EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 4

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Atena Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 4

Atena Editora
2019

2019 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E24 Educação matemática e suas tecnologias 4 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 4)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-350-7
DOI 10.22533/at.ed.507192405

1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2.Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2019

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêem contribuir de maneira muito significante para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõe estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 9

UM MÉTODO PARA FACILITAR A RESOLUÇÃO DE DETERMINANTES

Fernando Cezar Gonçalves Manso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campo Mourão – Paraná

Diego Aguiar da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campo Mourão – Paraná

Flávia Aparecida Reitz Cardoso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campo Mourão – Paraná

RESUMO: Este estudo objetiva apresentar uma outra forma para resolver determinantes. O método é de Laplace e pode ser visto como uma generalização do método dos cofatores para cálculo de determinantes ou o método dos cofatores como um caso particular desse método, qual seja quando fixamos apenas 1 valor para *i* ou *j*. Didaticamente possibilita cálculos mais diretos. Computacionalmente é um algoritmo melhor pois possibilita, para matrizes de mesma ordem, um número menor de cálculos. O método é bem operacional até determinante de matriz de ordem 6 podendo se estender até matrizes de ordem 8. A partir de *n* > 8 faz-se necessário cálculos computacionais.

PALAVRAS-CHAVE: Métodos de resolução matemática. Algoritmos. Determinantes.

A METHOD TO FACILITATE THE RESOLUTION OF DETERMINANTS

ABSTRACT: This study aims to present another way to solve determinants. The method is from Laplace and can be seen as a generalization of the cofactors method for calculating determinants or the method of cofactors as a particular case of this method, which is when we fix only 1 value for *i* or *j*. Didatically enables more direct calculations. Computationally is a better algorithm because it allows, for matrices of the same order, a smaller number of calculations. The method is well operative until determinant of matrix of order 6 and can extend to matrices of order 8. From n> 8 it is necessary computational calculations.

KEYWORDS: Mathematical resolution methods. Algorithms. Determinants.

1 I INTRODUÇÃO

A história mostra que o início do estudo das Matrizes e Determinantes se deu pelos chineses por volta do século II a. C.. Entretanto, existem vestígios de estudos feitos pelos babilônios por volta do século IV a. C. que retratam a melhoria do manejo de terras com o intuito de aumentar a produção, e é nesse período que surgiram então os primeiros problemas com duas incógnitas. Somente mais tarde, os chineses, com seu grande interesse pelos diagramas, introduziram os sistemas de equações com duas ou três variáveis, que podem ser vistos no livro (de autor desconhecido) “Nove Capítulos sobre a Arte Matemática”. Em suas explicações, fazem o uso de métodos surpreendentes, à frente de sua época, que muito se assemelham dos métodos atuais de resolução, ajustando os coeficientes do sistema de *n* equações lineares em *n* incógnitas formando uma tabela (Boyer, 1974). Um problema comum, do livro chinês, é o que segue:

> Há três quantidades de grãos, das quais três fardos do primeiro tipo, dois do segundo e um do terceiro fazem 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de grãos estão contidas em um fardo de cada quantidade?

A partir deste livro, os estudos voltados às Matrizes e Determinantes só foram formalmente retomados a partir do século XVII, no Oriente, pelo maior matemático da época, o japonês SekiKowa (1642 - 1708), que resgatou as ideias chinesas e as sistematizou, mostrando os determinantes e como resolvê-los associando a um quadrado de números. A partir disto, com todo contexto de revolução intelectual da época, foi desencadeada a curiosidade de muitos matemáticos. Quase que ao mesmo tempo, agora no Ocidente, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1760) em seu trabalho, por meio de determinantes, explicou como resolver um sistema de equações. Em 1750, Gabriel Cramer (1704 - 1752), estabeleceu uma regra geral para resolver sistemas de equações de *x* incógnitas por *x* variáveis. Porém, foi o francês Alexandre-Theóphile (1735 - 1793) que propôs a notação mais apropriada e completa sugerida até então, sendo o primeiro a separar o determinante do estudo de sistemas lineares, usando-os apenas como resolução destes. No ano seguinte, Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) descreveu seu importante teorema que permite a expansão através dos menores, e Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), em 1773, também descreveu um método para o desenvolvimento de determinantes. O francês Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) estabeleceu o termo que conhecemos como determinante, em 1812, em um artigo e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes (Muir, 1930).

