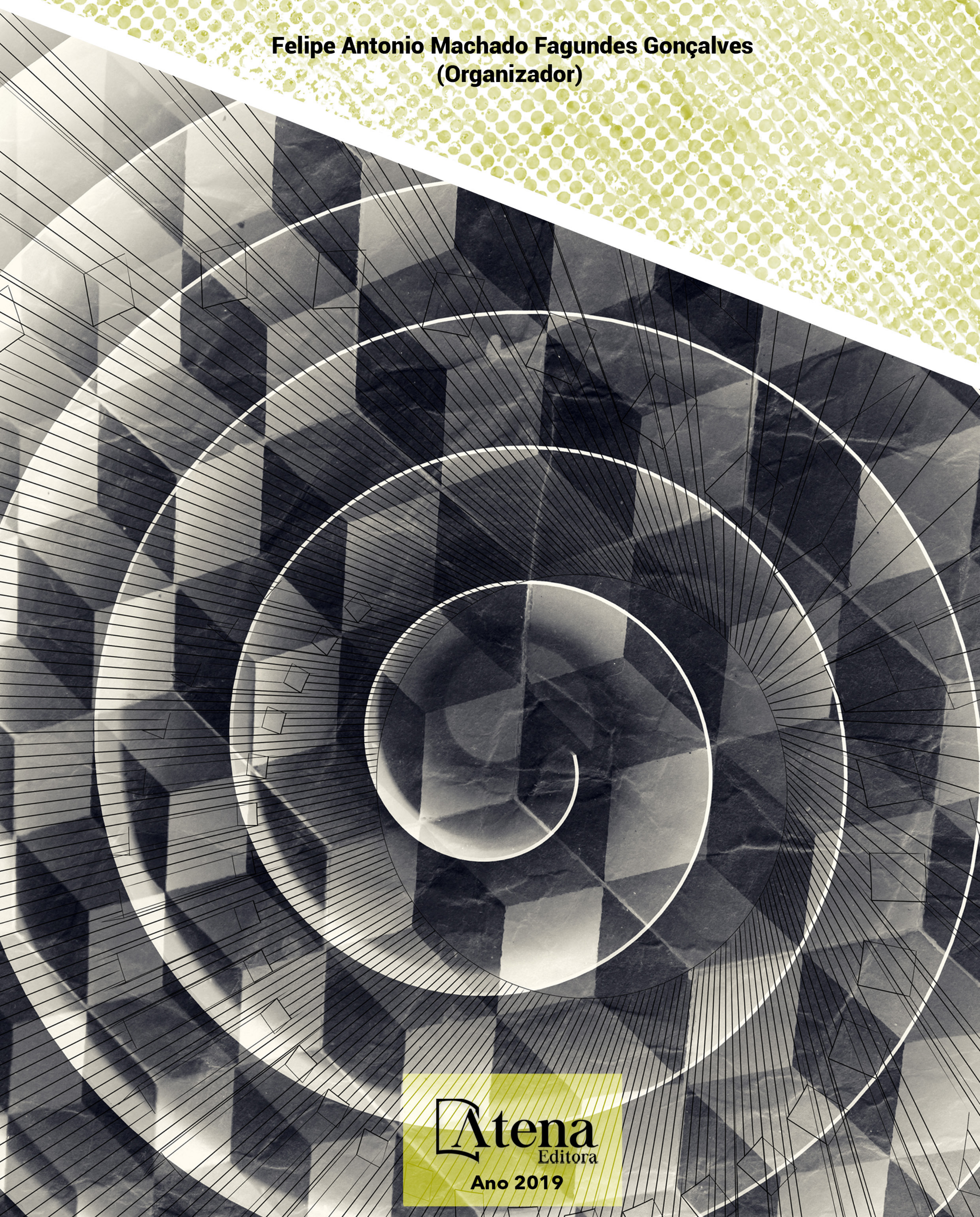
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)



Atena Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora
2019

Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E24 Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-348-4
DOI 10.22533/at.ed.484192405

1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2.Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2019

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêem contribuir de maneira muito significante para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõe estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 14

SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY

Gino Gustavo Maqui Huamán
Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará
Belém, Pará

Ulcilea Alves Severino Leal
Universidade Federal do Triângulo Minero
Iturama, Minas Gerais

Geraldo Nunes Silva
Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Estadual Paulista
São José do Rio Preto, São Paulo

RESUMO: Este trabalho apresenta um dos conceitos elementares da análise intervalar e da matemática fuzzy, objetivando-se mostrar aplicações e implicações das aritméticas intervalares no contexto fuzzy. Neste sentido, será apresentado sequências intervalares, convergência e suas propriedades, e posteriormente, estendidas no contexto fuzzy. Além disso, será exemplificado a influência das aritméticas intervalares no princípio de extensão de Zadeh. Finalmente, serão estudadas as sequências de números fuzzy.

