir o mesmo procedimento para a segunda e terceira coluna da matriz dos coeficientes das incógnitas;
- Calcular o conjunto solução do sistema.

Para exemplificar, temos:

Dado o sistema, encontrar sua solução utilizando a regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + 2z = 12, \\ x - y - 3z = -16 \end{cases}$$

primeiro, devemos escrever a matriz que representa os coeficientes das incógnitas e obter seu determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12.$$

Em seguida, devemos excluir a primeira coluna da matriz dos coeficientes das incógnitas e substituí-la pelos termos independentes do sistema 12, 12 e -16, e calcular o determinante.

$$A_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 12 & -1 & 2 \\ -16 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 & 12 & 1 \\ 12 & -1 & 2 & 12 & -1 \\ -16 & -1 & -3 & -16 & 1 \end{vmatrix} = 36$$

Agora, fazemos o mesmo com a segunda coluna da matriz dos coeficientes das

incógnitas.

$$A_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 1 & -16 & -3 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante dessa matriz, obtemos:

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 12 & 2 & 2 & 12 \\ 1 & -16 & -3 & 1 & -16 \end{vmatrix} = 48.$$

Repetindo o mesmo procedimento para a terceira coluna da matriz dos coeficientes das incógnitas, obtemos:

$$A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 12 \\ 1 & -1 & -16 \end{vmatrix}.$$

Fazendo o cálculo do determinante, teremos:

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 12 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -16 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 60.$$

Segundo a regra de Cramer, temos que:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{36}{12} = 3$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{48}{12} = 4$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{60}{12} = 5$$

Assim, o conjunto solução do sistema é $S = \{(3, 4, 5)\}$.

2.5 Método de Dodgson

O matemático inglês Charles L. Dodgson (1832-1898), também conhecido pelo seu pseudônimo Lewis Carrol (autor do livro “Alice no País das Maravilhas”), propôs um método simétrico e compacto de transformar um determinante de ordem n em determinantes de ordem 2 por meio da manipulação dos elementos da matriz A . Para obter o determinante de uma matriz de ordem 3 com a utilização deste método, temos que dividir pelo termo central da matriz, conforme exemplo a seguir.

Seja

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix},$$

eliminando-se as primeiras e últimas linhas e colunas de A , tem-se:

$$A_{int} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Como o interior de A não possui zeros, é possível realizar a primeira condensação, calculando o determinante dos termos adjacentes:

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \\ \hline \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \\ \hline \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -3 \\ -18 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma que na matriz A inicial, B também possui interior: $B_{int} = 1$. Na sequência, será repetido o processo anterior para baixar a ordem de B e cada termo é dividido pelos respectivos valores do interior de A (A_{int}), efetuando nova condensação, encontrando C .

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{vmatrix} -16 & 1 \\ -18 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & & \\ \hline \begin{vmatrix} -18 & 1 \\ -18 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & & \\ \hline \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -75 & 34 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{-2} & \frac{-2}{-1} \\ \frac{-75}{-5} & \frac{34}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}.$$

Por último, restará a matriz D com uma única entrada, a qual será encontrada calculando o determinante de C .

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 15 & 17 \end{vmatrix} = (13).$$

Portanto, o determinante da matriz A de ordem 4 é igual ao determinante de D dividido pelo interior de B , sendo este o número “sozinho” do processo. Assim,

$$\det(A) = \frac{\det(D)}{B_{int}} = \frac{13}{1} = 13.$$

Charles Dodgson escreve o algoritmo de forma bastante sintetizada, assim:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -16 & 1 & -3 \\ -18 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 15 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= 13.$$

Para entender porque o método funciona é necessária a seguinte definição: Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de ordem n , então sua matriz de cofatores é:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

em que $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$; D_{ij} é o cofator de a_{ij} em A , e D_{ij} é o menor da matriz A eliminando a linha i e a coluna j .

Além desses, existem ainda outros métodos de resolução, como o escalonamento, que não serão abordados nesse estudo.

3 | MÉTODO DE LAPLACE PARA O CÁLCULO DE DETERMINANTES

O método de Laplace para o cálculo de determinantes pode ser visto como uma generalização do método dos cofatores, visto anteriormente. Tal generalização implica dizer que pode-se, por esse método, escolher um número qualquer de filas (linhas ou colunas), não ficando o método restrito à escolha de uma única linha ou uma única coluna, como ocorre no método dos cofatores. Isso dá uma maior operacionalidade ao método, podendo assim ser empregado, com relativa facilidade, para matrizes de ordens maiores, o que seria impraticável pelo método dos cofatores. Manualmente, aplicando-se o método de Laplace, pode-se resolver (com um pouco de trabalho), matrizes de até ordem 8. A partir de $n > 8$ faz-se necessário cálculos computacionais em função do dispendioso trabalho braçal. Computacionalmente falando, o método de Laplace é seguramente mais vantajoso quando comparado ao método dos cofatores.

