

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

 **Atena**
Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof^a Dr^a Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof.^a Dr.^a Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Dr.^a Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.^a Dr.^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof.^a Dr.^a Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof.^a Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
E24	Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2) Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-348-4 DOI 10.22533/at.ed.484192405 1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série. CDD 510.7
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
O ALGORITMO ESPECTRAL COMO ALTERNATIVA AO ALGORITMO K-MEANS EM CONJUNTO DE DADOS ARTIFICIAIS	
Luciano Garim Garcia Leonardo Ramos Emmendorfer	
DOI 10.22533/at.ed.4841924051	
CAPÍTULO 2	16
NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza Hélio Magalhães De Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.4841924052	
CAPÍTULO 3	24
ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza	
DOI 10.22533/at.ed.4841924053	
CAPÍTULO 4	32
ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA	
Amanda Barretos Lima Garuth Brenda Anselmo Mendes Isabela Geraldo Reghin Rosângela Teixeira Guedes	
DOI 10.22533/at.ed.4841924054	
CAPÍTULO 5	46
DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	
Mariana Coelho Portilho Bernardi Adilandri Mércio Lobeiro Jeferson Rafael Bueno Thiago José Sepulveda da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.4841924055	
CAPÍTULO 6	57
MODELO MATEMÁTICO PARA AUXILIAR O PLANEJAMENTO DA MANUTENÇÃO PREVENTIVA DE MOTORES ELÉTRICOS	
Thalita Monteiro Obal Jonatas Santana Obal	
DOI 10.22533/at.ed.4841924056	

CAPÍTULO 7	64
PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE FLUXO EM AQUÍFERO CONFINADO	
João Paulo Martins dos Santos Alessandro Firmiano de Jesus Edson Wendland	
DOI 10.22533/at.ed.4841924057	
CAPÍTULO 8	83
RESONANT ORBITAL DYNAMICS OF CBERS SATELLITES	
Jarbas Cordeiro Sampaio Rodolpho Vilhena de Moraes Sandro da Silva Fernandes	
DOI 10.22533/at.ed.4841924058	
CAPÍTULO 9	91
TESTES ADAPTATIVOS ENVOLVENDO O CONTEÚDO DE DERIVADAS: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL	
Patrícia Liane Grudzinski da Silva Claudia Lisete Oliveira Groenwald	
DOI 10.22533/at.ed.4841924059	
CAPÍTULO 10	104
LOCALIZAÇÃO DE FALTAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO POR ANÁLISE DE SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO	
Danilo Pinto Moreira de Souza Eliane da Silva Christo Aryfrance Rocha Almeida	
DOI 10.22533/at.ed.48419240510	
CAPÍTULO 11	116
MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA	
Gustavo Henrique Petrolí Norberto Anibal Maidana	
DOI 10.22533/at.ed.48419240511	
CAPÍTULO 12	133
LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO	
Claudio Fuentealba Edelmira Badillo Gloria Sánchez-Matamoros Andrea Cárcamo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240512	
CAPÍTULO 13	143
OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
Márcio Aurélio da Silva Fran Sérgio Lobato Aldemir Ap Cavalini Jr Valder Steffen Jr	
DOI 10.22533/at.ed.48419240513	

CAPÍTULO 14	156
SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY	
Gino Gustavo Maqui Huamán	
Ulcilea Alves Severino Leal	
Geraldo Nunes Silva	
DOI 10.22533/at.ed.48419240514	
CAPÍTULO 15	164
VALIDAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA O ESCOAMENTO DE GRÃOS DE SOJA	
Rodolfo França de Lima	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Dirceu Lima dos Santos	
Adriano Pilla Zeilmann	
DOI 10.22533/at.ed.48419240515	
CAPÍTULO 16	181
TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA	
Landy Sosa Moguel	
Guadalupe Cabañas-Sánchez	
Eddie Aparicio Landa	
DOI 10.22533/at.ed.48419240516	
CAPÍTULO 17	192
SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE	
Francisco Helmuth Soares Dias	
Jacques Aveline Loureiro da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.48419240517	
CAPÍTULO 18	199
SIMULAÇÃO 3D DO FLUXO DE AR DE UM SISTEMA REAL DE ARMAZENAGEM DE GRÃOS	
Vanessa Faoro	
Rodolfo França de Lima	
Aline Tampke Dombrowski	
Manuel Osório Binelo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240518	
CAPÍTULO 19	207
CONTROLE ÓTIMO DO FLUXO DE ÁGUA EM UMA FÔRMA DE GELO	
Xie Jiayu	
João Luis Gonçalves	
DOI 10.22533/at.ed.48419240519	
CAPÍTULO 20	213
CÓDIGOS CÍCLICOS DEFINIDOS POR ANULAMENTO	
Conrado Jensen Teixeira	
Osnel Broche Cristo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240520	