PALAVRAS-CHAVE: Aritmética Intervalar, Princípio de Extensão de Zadeh, Sequências Fuzzy.

ABSTRACT: This paper presents one of the elementary concepts of interval analysis and fuzzy mathematics, aiming to show applications and implications of interval arithmetic in the fuzzy context. In this way, we will present interval sequences, convergence and their properties, and later, extended in the fuzzy context. In addition, the influence of interval arithmetic on the Zadeh extension principle will be exemplified. Finally, the sequences of fuzzy numbers will be studied.

KEYWORDS: Interval Arithmetic, Zadeh's Extension Principle, Fuzzy Sequences.

1 I INTRODUÇÃO

A análise intervalar e a teoria dos conjuntos fuzzy são disciplinas matemáticas relativamente novas, difundidas e criadas por R. E. Moore e L. A. Zadeh, respectivamente. Moore com seu livro em análise intervalar (MOORE, 1966) em 1966 e Zadeh com seu original e influente artigo sobre teoria de conjuntos fuzzy (ZADEH, 1965) em 1965, estes trabalhos, com o passar do tempo, mostraram uma conexão entre estas áreas na matemática das incertezas. R.E. Moore junto com seus colaboradores aportaram ao desenvolvimento da análise no contexto intervalar, começando com a computação científica, equações diferenciais, análise funcional, otimização global e álgebra linear intervalar. Alguns destes resultados foram utilizados no desenvolvimento da teoria Fuzzy, como também, resultados do contexto fuzzy foram utilizados no contexto intervalar. Isto pode ser evidenciado em Interval and fuzzy analysis: A unified approach de W. A. Lodwick (LODWICK, 2007), por outro lado a aritmética encontrada em Moore (MOORE, 1966) produz uma sobre-estimação nos cálculos, ver (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006), fato que motivou o nosso interesse em estudar outra estrutura algébrica intervalar e aplicar-a as sequencias intervalares e fuzzy.

2 I ESPAÇO INTERVALAR

Esta seção apresenta definições básicas da análise intervalar e algumas propriedades destas, onde essas podem ser encontradas com maior detalhe em (MOORE, 1966), (LODWICK, 2007) e (MAQUI-HUAMAM, 2014).

Definição 2.1 (MAQUI-HUAMAM, 2014) Chama-se de subespaço intervalar próprio real ao conjunto $\mathbb{I}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de modo que os elementos de $\mathbb{I}$ sejam da forma $[\underline{a},\overline{a}]=\{z\in\ ;\underline{a}\le z\le\overline{a}\}$. Em geral, diz que, $\mathbb{I}^n\subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é o subespaço intervalar próprio n-dimensional, sendo este definido pelo produto cartesiano de n subespaços intervalares próprios reais, isto é, $\underbrace{\mathbb{I}\times\ldots\times\mathbb{I}}_{n-\text{vezes}}$; os elementos deste conjunto são denominados de vetores intervalares n-dimensionais e serão denotados por uma n-upla intervalar do tipo $(X_1, X_2,\ldots, X_n)$, onde $X_i\in\mathbb{I}, \forall i=1,2,\ldots,n$.

Chama-se de Intervalo degenerado ao intervalo $X=[\underline{a},\overline{a}]\in\mathbb{I}$ onde $\underline{a}=\overline{a}$.

Definição 2.2 (LODWICK, 2007) Um intervalo $A=[\underline{a},\overline{a}]$, é o grafo de uma função real $A^I(\lambda_a)$, onde:

$$A^I(\lambda_a)=\underline{a}+\lambda_a(\overline{a}-\underline{a});\ \lambda_a\in[0,1] \tag{1}$$

Estritamente falando, em (1) como os números $\underline{a}$ e $\overline{a}$ são conhecidos, eles serão coeficientes, enquanto λ_a esta variando entre 0 e 1. $A^I(\lambda_a)$ será chamada de função restrição associada ao intervalo A. Para simplificar a notação escreveremos $\lambda,\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ para denotar aos parâmetros associados a cada intervalo. Assim a representação paramétrica restrita de um intervalo A será:

$$A=[\underline{a},\overline{a}]=\left\{a(\lambda)=\underline{a}+\lambda_a(\overline{a}-\underline{a});\ \lambda_a\in[0,1]\right\}.$$

Todo elemento A de $\mathbb{I}$ tem associado uma função restrição. Sobre o espaço $\mathbb{I}$ são definidas algumas aritméticas que, pelo geral, são utilizadas nos contextos intervalares e fuzzy. Com uma estrutura métrica neste espaço, o conceito de convergência de sequências intervalares será analisado.