A consolidação dos estudos sobre determinantes ocorreu com o trabalho de Carl Gustav Jakob Jacobi (1804 - 1857), que tornou a notação mais simples. As matrizes (sim, as matrizes surgiram depois dos determinantes) e suas propriedades algébricas aparecem pela primeira vez apenas em 1839, apesar de se organizar, atualmente, as matrizes como conceito anterior ao estudo de determinantes (Muir, 1930).

2 I MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Tradicionalmente, os métodos de resolução dos determinantes são dados pelo Teorema de Laplace, Regra de Chió, Regra de Sarrus, Regra de Cramer, Método do

Escalonamento e Método de Dodgson, conforme desenvolvimento a seguir.

2.1 Teorema de Laplace

Astrônomo e matemático francês, Marquês de Pierre Simon de Laplace nasceu na localidade de Beumont-en-Auge, Província da Normandia em 28 de março de 1749. Formulou um importante método para resolver determinantes, o teorema de Laplace, que, utilizando o conceito do cofator, conduz o cálculo dos determinantes para regras que se aplicam a quaisquer matrizes quadradas de ordem $n \geq 2$ (Dante, 2009).

O método dos cofatores consiste em escolher uma das filas (linha ou coluna) da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores. O método pode ser considerado proveitoso para matrizes de ordem maior ou igual a 4, pelo fato de haver métodos mais eficientes para matrizes quadradas de ordem menores a estas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Tomando-se a primeira coluna, tem-se que det $(A) = a_{11}.A_{11}+a_{21}.A_{21}+a_{31}.A_{31}$ no qual A_{ij} é o cofator do elemento a_{ij} e sua representação final é dada por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\, D_{ij}$$

Exemplificando-se, toma-se uma matriz de ordem 4 na qual será aplicado o método dos cofatores para encontrar o seu determinante:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De acordo com o método, devemos escolher uma fila (linha ou coluna) para calcular o determinante. Vamos utilizar a primeira coluna:

$$\det C = (2)A_{11} + (0)A_{21} + (3)A_{31} + (1)A_{41}$$

Precisamos então encontrar os valores dos cofatores:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.D_{11}$$

$$A_{11} = (-1)^{2}.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = 1.3$$

$$A_{11} = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}.D_{31}$$

$$A_{31} = (-1)^{4}.\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = 1.1$$

$$A_{31} = 1$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1}.D_{41}$$

$$A_{41} = (-1)^{5}.\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{41} = (-1).(-27)$$

$$A_{41} = 27$$

Sendo assim, pelo método dos cofatores, o determinante da matriz *C* é dado pela seguinte expressão:

$$\det C = (2)A_{11} + (0)A_{21} + (3)A_{31} + (1)A_{41}$$

$$\det C = (2)3 + (0)A_{21} + (3)1 + (1)27$$

$$\det C = 36$$

Não foi preciso calcular o cofator do elemento da matriz que era igual a zero, afinal, ao multiplicar o cofator, o resultado seria zero de qualquer forma. Diante disso, quando se depara com matrizes que possuem muitos zeros em alguma de suas filas, a utilização do método dos cofatores se torna interessante, pois não será necessário calcular diversos termos.

2.2 Regra de Sarrus

O matemático Pierre Frédéric Sarrus (1789-1861), nascido em Saint-Affrique, foi responsável pela regra utilizada no cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem 3. Sua aplicação permite o cálculo de maneira prática, relacionando a diagonal principal com a diagonal secundária.