CAPÍTULO 21	216
ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA	
Bruno Carlos Lugão	
Diego Campos Knupp	
Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues	
Antônio José da Silva Neto	
DOI 10.22533/at.ed.48419240521	
CAPÍTULO 22	225
ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	
Ronaldo Mendes Evaristo	
Kelly Cristiane Iarosz	
Silvio Luiz Thomaz de Souza	
Ricardo Luiz Viana	
Moacir Fernandes de Godoy	
Antonio Marcos Batista	
DOI 10.22533/at.ed.48419240522	
CAPÍTULO 23	235
CONSTRUÇÃO DE UM AEROMODELO DE MACARRÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA	
Alissan Sarturato Firão	
Ernandes Rocha de Oliveira	
Zulind Luzmarina Freitas	
DOI 10.22533/at.ed.48419240523	
SOBRE O ORGANIZADOR	239

SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY

Gino Gustavo Maqui Huamán

Instituto de Ciências Exatas e Naturais,
Universidade Federal do Pará
Belém, Pará

Ulcilea Alves Severino Leal

Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Iturama, Minas Gerais

Geraldo Nunes Silva

Departamento de Matemática Aplicada,
Universidade Estadual Paulista
São José do Rio Preto, São Paulo

fuzzy mathematics, aiming to show applications and implications of interval arithmetic in the fuzzy context. In this way, we will present interval sequences, convergence and their properties, and later, extended in the fuzzy context. In addition, the influence of interval arithmetic on the Zadeh extension principle will be exemplified. Finally, the sequences of fuzzy numbers will be studied.

KEYWORDS: Interval Arithmetic, Zadeh's Extension Principle, Fuzzy Sequences.

RESUMO: Este trabalho apresenta um dos conceitos elementares da análise intervalar e da matemática fuzzy, objetivando-se mostrar aplicações e implicações das aritméticas intervalares no contexto fuzzy. Neste sentido, será apresentado sequências intervalares, convergência e suas propriedades, e posteriormente, estendidas no contexto fuzzy. Além disso, será exemplificado a influência das aritméticas intervalares no princípio de extensão de Zadeh. Finalmente, serão estudadas as sequências de números fuzzy.

PALAVRAS-CHAVE: Aritmética Intervalar, Princípio de Extensão de Zadeh, Sequências Fuzzy.

ABSTRACT: This paper presents one of the elementary concepts of interval analysis and

1 | INTRODUÇÃO

A análise intervalar e a teoria dos conjuntos fuzzy são disciplinas matemáticas relativamente novas, difundidas e criadas por R. E. Moore e L. A. Zadeh, respectivamente. Moore com seu livro em análise intervalar (MOORE, 1966) em 1966 e Zadeh com seu original e influente artigo sobre teoria de conjuntos fuzzy (ZADEH, 1965) em 1965, estes trabalhos, com o passar do tempo, mostraram uma conexão entre estas áreas na matemática das incertezas. R.E. Moore junto com seus colaboradores aportaram ao desenvolvimento da análise no contexto intervalar, começando com a computação científica, equações diferenciais, análise funcional, otimização global e álgebra linear intervalar. Alguns destes resultados

foram utilizados no desenvolvimento da teoria Fuzzy, como também, resultados do contexto fuzzy foram utilizados no contexto intervalar. Isto pode ser evidenciado em Interval and fuzzy analysis: A unified approach de W. A. Lodwick (LODWICK, 2007), por outro lado a aritmética encontrada em Moore (MOORE, 1966) produz uma sobre-estimação nos cálculos, ver (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006), fato que motivou o nosso interesse em estudar outra estrutura algébrica intervalar e aplicar-a as sequencias intervalares e fuzzy.

