

# EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)

 **Atena**  
Editora  
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)

# Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2019 Os Autores  
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora  
Editora Executiva: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira  
Diagramação: Natália Sandrini  
Edição de Arte: Lorena Prestes  
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

## Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

## Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

## Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
E24	Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2)  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-348-4 DOI 10.22533/at.ed.484192405  1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.  CDD 510.7
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
O ALGORITMO ESPECTRAL COMO ALTERNATIVA AO ALGORITMO K-MEANS EM CONJUNTO DE DADOS ARTIFICIAIS	
Luciano Garim Garcia Leonardo Ramos Emmendorfer	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924051</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>16</b>
NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza Hélio Magalhães De Oliveira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924052</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>24</b>
ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924053</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>32</b>
ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA	
Amanda Barretos Lima Garuth Brenda Anselmo Mendes Isabela Geraldo Reghin Rosângela Teixeira Guedes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924054</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>46</b>
DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	
Mariana Coelho Portilho Bernardi Adilandri Mércio Lobeiro Jeferson Rafael Bueno Thiago José Sepulveda da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924055</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>57</b>
MODELO MATEMÁTICO PARA AUXILIAR O PLANEJAMENTO DA MANUTENÇÃO PREVENTIVA DE MOTORES ELÉTRICOS	
Thalita Monteiro Obal Jonatas Santana Obal	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924056</b>	

<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>64</b>
PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE FLUXO EM AQUÍFERO CONFINADO	
<a href="#">João Paulo Martins dos Santos</a> <a href="#">Alessandro Firmiano de Jesus</a> <a href="#">Edson Wendland</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924057</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>83</b>
RESONANT ORBITAL DYNAMICS OF CBERS SATELLITES	
<a href="#">Jarbas Cordeiro Sampaio</a> <a href="#">Rodolpho Vilhena de Moraes</a> <a href="#">Sandro da Silva Fernandes</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924058</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>91</b>
TESTES ADAPTATIVOS ENVOLVENDO O CONTEÚDO DE DERIVADAS: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL	
<a href="#">Patrícia Liane Grudzinski da Silva</a> <a href="#">Claudia Lisete Oliveira Groenwald</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924059</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>104</b>
LOCALIZAÇÃO DE FALTAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO POR ANÁLISE DE SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO	
<a href="#">Danilo Pinto Moreira de Souza</a> <a href="#">Eliane da Silva Christo</a> <a href="#">Aryfrance Rocha Almeida</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240510</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>116</b>
MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA	
<a href="#">Gustavo Henrique Petrolí</a> <a href="#">Norberto Anibal Maidana</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240511</b>	
<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>133</b>
LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO	
<a href="#">Claudio Fuentealba</a> <a href="#">Edelmira Badillo</a> <a href="#">Gloria Sánchez-Matamoros</a> <a href="#">Andrea Cárcamo</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240512</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>143</b>
OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
<a href="#">Márcio Aurélio da Silva</a> <a href="#">Fran Sérgio Lobato</a> <a href="#">Aldemir Ap Cavalini Jr</a> <a href="#">Valder Steffen Jr</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240513</b>	

<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>156</b>
SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY	
Gino Gustavo Maqui Huamán	
Ulcilea Alves Severino Leal	
Geraldo Nunes Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240514</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>164</b>
VALIDAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA O ESCOAMENTO DE GRÃOS DE SOJA	
Rodolfo França de Lima	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Dirceu Lima dos Santos	
Adriano Pilla Zeilmann	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240515</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>181</b>
TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA	
Landy Sosa Moguel	
Guadalupe Cabañas-Sánchez	
Eddie Aparicio Landa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240516</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>192</b>
SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE	
Francisco Helmuth Soares Dias	
Jacques Aveline Loureiro da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240517</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>199</b>
SIMULAÇÃO 3D DO FLUXO DE AR DE UM SISTEMA REAL DE ARMAZENAGEM DE GRÃOS	
Vanessa Faoro	
Rodolfo França de Lima	
Aline Tampke Dombrowski	
Manuel Osório Binelo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240518</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>207</b>
CONTROLE ÓTIMO DO FLUXO DE ÁGUA EM UMA FÔRMA DE GELO	
Xie Jiayu	
João Luis Gonçalves	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240519</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>213</b>
CÓDIGOS CÍCLICOS DEFINIDOS POR ANULAMENTO	
Conrado Jensen Teixeira	
Osnel Broche Cristo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240520</b>	

<b>CAPÍTULO 21</b> .....	<b>216</b>
ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA	
Bruno Carlos Lugão	
Diego Campos Knupp	
Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues	
Antônio José da Silva Neto	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240521</b>	
<b>CAPÍTULO 22</b> .....	<b>225</b>
ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	
Ronaldo Mendes Evaristo	
Kelly Cristiane Iarosz	
Silvio Luiz Thomaz de Souza	
Ricardo Luiz Viana	
Moacir Fernandes de Godoy	
Antonio Marcos Batista	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240522</b>	
<b>CAPÍTULO 23</b> .....	<b>235</b>
CONSTRUÇÃO DE UM AEROMODELO DE MACARRÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA	
Alissan Sarturato Firão	
Ernandes Rocha de Oliveira	
Zulind Luzmarina Freitas	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240523</b>	
<b>SOBRE O ORGANIZADOR</b> .....	<b>239</b>

## ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

### **Amanda Barretos Lima Garuth**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
Cornélio Procópio, UTFPR, amandagaruth@utfpr.  
edu.br.

### **Brenda Anselmo Mendes**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
Cornélio Procópio, UTFPR, brendamendes99@  
hotmail.com.

### **Isabela Geraldo Reghin**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
Cornélio Procópio, UTFPR, reghinisabela@  
hotmail.com.

### **Rosângela Teixeira Guedes**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
Cornélio Procópio, Departamento de Matemática,  
Cornélio Procópio, UTFPR, rtguedes@utfpr.edu.  
br.