O método consiste inicialmente em repetir as duas primeiras colunas ao lado da terceira, afim de obter a soma do produto dos elementos da diagonal principal com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve proceder com um sinal positivo). Por fim, deve-se obter a soma do produto dos elementos da diagonal secundária com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve proceder com um sinal negativo).

Assim, para matrizes de ordem maior que 3, deve-se empregar o método dos cofatores para chegar a determinantes de ordem 3 e depois aplicar a regra de Sarrus (Dante, 2009).

Dado o determinante de ordem 3x3, veja como aplicar a Regra de Sarrus.

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Repete-se as duas primeiras colunas:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Multiplicam-se os elementos das diagonais secundárias e os elementos das diagonais principais. Sendo que os produtos das diagonais secundárias devem ter seus sinais invertidos, ficando da seguinte forma o valor numérico desse determinante:

$$\det C = -2 + 6 - 5$$

$$\det C = -1$$

Todos os determinantes de ordem 3 serão resolvidos seguindo esse mesmo processo.

2.3 Regra de Chió

Felice Chió, (1813-1871) foi um matemático e político italiano. Sua regra, (a regra de Chió) proporciona calcular o determinante de uma matriz de ordem *n -1* por meio de uma matriz de ordem *n -1* (isto é, uma ordem abaixo). Há uma condição importante para a aplicação do processo da regra de Chió, o primeiro elemento da matriz, o elemento a_{11} deve corresponder ao a_{11}. Assim se faz possível aplicar o processo da regra de Chió primeiramente suprimindo a primeira linha e a primeira coluna da matriz, e dos elementos que restaram na matriz, subtrai-se o produto dos dois elementos suprimidos (um da linha e o outro da coluna) correspondente a este elemento restante e, por fim, obtém-se uma nova matriz, com ordem menor, mas com determinante igual à matriz original (Dantes, 2009).

Para uma melhor compreensão destes passos, vejamos um exemplo utilizando o processo da regra de Chió.

$$A_{5x5} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Temos uma matriz quadrada de ordem 5. Sabemos que não é possível aplicar a regra de Sarrus para calcular este determinante, com isso buscaremos baixar a ordem desta matriz. Desse modo, a fim de encontrar seu valor, utilizaremos alguma propriedade de determinantes.

Veja que o primeiro elemento da matriz equivale a_1 ($a_{11} = 1$), logo, é possível aplicar a regra de Chió. Façamos o procedimento:

$$A_{5x5} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Destacamos os elementos que serão suprimidos; agora iremos montar a nossa matriz de menor ordem seguindo o segundo passo da regra:

$$A_{4x4} = \begin{bmatrix} 3-1.2 & 7-1.5 & 3-1.3 & 4-1.2 \\ 5-0.2 & 2-0.5 & 2-0.3 & 1-0.2 \\ 3-1.2 & 0-1.5 & 1-1.3 & 2-1.2 \\ 6-0.2 & 7-0.5 & 4-0.3 & 7-0.2 \end{bmatrix}. \ Subtraindo\ os\ elementos\ suprimidos:$$

$$A_{4x4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}. \ Note\ que\ podemos\ utilizar\ a\ regra\ de\ Chió\ novamente:$$

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 2-5.2 & 2-5.0 & 1-5.2 \\ -5-1.2 & -2-1.0 & 0-1.2 \\ 7-6.2 & 4-6.0 & 7-6.2 \end{bmatrix}$$

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -9 \\ -7 & -2 & -2 \\ -5 & 4 & -5 \end{bmatrix}. \ Nesta\ matriz\ de\ ordem\ 3\ podemos\ utilizar\ Sarrus.$$

De tal modo, obtemos o determinante da matriz inicial A_{5x5}. Note que nenhuma das matrizes é igual, mas, pela regra de Chió, podemos afirmar que o determinante de todas elas é o mesmo.

$$\det A_{3x3} = 148$$

$$\det A_{5x5} = \det A_{4x4} = \det A_{3x3} = 148$$

Podemos verificar que a regra Chió foi aplicada duas vezes, mas isso foi porque o primeiro elemento era igual a 1. Em casos em que o elemento não seja igual a 1, podemos aplicar algumas propriedades de determinantes de forma a encontrar uma matriz em que o primeiro elemento seja igual a 1.