2 | ESPAÇO INTERVALAR

Esta seção apresenta definições básicas da análise intervalar e algumas propriedades destas, onde essas podem ser encontradas com maior detalhe em (MOORE, 1966), (LODWICK, 2007) e (MAQUI-HUAMAM, 2014).

Definição 2.1 (MAQUI-HUAMAM, 2014) Chama-se de subespaço intervalar próprio real ao conjunto $\mathbb{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de modo que os elementos de \mathbb{I} sejam da forma $[\underline{a}, \bar{a}] = \{z \in \mathbb{R} : \underline{a} \leq z \leq \bar{a}\}$. Em geral, diz que, $\mathbb{I}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é o subespaço intervalar próprio n-dimensional, sendo este definido pelo produto cartesiano de n subespaços intervalares próprios reais, isto é, $\underbrace{\mathbb{I} \times \dots \times \mathbb{I}}_{n\text{-vezes}}$; os elementos deste conjunto são denominados de vetores intervalares n-dimensionais e serão denotados por uma n-upla intervalar do tipo (X_1, X_2, \dots, X_n) , onde $X_i \in \mathbb{I}, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Chama-se de Intervalo degenerado ao intervalo $X = [\underline{a}, \bar{a}] \in \mathbb{I}$ onde $\underline{a} = \bar{a}$.

Definição 2.2 (LODWICK, 2007) Um intervalo $A = [\underline{a}, \bar{a}]$, é o grafo de uma função real $A'(\lambda_a)$, onde:

$$A'(\lambda_a) = \underline{a} + \lambda_a(\bar{a} - \underline{a}); \lambda_a \in [0, 1] \quad (1)$$

Estritamente falando, em (1) como os números \underline{a} e \bar{a} são conhecidos, eles serão coeficientes, enquanto λ_a esta variando entre 0 e 1. $A'(\lambda_a)$ será chamada de função restrição associada ao intervalo A. Para simplificar a notação escreveremos $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ para denotar aos parâmetros associados a cada intervalo. Assim a representação paramétrica restrita de um intervalo A será:

$$A = [\underline{a}, \bar{a}] = \left\{ a(\lambda) = \underline{a} + \lambda_a(\bar{a} - \underline{a}); \lambda_a \in [0, 1] \right\}.$$

Todo elemento A de \mathbb{I} tem associado uma função restrição. Sobre o espaço \mathbb{I} são definidas algumas aritméticas que, pelo geral, são utilizadas nos contextos intervalares e fuzzy. Com uma estrutura métrica neste espaço, o conceito de convergência de sequências intervalares será analisado.

2.1 Operações Aritméticas

Consideremos dois intervalos $A = \{a(\lambda_1) : \lambda_1 \in [0,1]\}$ e $B = \{b(\lambda_2) : \lambda_2 \in [0,1]\}$, então:

$$\begin{aligned}
 A \circledast B &= C \\
 &= [\underline{c}, \bar{c}] \\
 &= \{a(\lambda_1) * b(\lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \delta\} \\
 &= \{c : c = a(\lambda_1) * b(\lambda_2), \lambda_1, \lambda_2 \in \delta\} \\
 \text{onde } \underline{c} &= \min \{c\}, \bar{c} = \max \{c\}, \delta \subset \mathbb{R} \\
 & \text{ e } * \in \{+, -, \times, \div\}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Definição 2.3 (Aritmética Intervalar Restrita – CIA) Dados $A, B \in \mathbb{I}$ e considerando (2) esta aritmética fica determinada quando $\delta = \{0,1\}$.

Definição 2.4 (Aritmética Intervalar Standard – SAI) Dados $A, B \in \mathbb{I}$ e considerando (2) esta aritmética fica determinada quando $\delta = \{0,1\}$.