**RESUMO:** O objetivo desta pesquisa é apresentar atividades e análise dos conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná do Câmpus de Cornélio Procópio (UTFPR-CP). A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é base para importantes aplicações científicas e tecnológicas na maioria dos campos das ciências pura e aplicada e no entanto, mas nota-se que os alunos apresentam dificuldades no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina, o que acarreta em um alto índice de reprovações e

evasões em cursos de graduação. Pensando nisto, a professora que ministrou a disciplina de Cálculo Diferencial no segundo semestre de 2017 e primeiro semestre de 2018, propôs um Projeto de Extensão, que começou em outubro de 2017 e ainda está em andamento, pautado em construções e animações no Software Geogebra como possibilidade de aprendizagem. Os alunos participantes do Projeto são alunos que estavam cursando ou já haviam cursado a disciplina de Cálculo Diferencial. A metodologia empregada foi análise, construção e animação dos conteúdos de Cálculo Diferencial no Software Geogebra, e os reuniões semanais para o desenvolvimento das atividades no Laboratório de Informática da Matemática (LIM) da UTFPR-CP.

**PALAVRAS-CHAVE:** Álgebra; Aprendizagem; Cálculo Diferencial; Geogebra; Geometria.

### 1 | INTRODUÇÃO

No ambiente educacional uma das grandes buscas dos docentes em relação aos alunos é a aprendizagem. Este processo é complexo, uma vez que o aprender acaba sendo um conjunto de ações, na qual o indivíduo adquire informações, expande as ideias e conceitos, constrói novos significados, para assim utilizar esse conhecimento na resolução de problemas

da vida cotidiana. Na busca de estratégias para compreender as interfaces do processo de ensino e aprendizagem muitos estudiosos têm se dedicado sobre diferentes perspectivas e dentre elas encontra-se a inserção de situações onde o aluno sintá-se motivado a aprender, aproximando os conceitos às situações vivenciadas no cotidiano, tornando a aprendizagem mais relevante e significativa ao aluno. Sendo assim, é possível perceber em encontros e eventos científicos de Educação Matemática que existe, por parte dos professores, uma busca e interesse por materiais, recursos e atividades diversificadas que tornem suas aulas mais atrativas aos olhos dos alunos.

A introdução da Informática na Educação, segundo a proposta de mudança pedagógica, exige formação bastante ampla e profunda dos educadores. Não se trata de criar condições para o professor simplesmente dominar o computador ou o software, mas sim, auxiliá-lo a desenvolver conhecimento sobre o próprio conteúdo e sobre como o computador pode ser integrado no desenvolvimento desse conteúdo. Nesse enfoque, a questão da formação do professor mostra-se de fundamental importância no processo de introdução da Informática na Educação, exigindo soluções inovadoras e novas abordagens que fundamentem os cursos de formação (VALENTE, 2005).

As disciplinas de Matemática são consideradas pelos alunos, mesmo por aqueles que frequentam cursos da área de ciências exatas, como sendo as mais difíceis de suas grades curriculares e, como consequência desta dificuldade, são elas as que geram maiores índices de reprovação. Em particular, nas Universidades, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, propostas nos primeiros e segundos semestres dos cursos tem sido a principal protagonista desses elevados índices de reprovações e evasões estudantis. No entanto, observa-se que o ensino da matemática tem enfrentado dificuldades no que diz respeito ao seu ensino/aprendizagem. Encontrase, na literatura, estudos que buscam entender as razões dessas dificuldades e, ao mesmo tempo, encontrar alternativas que possam contribuir para a aprendizagem dos conteúdos estudados nessas disciplinas (CURY, 2006; FERREIRA & BRUMATTI, 2009 e SILVA & FERREIRA, 2009).

As dificuldades tornam-se bastante visíveis pela referida disciplina, por apresentar um alto grau de abstração e necessidade de representações gráficas e/ou algébricas, motivos esses considerados pelos acadêmicos como sendo difíceis. Dessa maneira, desenvolveu-se nesse Projeto de Extensão a utilização do conceito matemático ligado à tecnologia do Software Geogebra, com o objetivo de auxiliar os acadêmicos na compreensão dos principais conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial, abordando os principais conceitos de funções, limites, derivadas de função de uma única variável real e suas representações gráficas.

## 2 | REFERENCIAL TEÓRICO

A utilização de novas tecnologias como os *softwares* educacionais podem auxiliar na solução de problemas encontrados no âmbito educacional desde o ensino

fundamental ao superior. Os *softwares* matemáticos são apresentados como uma nova proposta pedagógica, utilizados para a motivação da aprendizagem e a participação mais ativa do aluno. O *Geogebra* é um *software* matemático livre, desenvolvido por Markus Hohenwarter no início de 2001 na *University of Salzburg*, na Áustria, para ser utilizado em ambiente de sala de aula, tendo continuidade na *Florida Atlantic University*.

Pelo *Geogebra* se tratar de um *software* livre, os colaboradores podem realizar alterações em seus códigos fontes atualizando ou acrescentando novas ferramentas, a fim de disponibilizarem melhoramentos a todos que o utilizem.

O Cálculo Diferencial e Integral foi desenvolvido por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e por Isaac Newton (1643-1727). O Cálculo Diferencial e Integral tem importância nas diversas ciências, tais como, na matemática pura e aplicada, química, física, engenharias.

O estudante de Cálculo Diferencial e Integral deve ter um conhecimento em certas áreas da matemática, como funções (modular, exponencial, logarítmica, par, ímpar, afim e segundo grau, por exemplo), trigonometria, polinômios, geometria plana, espacial e analítica).

### 3 | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia empregada foi de reuniões semanais realizadas no Laboratório de Informática da matemática (LIM) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná na cidade de Cornélio Procópio (UTFPR-CP), sendo os participantes, alunos que estavam cursando a disciplina de Cálculo Diferencial no segundo semestre de 2017, novos alunos entraram no Projeto no primeiro semestre de 2018 e alguns que já cursaram a disciplina em outros períodos, e a professora coordenadora do Projeto é a mesma da disciplina.