2.4 Regra de Cramer

Diante da relação existente entre um sistema linear e uma matriz, o matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752) desenvolveu um método de resolução de sistemas envolvendo as propriedades das matrizes e dos determinantes (Dante, 2009).

A regra de Cramer afirma que os valores das incógnitas de um sistema linear são dados por frações no qual o denominador é o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas e o numerador é o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas após a troca de cada coluna pela coluna que representa os termos independentes do sistema. O cálculo é compreendido nos seguintes passos:

a. Escrever a matriz que representa os coeficientes das incógnitas e obter seu determinante.

b. Excluir a primeira coluna da matriz dos coeficientes das incógnitas e substituí-la pelos termos independentes do sistema.

c. Calcular o determinante.

d. Repetir o mesmo procedimento para a segunda e terceira coluna da matriz dos coeficientes das incógnitas;

e. Calcular o conjunto solução do sistema.

Para exemplificar, temos:

Dado o sistema, encontrar sua solução utilizando a regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + 2z = 12 \\ x - y - 3z = -16 \end{cases},$$

primeiro, devemos escrever a matriz que representa os coeficientes das incógnitas e obter seu determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12.$$

Em seguida, devemos excluir a primeira coluna da matriz dos coeficientes das incógnitas e substituí-la pelos termos independentes do sistema 12, 12 e –16, e calcular o determinante.

$$A_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 12 & -1 & 2 \\ -16 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 & 12 & 1 \\ 12 & -1 & 2 & 12 & -1 \\ -16 & -1 & -3 & -16 & 1 \end{vmatrix} = 36$$

Agora, fazemos o mesmo com a segunda coluna da matriz dos coeficientes das incógnitas.

$$A_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 1 & -16 & -3 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante dessa matriz, obtemos:

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 12 & 2 & 2 & 12 \\ 1 & -16 & -3 & 1 & -16 \end{vmatrix} = 48.$$

Repetindo o mesmo procedimento para a terceira coluna da matriz dos coeficientes das incógnitas, obtemos:

$$A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 12 \\ 1 & -1 & -16 \end{vmatrix}.$$

Fazendo o cálculo do determinante, teremos:

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 12 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -16 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 60.$$

Segundo a regra de Cramer, temos que:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{36}{12} = 3$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{48}{12} = 4$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{60}{12} = 5$$

Assim, o conjunto solução do sistema é S = {(3, 4, 5)}.

2.5 Método de Dodgson

O matemático inglês Charles L. Dodgson (1832-1898), também conhecido pelo seu pseudônimo Lewis Carrol (autor do livro “Alice no País das Maravilhas”), propôs um método simétrico e compacto de transformar um determinante de ordem *n* em determinantes de ordem 2 por meio da manipulação dos elementos da matriz *A*. Para obter o determinante de uma matriz de ordem 3 com a utilização deste método, temos que dividir pelo termo central da matriz, conforme exemplo a seguir.

Seja

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix},$$

eliminando-se as primeiras e últimas linhas e colunas de *A*, tem-se:

$$A_{int} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Como o interior de *A* não possui zeros, é possível realizar a primeira condensação, calculando o determinante dos termos adjacentes:

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -3 \\ -18 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma que na matriz *A* inicial, *B* também possui interior: $B_{int} = 1$. Na sequência, será repetido o processo anterior para baixar a ordem de *B* e cada termo é dividido pelos respectivos valores do interior de *A* (A_{int}), efetuando nova condensação, encontrando *C*.

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -16 & 1 \\ -18 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -18 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -75 & 34 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{-2} & \frac{-2}{-1} \\ \frac{-75}{-5} & \frac{34}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}.$$

Por último, restará a matriz *D* com uma única entrada, a qual será encontrada calculando o determinante de *C*.