Definição 2.5 (Aritmética Intervalar Restrita em Níveis Simples – SLCIA) Dados $A, B \in \mathbb{I}$ e considerando (2) esta aritmética fica determinada quando $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\delta = [0,1]$.

Definição 2.6 Dados $A, B \in \mathbb{I}$ a métrica de Pompeiu-Hausdorff é definida por $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que:

$$H(A, B) = \max\{d_1(A, B), d_1(B, A)\},$$

onde, $d_1 : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ dado por:

$$d_1(A, B) = \sup_{a \in A} d_2(a, B)$$

é uma quase métrica, e $d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ é dado por

$$d_2(a, B) = \inf_{b \in B} d_3(a, b)$$

com d_3 distância euclidiana.

Equivalente a esta métrica tem-se a métrica d , onde dados $A, B \in \mathbb{I}$, $d : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ é definida por:

$$d(A, B) = \max_{\lambda \in [0,1]} |A(\lambda) - B(\lambda)|,$$

Onde $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ são as funções restrição associadas a A e B , respectivamente, ver (CHALCO-CANO, LODWICK E BEDE, 2014).

Definição 2.7 (MAQUI-HUAMAM, 2014) Seja \mathbb{I} o espaço intervalar próprio. Uma sequência em \mathbb{I} é uma aplicação $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$. Onde, ϕ é denotada por:

$$(A_n); (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ou } (A_0, A_1, A_2, \dots)$$

e $A_n := \phi(n)$ é o n -ésimo termo da sequência $\phi = (A_0, A_1, A_2, \dots)$.

Definição 2.8 (MAQUI-HUAMAM, 2014) Dada uma sequência de números

intervalares (A_n) ; $A_n \in \mathbb{I}, \forall n$ (não necessariamente monótona), diz-se que A_n converge para o número intervalar A , e escreve-se $A = \lim A_n$, quando para cada $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, for possível obter um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \epsilon$, sempre que $n > n_0$.

Proposição 2.1 (MAQUI-HUAMAM, 2014) A sequência de números intervalares (A_n) é convergente se, e somente se, (A_n) é convergente nível a nível. Isto é, a sequência (A_n) é convergente nível a nível se, e somente se $A_n(\lambda)$ é convergente para cada $\lambda \in [0,1]$.

3 | PRELIMINARES DA LÓGICA E MATEMÁTICA FUZZY

A seguir, apresenta-se conceitos fundamentais, ver (BARROS e BASSANEZI, 2006), (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006), para o desenvolvimento de conceitos básicos sobre conjuntos fuzzy utilizando o conceito de α -nível.

Definição 3.1 (BARROS e BASSANEZI, 2006) Seja U um conjunto clássico; um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função

$$\mu_F : U \rightarrow [0,1]$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy F . Assim, ao falar sobre conjunto um fuzzy simplesmente será mencionada a sua função de pertinência para referir-se ao conjunto.

3.1 Níveis de Conjunto Fuzzy

Definição 3.2 (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006) Seja $\mu : U \rightarrow [0,1]$ e $\alpha \in [0,1]$. Define-se o α -nível de μ como o conjunto:

$$[\mu]^\alpha = \{x \in U : \mu(x) \geq \alpha\}, \alpha > 0$$

Além disso, o Suporte $supp(\mu)$ de um conjunto fuzzy μ é definido por:

$$supp(\mu) = [\mu]^0 = \overline{\{x \in U : \mu(x) > 0\}}.$$

Definição 3.3 (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006) Dado um conjunto fuzzy μ em U , diz-se que:

1. μ é compacto, se $[\mu]^\alpha$ é compacto para todo $\alpha \in [0,1]$;
2. μ é convexo, se $[\mu]^\alpha$ é convexo para todo $\alpha \in [0,1]$;
3. μ é normal, se existe $x_0 \in U$ tal que $\mu(x_0) = 1$.