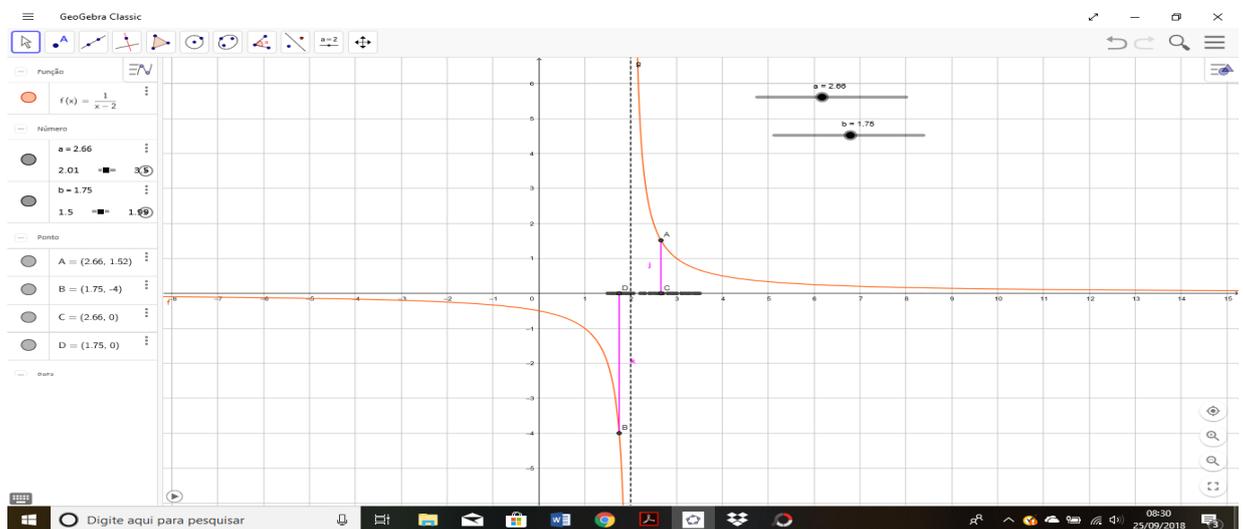
Nessas reuniões desenvolveu-se atividades do conteúdo de Cálculo Diferencial utilizando o Geogebra. Após a construção geométrica e animação das atividades, eram feitas análises e discussões dos resultados. Em seguida, fazia-se as formalizações da definição, teoremas e resultados matemáticos desta disciplina.

Aqui apresentamos algumas das atividades realizadas nesse Projeto de Extensão, apresentando os comandos para serem realizadas as atividades no Geogebra e a formalização dos conteúdos.

#### Atividade 1: Assíntota Vertical

- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = 1/(x-2)$ ;
- Digite na caixa de entrada a reta  $x=2$ (coloque opção tracejado nesta reta);
- Selecione a opção CONTROLE DESLIZANTE e clique sobre a tela, criando o controle deslizante  $2.01 \leq a \leq 3.5$ . Repita o processo e crie o controle deslizante  $1.5 \leq b \leq 1.99$ ;

- Digite na caixa de entrada os pontos  $A = (a, f(a))$  e  $B = (b, f(b))$ ;
- Selecione a opção RETA PERPENDICULAR, clique no ponto A e o eixo x, criando a reta perpendicular g. Da mesma forma, clique sobre o ponto B e o eixo x, criando a reta perpendicular h;
- Selecione a opção INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS, clique sobre o ponto A e o eixo x, e clique em seguida sobre o ponto B e o eixo x, criando os pontos C e D, respectivamente;
- Selecione a opção SEGUIMENTO e crie os seguimentos AC e BD;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C, e marque a opção EXIBIR RASTRO. Faça o mesmo com o ponto D;
- Clique sobre os controles deslizantes com o botão direito do mouse e selecione a opção ANIMAÇÃO.



Fonte: Autoria Própria (2018).

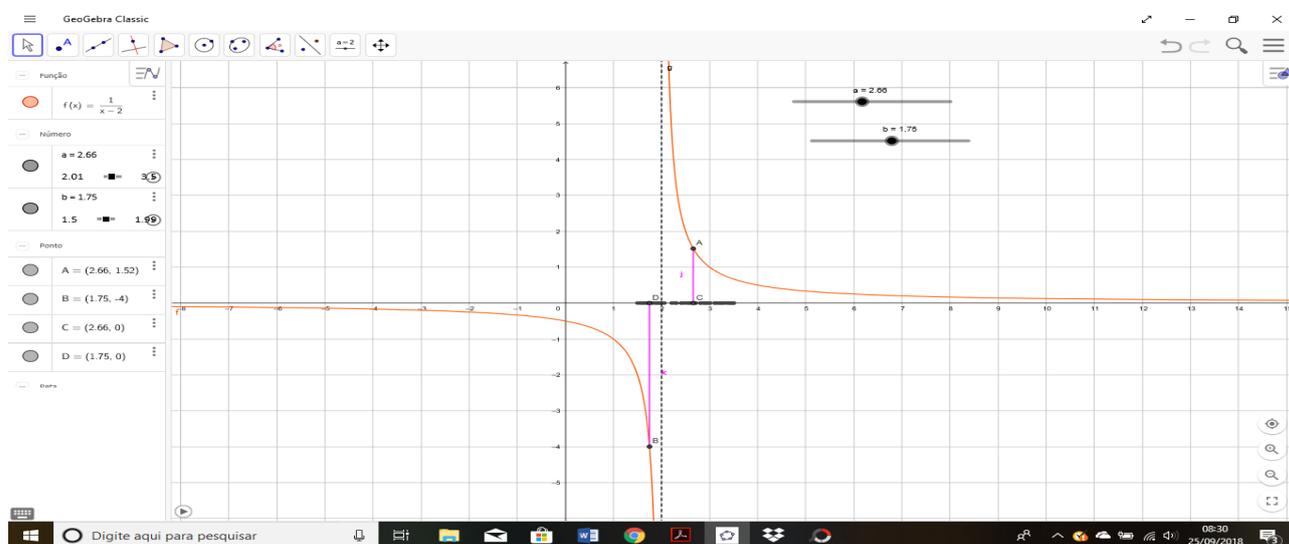
## Atividade 2: Assíntota horizontal

- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = 1/(x-2)$ ;
- Digite na caixa de entrada a reta  $x=2$ ;
- Digite na caixa de entrada a reta  $y=0$ (eixo x);
- Selecione a opção CONTROLE DESLIZANTE e clique sobre a tela, criando o controle deslizante  $3 \leq a \leq 10$ . Repita o processo e crie o controle deslizante  $-5 \leq b \leq 1$ ;
- Digite na caixa de entrada os pontos  $A = (a, f(a))$  e  $B = (b, f(b))$ ;
- Selecione a opção RETA PERPENDICULAR, clique no ponto A e o eixo x, criando a reta perpendicular g. Da mesma forma, clique sobre o ponto B e o eixo x, criando a reta perpendicular h;
- Selecione a opção INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS, clique sobre o ponto A e o eixo x, e clique em seguida sobre o ponto B e o eixo x, criando os pontos C e D, respectivamente;

- Selecione a opção SEGUIMENTO e crie os seguimentos AC e BD;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C, e marque a opção EXIBIR RASTRO. Faça o mesmo com o ponto D;
- Clique sobre os controles deslizantes com o botão direito do mouse e selecione a opção ANIMAÇÃO.