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 15 & 17 \end{vmatrix} = (13).$$

Portanto, o determinante da matriz *A* de ordem 4 é igual ao determinante de *D* dividido pelo interior de *B*, sendo este o número “sozinho” do processo. Assim,

$$\det(A) = \frac{\det(D)}{B_{int}} = \frac{13}{1} = 13.$$

Charles Dodgson escreve o algoritmo de forma bastante sintetizada, assim:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -16 & 1 & -3 \\ -18 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 15 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= 13.$$

Para entender porque o método funciona é necessária a seguinte definição: Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de ordem n, então sua matriz de cofatores é:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & . & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix},$$

em que $A_{ij} = (-1)i{+}j$; D_{ij} é o cofator de a_{ij} em A, e D_{ij} é o menor da matriz a eliminando a linha i e a coluna j.

Além desses, existem ainda outros métodos de resolução, como o escalonamento, que não serão abordados nesse estudo.

3 I MÉTODO DE LAPLACE PARA O CÁLCULO DE DETERMINANTES

O método de Laplace para o cálculo de determinantes pode ser visto como uma generalização do método dos cofatores, visto anteriormente. Tal generalização implica dizer que pode-se, por esse método, escolher um número qualquer de filas (linhas ou colunas), não ficando o método restrito à escolha de uma única linha ou uma única coluna, como ocorre no método dos cofatores. Isso dá uma maior operacionalidade ao método, podendo assim ser empregado, com relativa facilidade, para matrizes de ordens maiores, o que seria impraticável pelo método dos cofatores. Manualmente, aplicando-se o método de Laplace, pode-se resolver (com um pouco de trabalho), matrizes de até ordem 8. A partir de $n > 8$ faz-se necessário cálculos computacionais em função do dispendioso trabalho braçal. Computacionalmente falando, o método de Laplace é seguramente mais vantajoso quando comparado ao método dos cofatores.

Assim, considerando que:

n

$\mathrm{DET}(A) = \sum(-1)^{\Sigma i + \Sigma j}\ \phi\ .\ K$

$i = 1$

ϕ: Determinante de ordem J_f

K: Determinante de ordem $n - J_f$,

n: Ordem da matriz

J_f: Número de filas fixadas pelo método de Laplace.

$\Sigma i + \Sigma j$: Soma das posições de linhas e colunas em cada termo considerado.

Iniciaremos com uma matriz de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Obs.: C, calculado ao lado, indica o número de termos que comporão o cálculo do determinante pelo método de Laplace. C, é dado pela combinação de n (ordem da matriz), tomados J_f a J_f, ou seja, o número de filas fixadas pelo método. Nesse primeiro caso temos uma combinação de 3 (ordem da matriz), tomados 2 a 2 (número de colunas fixadas, a saber, colunas 1 e 2).

Desse modo, temos:

$$\mathrm{DET}\,(A) = \left[(-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} |a_{33}|\right] + \left[(-1)^7 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} |a_{23}|\right] + \left[(-1)^8 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} |a_{13}|\right].$$

Obs.: Nesse primeiro exemplo foi fixado as colunas 1 e 2. Assim, Σj será o mesmo para todos os termos, ou seja, $1 + 2 = 3$. O Σi muda de acordo com o termo considerado. Desse modo temos: primeiro termo: linhas 1 e 2, $\Sigma i = 3$, portanto, $\Sigma i + \Sigma j = 6$. O mesmo procedimento aplica-se aos demais termos.

$$n = 3 \qquad \qquad {}^{3}_{2}C = \frac{3!}{1!2!} = 3$$
$$J_F : J = 1$$
$$J = 2$$

Agora, com uma matriz de ordem 4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$n = 4$

J_f: $J = 1$ $\quad {}^{4}_{2}C = \frac{4!}{2!2!} = 2.3 = 6$

$J = 2$

$$\text{DET}(A) = \left[(-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\right] + \left[(-1)^7 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\right] +$$

$$\left[(-1)^8 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}\right] + \left[(-1)^8 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\right] +$$

$$\left[(-1)^9 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}\right] + \left[(-1)^{10} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}\right].$$