Denota-se por:

- $\mathcal{F}(U)$ a família de conjuntos fuzzy compactos e normais.
- $\mathcal{F}_c(U)$ a família de conjuntos fuzzy compactos, convexos e normais, família que normalmente é conhecida como família de intervalos fuzzy e cujos elementos chamaremos de números fuzzy.

3.2 Operações Algébricas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Observe que, se $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, então as operações algébricas usuais entre funções não são adequadas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Por exemplo, se somar μ_1 e μ_2 ponto a ponto, poderia ocorrer que:

$$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) \notin [0,1].$$

Visando superar essa situação utiliza-se o chamado princípio de extensão de Zadeh, como definido a seguir:

Definição 3.4 (Princípio de Extensão de Zadeh)

Seja $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ uma função, f pode ser estendida ao contexto fuzzy por:

$$\hat{f}: \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$$

onde:

$$\hat{f}(\mu_1, \mu_2)(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

para cada $y \in Y$.

Mesmo que, o Princípio de Extensão estenda o conceito de uma função aplicada a um subconjunto clássico de X , em geral, o cálculo de \hat{f} não foi implementada de modo prático, exceto para funções muito simples.

Exemplo 3.1 Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ pode-se obter facilmente $\hat{f}: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ definida por: $\hat{f}(\mu)(y) = \mu\left(\frac{a}{y-b}\right), \forall \mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.1 Sejam $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ uma função contínua e μ um subconjunto fuzzy de $X_1 \times X_2$, então para todo $\alpha \in [0,1]$ vale: $[\hat{f}(\mu)]^\alpha = f([\mu]^\alpha)$.

Este resultado indica que os α -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo princípio de extensão, coincidem com as imagens dos α -níveis determinado pela função crisp. Contudo, obter $\hat{f}(\mu)$ utilizando a aritmética intervalar standard traz um sério inconveniente, o que acontece nos processos de cálculo com intervalos e é conhecido como efeito de sobrestimação.

Exemplo 3.2 Considere o número triangular fuzzy $\mu(1/2; 1; 3/2)$ onde:

$$[\mu]^\alpha = \left[\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2} \right].$$

Para obter $\mu^2 - 2\mu$, utiliza-se a função $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x$ e a partir daí obtêm-se $\hat{f}(\mu) = \mu^2 - 2\mu$. Utilizando a SIA teremos que:

$$[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-\frac{11}{4}, \frac{5}{4} \right]$$

Agora, se fatorar a função a ser estendida; isto é, $f(x) = x(x-2)$ se obtém a sua extensão: $\hat{f}(\mu) = \mu(\mu-2)$. Dessa forma, $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-\frac{9}{4}, -\frac{1}{4} \right]$. Todavia, se utilizar a SLCIA pode-se observar que mesmo fatorando a função a se estendida obtêm-se o mesmo resultado. Neste contexto, $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-1, -\frac{3}{4} \right]$ independentemente se $f(x) = x^2 - 2x$ ou $f(x) = x(x-2)$.

Proposição 3,1 Sejam A e B números fuzzy com α -níveis dados, respectivamente, por $[A]^\alpha = [\underline{A}_\alpha, \bar{A}_\alpha]$ e $[B]^\alpha = [\underline{B}_\alpha, \bar{B}_\alpha]$. Então, utilizando a SLCIA valem as seguintes propriedades:

1. $[A \pm B]^\alpha = [A]^\alpha \pm [B]^\alpha$;
2. $[\delta A]^\alpha = \delta[A]^\alpha$;
3. $[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha$;
4. $\left[\frac{A}{B} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha}$ $0 \notin [B]^\alpha$.

Considerando o exemplo anterior e aplicando a Teorema, tem que $[\hat{f}(\mu)]^\alpha = f([A]^\alpha)$ é uma função intervalar, e assim, ela pode ser descrita por:

$$f([A]^\alpha) = f\left(\left[\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2}\right]\right) = \left[\min_{\lambda \in [0,1]} \{f_\lambda([A]^\alpha)\}, \max_{\lambda \in [0,1]} \{f_\lambda([A]^\alpha)\} \right],$$

$$\text{onde } f_\lambda([A]^\alpha) = \left(\frac{1+\alpha}{2} + \lambda(1-\alpha) \right)^2 - 2 \left(\frac{1+\alpha}{2} + \lambda(1-\alpha) \right).$$

Destas últimas expressões se considerar o nível zero obtêm-se:

$$f([A]^0) = f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[\min_{\lambda \in [0,1]} \left\{ \lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4} \right\}, \max_{\lambda \in [0,1]} \left\{ \lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4} \right\} \right] = \left[-1, -\frac{3}{4} \right].$$

Note que, isto é o esperado quando analisamos a imagem desta função ponto a ponto.