**Definição 2:** A reta  $y=b$  é denominada uma assíntota horizontal do gráfico da função  $f$  se pelo menos uma das seguintes afirmações for válida:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  e para um número  $N$ , se  $x > N$ , então  $f(x) \neq b$ ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  e para um número  $N$ , se  $x < N$ , então  $f(x) \neq b$ .



Fonte: Autoria Própria (2018).

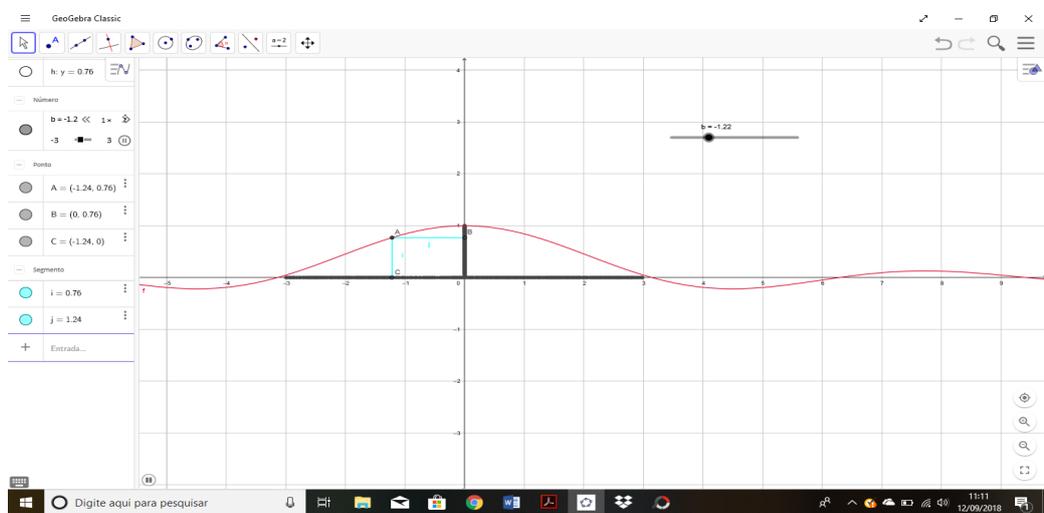
### Atividade 3: Limite de Função Trigonométrica

- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE (janela 10) e crie um controle  $-3 \leq a \leq 3$ ;
- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = (\sin x)/x$ ;
- Digite na caixa de entrada o ponto  $A = (a, f(a))$ ;
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR (janela 4), a seguir trace uma reta perpendicular ao eixo  $x$ , passando por  $A$ . Essa reta será rotulada automaticamente como reta  $g$ ;
- Trace agora uma reta perpendicular ao eixo  $y$ , passando por  $A$ . Essa reta será rotulada automaticamente como reta  $h$ ;
- Ative a ferramenta INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS (janela 2), e marque a intersecção da reta  $g$  com o eixo  $x$ . Da mesma forma marque a intersecção da reta  $h$  com o eixo  $y$ . Os pontos de intersecção serão rotulados como  $B$  e  $C$ , respectivamente.

- Ative a ferramenta SEGUIMENTO (janela 3), e crie o seguimento AB e AC;
- Ative a ferramenta EXIBIR/ESCONDER OBJETO (janela 11) e clique sobre as retas g e h;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto B, e marque a opção EXIBIR RASTRO. Faça o mesmo com o ponto C;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção ANIMAÇÃO.

**Definição 4:** Considere a função  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ , definida em  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Avaliando o comportamento da função para valores de  $x$  próximos a 0, temos:

**Teorema 4:** 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

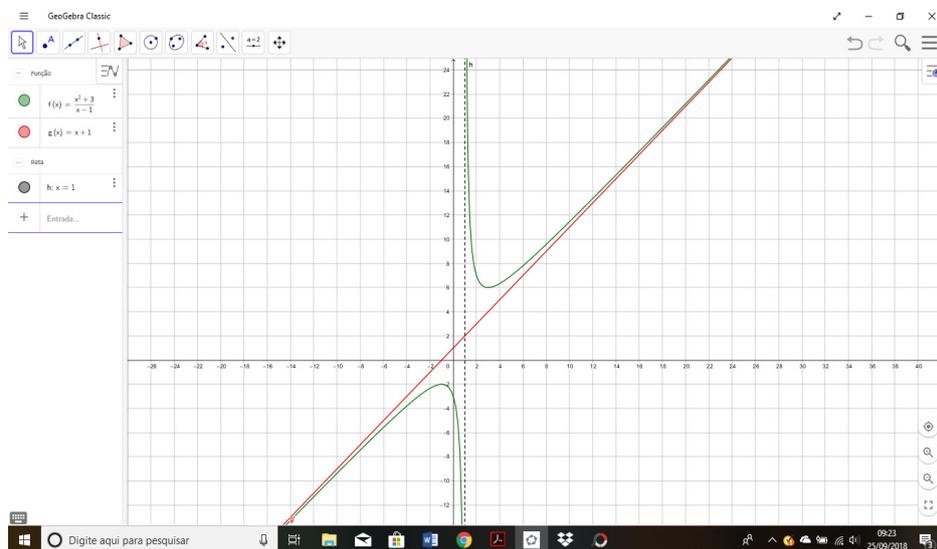


Fonte: Autoria Própria (2018).

#### Atividade 4: Assíntota Oblíqua

- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = (x^2 + 3) / (x-1)$ ;
- Digite na caixa de entrada a reta  $h = 1$ ;
- Digite na caixa de entrada a função  $g(x) = x+1$ .

**Definição 4:** A reta  $y = mx + b$  é denominada uma assíntota oblíqua do gráfico da função  $f$  se  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ , onde  $m \neq 0$ .