Ordem 5:

$$\text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

$n = 5$

J_f: $J=1$ $\quad {}^{5}_{2}C = \frac{5!}{3!2!} = 5.2 = 10$

$J=2$

$$\text{DET(A)} = \left[(-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}\right]$$

$$+ \left[(-1)^7 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}\right]$$

$$+ \left[(-1)^8 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}\right]$$

$$+ \left[(-1)^9 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{51} & a_{52} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}\right]$$

$$+ \left[(-1)^8 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}\right]$$

$$+ \left[(-1)^9 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}\right]$$

$$+ \left[(-1)^{10} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{51} & a_{52} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}\right]$$

$$+ \left[(-1)^{10} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}\right]$$

$$+ \left[(-1)^{11} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{51} & a_{52} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}\right]$$

$$+ \left[(-1)^{12} \begin{vmatrix} a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix}\right]$$

E, finalmente a demonstração de uma matriz de ordem 6:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

n = 6

Jr: J=1 $\quad {}^{6}_{3}C = \frac{6!}{3!3!} = 5.4 = 20$

J=2

J=3

$$\begin{aligned}
(A) = {} & \left[(-1)^{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{14}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{15}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{14}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{15}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{16}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{10}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{17}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{18}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{15}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{16}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{17}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{17}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{18}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{19}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{vmatrix}\right] \\
& + \left[(-1)^{18}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}\right]
\end{aligned}$$

$$+\left[(-1)^{19}\begin{vmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\\ a_{61} & a_{62} & a_{63}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{14} & a_{15} & a_{16}\\ a_{24} & a_{25} & a_{26}\\ a_{54} & a_{55} & a_{56}\end{vmatrix}\right]$$
$$+\left[(-1)^{20}\begin{vmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{51} & a_{52} & a_{53}\\ a_{61} & a_{62} & a_{63}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{14} & a_{15} & a_{16}\\ a_{24} & a_{25} & a_{26}\\ a_{44} & a_{45} & a_{46}\end{vmatrix}\right]$$
$$+\left[(-1)^{21}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{42} & a_{43}\\ a_{51} & a_{52} & a_{53}\\ a_{61} & a_{62} & a_{63}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{14} & a_{15} & a_{16}\\ a_{24} & a_{25} & a_{26}\\ a_{34} & a_{35} & a_{36}\end{vmatrix}\right]$$

4 I CONCLUSÕES

Esse método pode ser visto como uma generalização do método dos cofatores para cálculo de determinantes ou o método dos cofatores como um caso particular desse método, qual seja quando fixamos apenas 1 valor para *i* ou *j*. Desse modo, DET(A) = $\Sigma_{TC}\,(-1)^{\Sigma i+\Sigma j}\,.\,f\,.k$ será igual a DET(A) = $\Sigma_{(-1)}{}^{i+j}a_{ij}\,.\,D_{ij}$. Assim como no método de Laplace pode-se fixar quaisquer valores para *i* ou *j*. O método apresenta duas vantagens em relação ao método de Laplace:

1. Didaticamente possibilita cálculos mais diretos.

2. Computacionalmente é um algoritmo melhor efetuando, para matrizes de mesma ordem, um número menor de cálculos. O método é bem operacional até determinante de matriz de ordem 6 podendo se estender (com um pouco mais de trabalho) até matrizes de ordem 8. A partir de $n > 8$ faz-se necessário cálculos computacionais.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. (1974). **História da matemática**. 11.ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher.

DANTE, L. R. (2009). **Tudo é matemática**. São Paulo: Ática.

EVES, H. (1995). **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5.ed. Campinas: UNICAMP.

HADLEY, G (1979). Álgebra **linear**. Trad. Francisco R. C. Fernandes. Rio de Janeiro: Forense-Universitária.

MUIR, T. (1930). **Contributions to the history of determinants**. (1900-1920) London and Glasgow: Blackie & Son Limited.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-350-7
9 788572 473507