Uma outra aplicação imediata da SLCIA é a seguinte:

3.3 Sequências de Números Fuzzy

Nesta parte será apresentada a sequência de números fuzzy e analisada a sua convergência.

Definição 3.5 Uma sequência em $\mathcal{F}_f(\mathbb{R})$ é simplesmente uma função $A: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}_f(\mathbb{R})$ denotada por:

$$(A_n); (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ou } (A_0, A_1, A_2, \dots)$$

Essas sequências serão chamadas de Sequências de Números Fuzzy, e a seguir, define-se a convergência das mesmas.

Definição 3.6 Uma sequência de números fuzzy $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente se sua correspondente sequência de α -níveis o é; isto é,

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow A \in \mathcal{F}_I(\mathbb{R}) \text{ se, e somente se } ([A_n]^\alpha)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow [A]^\alpha \in \mathbb{I}$$

Proposição 3.2 Sejam $A_n, B_n, A, B \in \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ tal que $A_n \rightarrow A, B_n \rightarrow B$, então tem-se os seguintes resultados:

- i. $A_n \pm B_n \rightarrow A \pm B$;
- ii. $A_n \cdot B_n \rightarrow A \cdot B$;
- iii. $\frac{A_n}{B_n} \rightarrow \frac{A}{B}$, para todo $B_n, B \neq 0$.

Exemplo 3.3 Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números fuzzy, tal que, sua sequência de α -níveis é $([A_n]^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ com $[A_n]^\alpha = [-1 - e^{-n} + (1 + e^{-n})\alpha, 1 + e^{-n} - (1 + e^{-n})\alpha]$. Assim, $([A_n]^\alpha)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$.

Exemplo 3.4 Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números fuzzy, tal que, a sequência de α -níveis é $([A_n]^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ e $[A_n]^\alpha = \left[\frac{\sin n}{n} - 1 + \alpha, 1 + e^{-n} - \alpha \right]$ onde $\alpha = 1 + \frac{1}{2}e^{-n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin n}{n}$. É fácil

ver que $([A_n]^\alpha)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$.

4 | CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados alguns resultados sobre o Cálculo Intervalar e algumas aplicações no contexto fuzzy, mostrando assim uma forte relação entre estas. O presente estudo é de fundamental importância para o desenvolvimento do cálculo intervalar, das equações diferenciais intervalares e outras áreas via SLCIA. Assim como, cálculo fuzzy, equações diferenciais fuzzy entre outras.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES e FAPESP pelo apoio.

REFERÊNCIAS

BARROS L.C. e BASSANEZI R. C., **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**, Unicamp-Imecc, (2006).

CHALCO-CANO Y., LODWICK W. A., BEDE B. and JENKINS O., **Spline approximation for Zadeh's**

extensions, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, World Scientific, (2008).

CHALCO-CANO Y., LODWICK W. A. and BEDE B., **Single level constraint interval arithmetic**, Fuzzy Sets and Systems 257, 146-168 (2014).

LODWICK W. A., **Interval and fuzzy analysis: A unified approach**, Advances in Imaging and Electron Physics, Elsevier, (2007).

MAQUI-HUAMÁN G. G., **Introdução à Análise Intervalar em Níveis Simples e Extensão de Zadeh**, Dissertação de Mestrado, Unesp-Ibilce, (2014).

MOORE R. E., **Interval analysis**. Vol. 4. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, (1966).

ZADEH L. A., **Fuzzy sets**. Information and control, v. 8, n. 3, p. 338-353, (1965).

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-348-4