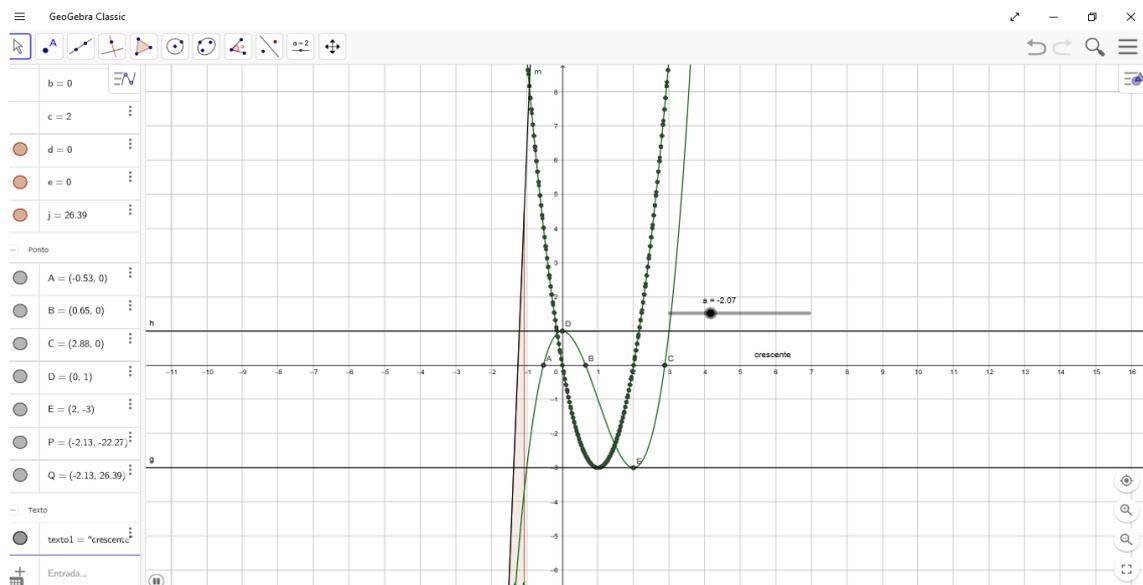
Fonte: Autoria Própria (2018).

### Atividade 5: Teste da Derivada Primeira

- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = x^3 = 3x^2 + 1$ ;
- Digite na caixa de entrada também a função  $m(x) = 3x^2 - 6x$ ;
- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e crie o controle de  $-5 \leq a \leq 5$ ;
- Digite na caixa de entrada o ponto  $P = (a, f(a))$ ;
- Insira na caixa de entrada o comando Raiz [f], obtendo assim três pontos que serão nomeados automaticamente como A, B e C;
- Digite na caixa de entrada o comando Extremo [f], obtendo assim os pontos D e E;
- Novamente digite na caixa de entrada o comando  $b = x(D)$  e  $c = x(E)$ ;
- Insira na caixa de entrada, o comando: Se [ $a < b$ , “decrecente”, Se [ $b < a < c$ , “decrecente”, Se [ $a > c$ , “crescente”]]];
- Na caixa de entrada digite o comando, Tangente [E,f], criando assim a reta tangente a f, no ponto E, nomeada automaticamente por d;
- Digitando Inclinação [d], na caixa de entrada, obtemos a inclinação;
- Na caixa de entrada digite o comando, Tangente [D,f], criando assim a reta tangente a f, no ponto D, nomeada automaticamente por g. Após digite o comando: Inclinação [g];
- Na caixa de entrada digite o comando, Tangente [P,f], criando assim a reta tangente a f, no ponto P, nomeada automaticamente por j. Após digite o comando: Inclinação [j];
- Insira na caixa de entrada:  $Q = (x(P), j)$ ;
- Selecione a opção HABILITAR RASTRO, no ponto Q;
- Ative a opção ANIMAÇÃO, clicando com o botão direito do mouse e depois o esquerdo sobre o controle deslizante.

**Teorema 5:** (Teste derivada de primeira): Seja  $f$  uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto  $(a, b)$  contendo um número  $c$  e suponha que  $f'$  exista em todos os pontos de  $(a, b)$  exceto possivelmente em  $c$ :

- I. Se  $f'(x) > 0$  para todos os valores de  $x$  em algum intervalo aberto tendo  $c$  como extremo direito e se  $f'(x) < 0$  para todos os valores de  $x$  em algum intervalo aberto tendo  $c$  como extremo esquerdo então  $f$  terá um valor máximo relativo em  $c$ .
- II. Se  $f'(x) < 0$  para todos os valores de  $x$  em algum intervalo aberto tendo  $c$  como extremo direito e se  $f'(x) > 0$  para todos os valores de  $x$  em algum intervalo aberto tendo  $c$  como extremo esquerdo, então  $f$  terá um mínimo relativo em  $c$ .



Fonte: Autoria Própria (2018).