Assim, considerando que:

$$n$$

$$\text{DET}(A) = \sum (-1)^{\sum i + \sum j} \phi \cdot K$$

$$i = 1$$

ϕ : Determinante de ordem J_f

K : Determinante de ordem $n - J_p$

n : Ordem da matriz

J_f : Número de filas fixadas pelo método de Laplace.

$\Sigma i + \Sigma j$: Soma das posições de linhas e colunas em cada termo considerado.

Iniciaremos com uma matriz de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Obs.: C , calculado ao lado, indica o número de termos que comporão o cálculo do determinante pelo método de Laplace. C , é dado pela combinação de n (ordem da matriz), tomados J_f a J_p ou seja, o número de filas fixadas pelo método. Nesse primeiro caso temos uma combinação de 3 (ordem da matriz), tomados 2 a 2 (número de colunas fixadas, a saber, colunas 1 e 2).

Desse modo, temos:

$$\text{DET}(A) = [(-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} |a_{33}|] + [(-1)^7 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} |a_{23}|] + [(-1)^8 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} |a_{13}|].$$

Obs.: Nesse primeiro exemplo foi fixado as colunas 1 e 2. Assim, Σj será o mesmo para todos os termos, ou seja, $1 + 2 = 3$. O Σi muda de acordo com o termo considerado. Desse modo temos: primeiro termo: linhas 1 e 2, $\Sigma i = 3$, portanto, $\Sigma i + \Sigma j = 6$. O mesmo procedimento aplica-se aos demais termos.

$$\begin{aligned} n &= 3 \\ J_f: J &= 1 & \frac{3}{2}C &= \frac{3!}{1!2!} = 3 \\ J &= 2 \end{aligned}$$

Agora, com uma matriz de ordem 4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} n = 4 \\ J: J = 1 \\ J = 2 \end{array} \quad {}_2^4C = \frac{4!}{2!2!} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{aligned} \text{DET}(A) = & \left[(-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \right] + \left[(-1)^7 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \right] + \\ & \left[(-1)^8 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \right] + \left[(-1)^8 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \right] + \\ & \left[(-1)^9 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \right] + \left[(-1)^{10} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Ordem 5:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} n = 5 \\ J: J=1 \\ J=2 \end{array} \quad {}_2^5C = \frac{5!}{3!2!} = 5 \cdot 2 = 10$$

$$\begin{aligned} \text{DET}(A) = & \left[(-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \right] \\ & + \left[(-1)^7 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \right] \\ & + \left[(-1)^8 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \right] \\ & + \left[(-1)^9 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{51} & a_{52} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \right] \\ & + \left[(-1)^8 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \right] \\ & + \left[(-1)^9 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{41} & a_{42} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \right] \\ & + \left[(-1)^{10} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{51} & a_{52} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \right] \\ & + \left[(-1)^{10} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{41} & a_{42} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \right] \\ & + \left[(-1)^{11} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{51} & a_{52} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \right] \\ & + \left[(-1)^{12} \begin{vmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{51} & a_{52} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} \right] \end{aligned}$$

E, finalmente a demonstração de uma matriz de ordem 6:

$$\begin{aligned}
& + \left[(-1)^{19} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{vmatrix} \right] \\
& + \left[(-1)^{20} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{vmatrix} \right] \\
& + \left[(-1)^{21} \begin{vmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{vmatrix} \right]
\end{aligned}$$

4 | CONCLUSÕES

Esse método pode ser visto como uma generalização do método dos cofatores para cálculo de determinantes ou o método dos cofatores como um caso particular desse método, qual seja quando fixamos apenas 1 valor para i ou j . Desse modo, $\text{DET}(A) = \sum_{\text{TC}} (-1)^{\sum i + \sum j} \cdot f \cdot k$ será igual a $\text{DET}(A) = \sum_{(-1)}^{i+j} a_{ij} \cdot D_{ij}$. Assim como no método de Laplace pode-se fixar quaisquer valores para i ou j . O método apresenta duas vantagens em relação ao método de Laplace:

1. Didaticamente possibilita cálculos mais diretos.
2. Computacionalmente é um algoritmo melhor efetuando, para matrizes de mesma ordem, um número menor de cálculos. O método é bem operacional até determinante de matriz de ordem 6 podendo se estender (com um pouco mais de trabalho) até matrizes de ordem 8. A partir de $n > 8$ faz-se necessário cálculos computacionais.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. (1974). **História da matemática**. 11.ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher.

DANTE, L. R. (2009). **Tudo é matemática**. São Paulo: Ática.

EVES, H. (1995). **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5.ed. Campinas: UNICAMP.

HADLEY, G (1979). **Álgebra linear**. Trad. Francisco R. C. Fernandes. Rio de Janeiro: Forense-Universitária.

MUIR, T. (1930). **Contributions to the history of determinants**. (1900-1920) London and Glasgow: Blackie & Son Limited.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-350-7



9 788572 473507