### Atividade 6: Sinal da Derivada de Primeira Ordem

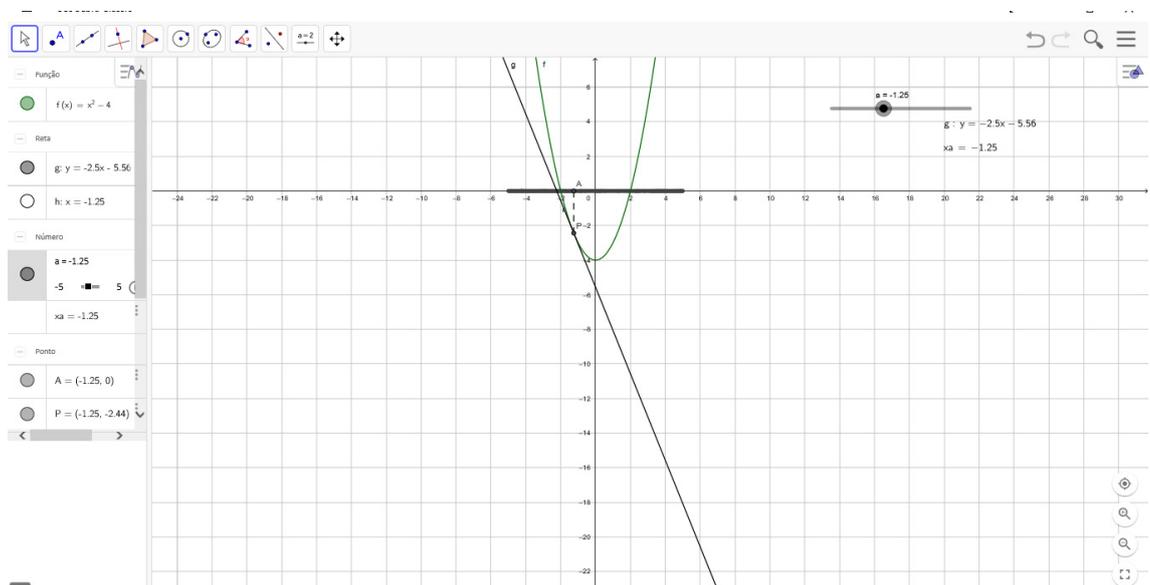
- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = x^2 - 4$ .
- Selecione a opção CONTROLE DESLIZANTE e clique sobre a tela, criando um controle deslizante de  $-5 \leq a \leq 5$ .
- Digite na caixa de entrada o ponto  $P = (a, f(a))$ .
- Digite na caixa de entrada o comando, Tangente [P, f] criando assim uma reta tangente em P à curva  $f$ , nomeando automaticamente por g.
- Selecione a opção RETA PERPENDICULAR, clique sobre o ponto P e depois sobre o eixo x.
- Selecione a opção INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, clicando sobre a reta perpendicular g e sobre o eixo x, obtendo assim o ponto A.
- Desative a opção EXIBIR OBJETO, clicando com o botão direito do mouse e depois o esquerdo sobre a reta perpendicular h.

- Ativando a ferramenta SEGMENTO, crie o segmento , com o botão direito do mouse, selecione a opção
- Digite na caixa de entrada  $x_a = a$ , arraste da janela de visualização  $x_a = a$  e deixe sobre a tela perto do controle deslizante.
- Selecione na janela de visualização a equação da reta tangente e arraste-a para próximo do controle deslizante.

Selecione a opção HABILITAR RASTRO no ponto A e com o botão direito do mouse clique sobre o controle deslizante e selecione a opção ANIMAR.

**Teorema 6:** Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a,b]$  e derivável no intervalo aberto  $(a,b)$ :

- se  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  em  $(a,b)$ , então  $f$  será crescente em  $[a,b]$ ;
- se  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  em  $(a,b)$ , então  $f$  será decrescente em  $[a,b]$ .



Fonte: Autoria Própria (2018).

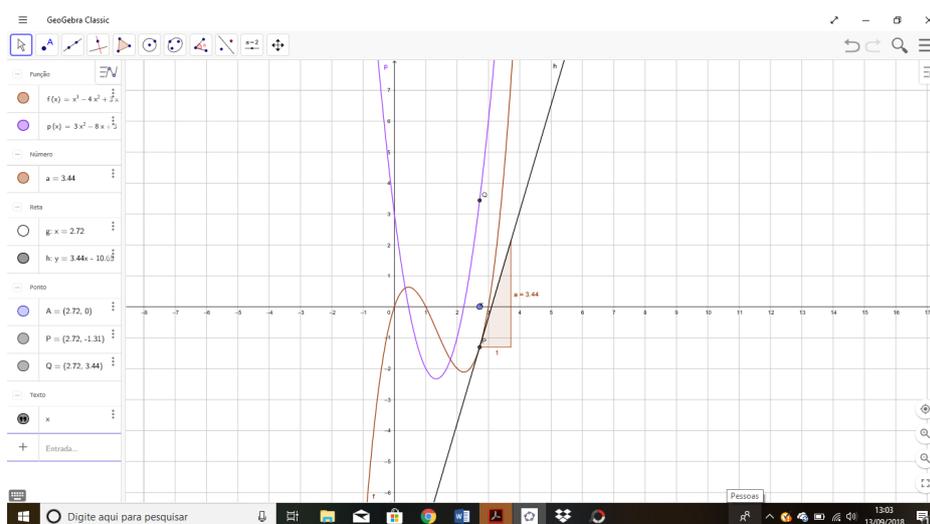
### Atividade 7: Gráfico da Função da Derivada

- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = (x^3) - (4 \cdot x^2) + (3 \cdot x)$ ;
- Ative a ferramenta PONTO (janela 2) e marque um ponto qualquer sobre o eixo x. Esse ponto será rotulado automaticamente como ponto A;
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR (janela 4), a seguir trace uma reta perpendicular ao eixo x passando pelo ponto A. A reta será rotulada automaticamente como reta g;
- Ative a ferramenta INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS (janela 2), e marque a intersecção entre a reta perpendicular g e a função f. Esse ponto será rotulado automaticamente como ponto B;
- Ative a ferramenta EXIBIR/ESCONDER OBJETO (janela 11) e clique sobre a reta g;

- Ative a ferramenta RETA TANGENTE (janela 4), a seguir trace a reta tangente a função  $f$  passando pelo ponto B. Essa reta será rotulada automaticamente como reta  $h$ ;
- Ative a ferramenta INCLINAÇÃO (janela 8), e marque a inclinação da reta tangente  $h$ . Essa inclinação será rotulada automaticamente como inclinação  $a$ ;
- Digite na caixa de entrada o ponto  $C=(x(B),a)$ ;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C e marque a opção EXIBIR RASTRO;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto A e desmarque a opção EXIBIR RÓTULO;
- Ative a ferramenta TEXTO (janela 10) e clique num lugar próximo do ponto A. Ao aparecer uma janela texto, digite  $x$  e clique em ok;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o texto  $x$  e selecione PROPRIEDADES;
- Clique sobre a guia POSIÇÃO na caixa de seleção e vincule o texto ao ponto A, assim teremos o ponto X;
- Clique sobre o ponto X e arraste sobre o eixo  $x$ .

**Definição 7:** Dizemos que  $f'(a)$  representa a derivada de uma função  $f$  em um número  $a$  do domínio de  $f$ , ou seja, a inclinação da reta tangente a  $f$  em  $a$ . Se deixarmos o número  $a$  variar, substituindo-o por pela variável  $x$ , chegamos à definição de função derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right), \text{ onde } \Delta x \text{ é a variação em } x.$$



Fonte: Autoria Própria (2018).

## Atividade 8: Limite de Função Exponencial

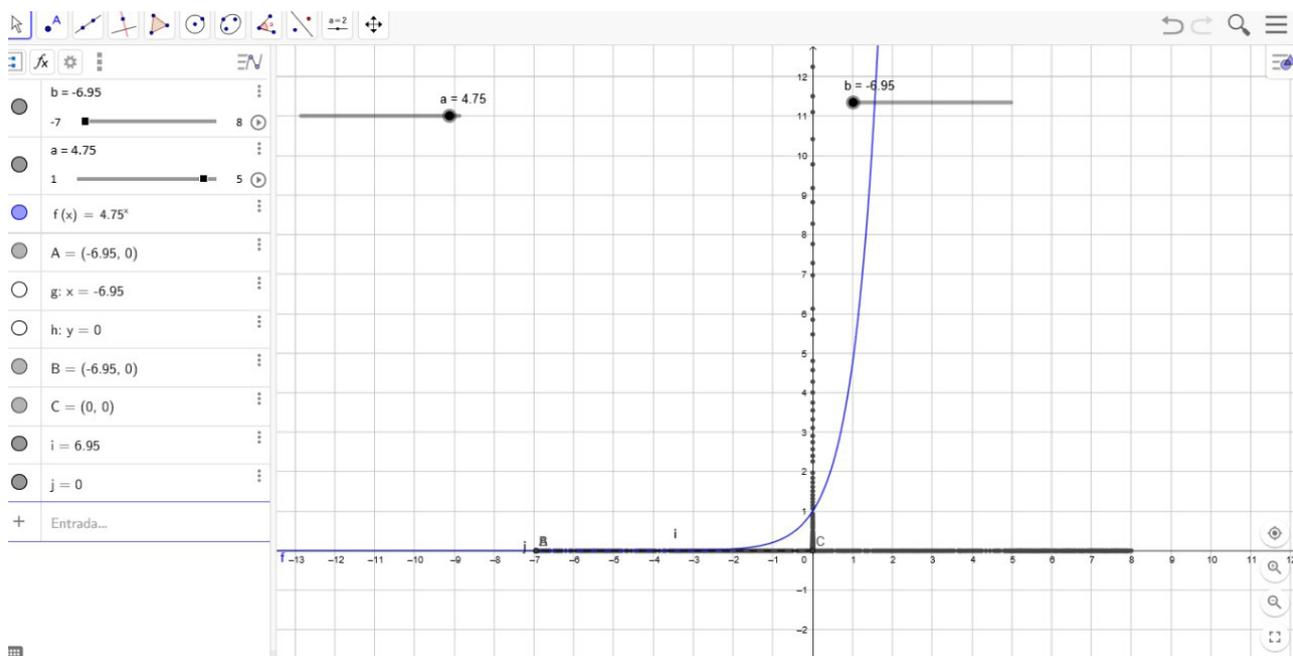
i)  $a > 0$ ,  $f$  é crescente

- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e crie o controle de  $1 \leq a \leq 5$ , com incremento igual a 0,01
- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = a^x$ , observe assim o comportamento do gráfico de  $f(x) = a^x$ , onde  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .
- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e crie o controle de  $-7 \leq b \leq 8$ , com incremento igual a 0,01
- Digite na caixa de entrada o ponto  $A = (b, f(b))$ .
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR, clicando com o botão esquerdo sobre o ponto A e depois sobre o eixo x, obtendo uma reta perpendicular por A ao eixo x. Será nomeada automaticamente como g.
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR, clicando com o botão esquerdo sobre o ponto A e depois sobre o eixo y, obtendo uma reta perpendicular por A ao eixo y. Será nomeada automaticamente como h.
- Selecione a opção INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, clicando com o botão esquerdo do mouse sobre as retas g e h.
- Clique com o botão direito do mouse sobre as retas g e h, desativando a opção EXIBIR OBJETO.
- Selecione a opção SEGMENTO, clicando primeiramente sobre o ponto A e depois sobre o ponto B. Ative novamente a opção SEGMENTO clicando primeiramente sobre o ponto A e depois sobre o ponto C, com isso obtemos os segmentos  $(AB)$  e  $(AC)$ .
- Clicando com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto A, ative a opção EXIBIR RASTRO, refaça o mesmo procedimento para os pontos B e C.
- ii)  $0 < a < 1$ , f é crescente
- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e crie o controle de  $0 \leq a \leq 1$ , com incremento igual a 0,01
- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = a^x$ , observe assim o comportamento do gráfico de  $f(x) = a^x$ , onde  $0 < a < 1$ .
- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e crie o controle de  $-7 \leq b \leq 8$ , com incremento igual a 0,01
- Digite na caixa de entrada o ponto  $A = (b, f(b))$ .
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR, clicando com o botão esquerdo sobre o ponto A e depois sobre o eixo x, obtendo uma reta perpendicular por A ao eixo x. Será nomeada automaticamente como g.
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR, clicando com o botão esquerdo sobre o ponto A e depois sobre o eixo y, obtendo uma reta perpendicular por A ao eixo y. Será nomeada automaticamente como h.
- Selecione a opção INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, clicando com o botão esquerdo do mouse sobre as retas g e h.
- Clique com o botão direito do mouse sobre as retas g e h, desativando a opção EXIBIR OBJETO.

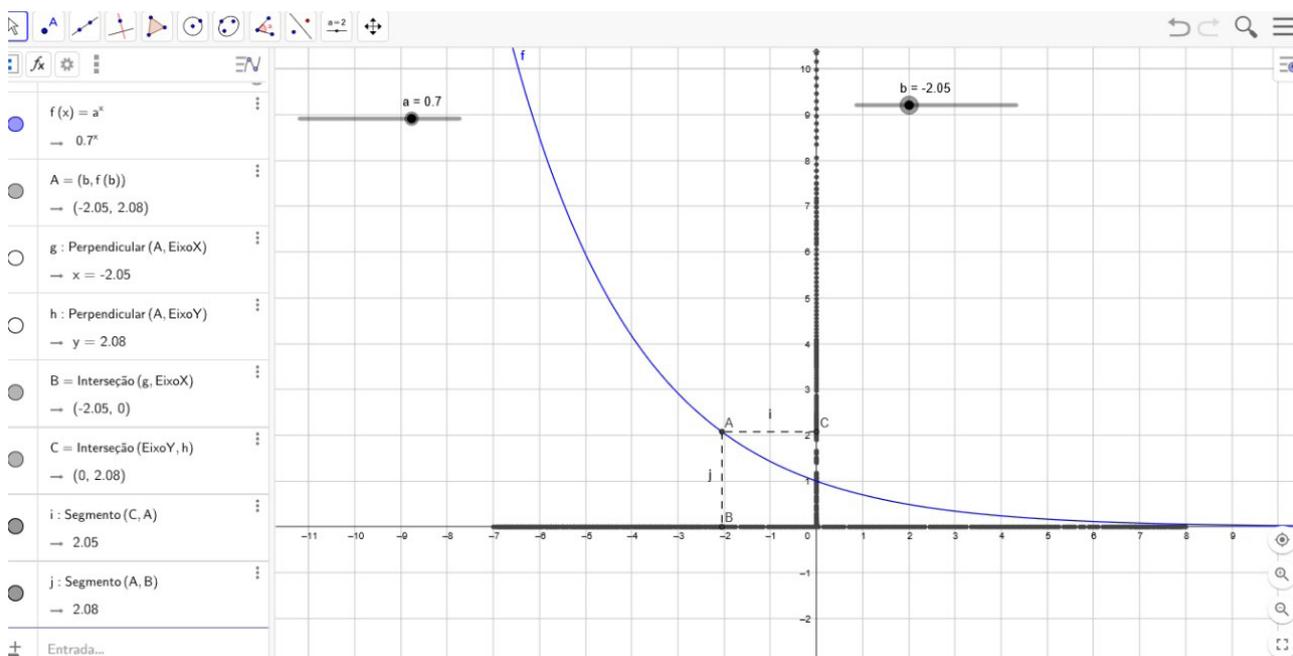
- Selecione a opção SEGMENTO, clicando primeiramente sobre o ponto A e depois sobre o ponto B. Ative novamente a opção SEGMENTO clicando primeiramente sobre o ponto A e depois sobre o ponto C, com isso obtemos os segmentos  $(AB)$  e  $(AC)$ .
- Clicando com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto A, ative a opção EXIBIR RASTRO, refaça o mesmo procedimento para os pontos B e C.

**Teorema 8:** Seja  $a > 0$  e  $a \neq 1$  um real qualquer. Existe uma única função  $f$ , definida e contínua em  $\mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = a^x$ , para todo racional  $x$ .

**Propriedade 8:** i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a)^x = +\infty$   
 ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a)^x = 0$



Fonte: Autoria Própria (2018).



Fonte: Autoria Própria (2018).

## 4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nestas reuniões desenvolveu-se atividades do conteúdo de Cálculo Diferencial ministrado nas aulas do curso de Licenciatura em Matemática fazendo o uso do Software Geogebra, os quais foram realizadas atividades em relação aos seguintes conteúdos: Função definida por partes, limites de função definida por partes, limite de função quadrática, limites no infinito e assíntotas horizontais, limites infinitos e assíntotas verticais, assíntota oblíqua, continuidade de funções, Teorema do Confronto, limite de uma função exponencial, logarítmica e trigonométricas, reta tangente ao gráfico de funções, derivada pela definição de limite, derivada de função constante, derivada de função seno e cosseno, derivada de função logarítmica, derivada de função de polinômios, Teorema de Weirstrass, sinal da derivada primeira, sinal da derivada segunda, Teste da Derivada Segunda e Teorema do Valor Extremo. Primeiramente, foi feita uma discussão e questionamentos de como seriam realizadas as atividades, em seguida, os alunos do Projeto faziam as etapas das construções no Geogebra, e com as animações dos gráficos discutimos e analisamos a formalização matemática das definições e Teoremas apresentados da disciplina de Cálculo Diferencial.

## 5 | CONCLUSÃO

Considerando a relevância da utilização de recursos computacionais na sala de aula e tendo em vista a importância da abordagem conceitual de Cálculo Diferencial, este Projeto de Extensão auxiliou os alunos no ensino de Cálculo Diferencial a partir da interpretação geométrica, o qual foi explorado graficamente os conteúdos e os alunos puderam visualizar e investigar. É importante no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, a parte teórica conciliada com a parte geométrica. Com relatos dos alunos do Projeto, as atividades realizadas no Projeto de Extensão com o Software Geogebra foram importantes na aprendizagem de Cálculo Diferencial, pois conseguiram uma melhor visualização das teorias estudadas em sala de aula, bem como, auxílio no processo de ensino- aprendizagem. Observaram também, que através do software Geogebra como ferramenta de ensino, foi possível evidenciar hipóteses e conceitos matemáticos aliando software educacional juntamente com o conhecimento já obtido nesta disciplina, com propósito de alcançar e ampliar a compreensão dos conceitos. Diante deste contexto, esta experiência vivenciada semanalmente no âmbito da Universidade pretende auxiliar o ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos por intermédio da visualização gráfica do software Geogebra, podendo favorecer o discente na compreensão dos conteúdos matemáticos, bem como estimular o docente em suas atividades pedagógicas. Com a manipulação e aprendizado das ferramentas no Software Geogebra, este Projeto de Extensão também contribui para os alunos em outras disciplinas. A professora deste Projeto também aproveitou as atividades desenvolvidas nas reuniões para auxiliar em suas aulas na disciplina de Cálculo

Diferencial que ministrou.

## REFERÊNCIAS

CURY, H. N. **Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores**. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia, Anais.. Águas de Lindóia: SBEM, CD-ROM. 2006.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001, v.1

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda., 1994.

RICHIT, A., FARIAS, M.M.R. **Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais: Perspectivas de Exploração no Software GeoGebra**. I CEMACYC, República Domini- cana, 2013.

SILVA, J. I. G.; FERREIRA, D. H. L. **O uso de tecnologias na disciplina de cálculo diferencial e integral I**. Anais do XIV Encontro de Iniciação Científica da PUC-Campinas. 29 e 30 de setembro de 2009.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Brasília: Estação Palavra - USP. 2005.

VAZ, D.A.F, JESUS, P.C.C. **Uma sequência didática para o ensino da matemática com o software Geogebra** *Revista Estudos*, Goiânia, v. 41, n. 1, p. 59-75, jan./mar. 2014.

## **SOBRE O ORGANIZADOR**

**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES** Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-348-4