2.1 Operações Aritméticas

Consideremos dois intervalos $A=\{a(\lambda_1):\lambda_1\in[0,1]\}$ e $B=\{b(\lambda_2):\lambda_2\in[0,1]\}$, , então:

$$\begin{aligned} A \circledast B &= C \\ &= [\underline{c},\overline{c}] \\ &= \{a(\lambda_1)*b(\lambda_2):\lambda_1,\lambda_2\in\delta\} \\ &= \{c: c=a(\lambda_1)*b(\lambda_2), \lambda_1,\lambda_2\in\delta\} \\ \text{onde } \underline{c} &= \min\{c\},\ \overline{c}=\max\{c\}, \delta\subset\mathbb{R} \\ &\ \text{e } *\in\{+,-,\times,\div\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Definição 2.3 (Aritmética Intervalar Restrita – CIA) Dados $A,B\in\mathbb{I}$ e considerando (2) esta aritmética fica determinada quando $\delta=\{0,1\}$..

Definição 2.4 (Aritmética Intervalar Standard – SAI) Dados $A,B\in\mathbb{I}$ e considerando (2) esta aritmética fica determinada quando $\delta=\{0,1\}$..

Definição 2.5 (Aritmética Intervalar Restrita em Níveis Simples – SLCIA) Dados $A,B\in\mathbb{I}$ e considerando (2) esta aritmética fica determinada quando $\lambda_1=\lambda_2$ e $\delta=[0,1]$..

Definição 2.6 Dados $A,B\in\mathbb{I}$ a métrica de Pompeiu-Hausdorff é definida por $H:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\to\mathbb{R}_0^+$, tal que:

$$H(A,B)=\max\{d_1(A,B),d_1(B,A)\},$$

onde, $d_1:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\to\mathbb{R}_0^+$ dado por:

$$d_1(A,B)=\sup_{a\in A} d_2(a,B)$$

é uma quase métrica, e $d_2:\mathbb{R}\times\mathbb{I}\to\mathbb{R}_0^+$ é dado por

$$d_2(a,B)=\inf_{b\in B} d_3(a,b)$$

com d_3 distância euclidiana.

Equivalente a esta métrica tem-se a métrica d, onde dados $A,B\in\mathbb{I}$, $d:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\to\mathbb{R}_0^+$ é definida por:

$$d(A,B)=\max_{\lambda\in[0,1]}\left|A(\lambda)-B(\lambda)\right|,$$

Onde A(ʎ), B(ʎ) são as funções restrição associadas a A e B, respectivamente, ver (CHALCO-CANO, LODWICK E BEDE, 2014).

Definição 2.7 (MAQUI-HUAMAM, 2014) Seja $\mathbb{I}$ o espaço intervalar próprio. Uma sequência em $\mathbb{I}$ é uma aplicação $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{I}$. Onde, φ é denotada por:

$$(A_n);\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{ ou } (A_0,A_1,A_2,\ldots)$$

e $A_n:=\phi(n)$ é o n-ésimo termo da sequência $\phi=(A_0,A_1,A_2,\ldots)$..

Definição 2.8 (MAQUI-HUAMAM, 2014) Dada uma sequência de números intervalares $(A_n); A_n \in \mathbb{I}, \forall n$ (não necessariamente monótona), diz-que A_n converge para o número intervalar A, e escreve-se $A = \lim A_n$, quando para cada $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, for possível obter um número n_0 ϵ tal que H (A_n, A) < ϵ, sempre que $n > n_0$.

Proposição 2.1 (MAQUI-HUAMAM, 2014) A sequência de números intervalares (A_n) é convergente se, e somente se, (A_n) é convergente nível a nível. Isto é, a sequência (A_n) é convergente nível a nível se, e somente se $A_n(l)$ é convergente para cada $\lambda \in [0,1]$.

3 I PRELIMINARES DA LÓGICA E MATEMÁTICA FUZZY

A seguir, apresenta-se conceitos fundamentais, ver (BARROS e BASSANEZI, 2006), (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006), para o desenvolvimento de conceitos básicos sobre conjuntos fuzzy utilizando o conceito de α-nível.

Definição 3.1 (BARROS e BASSANEZI, 2006) Seja U um conjunto clássico; um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função

$$\mu_F : U \to [0,1\}$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy F Assim, ao falar sobre conjunto um fuzzy simplesmente será mencionada a sua função de pertinência para referir-se ao conjunto.

3.1 Níveis de Conjunto Fuzzy

Definição 3.2 (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006) Seja μ: $^n \to [0,1]$ e α ϵ [0,1]. Define-se o α-nível de μ como o conjunto:

$$[\mu]^\alpha = \{x \in {}^n : \mu(x) \geq \alpha\},\ \alpha > 0$$

Além disso, o Suporte $[\mu]^0$ de um conjunto
fuzzy μ é definido por:

$$supp(\mu) = [\mu]^0 = \overline{\{x \in {}^n : \mu(x) > \alpha\}}.$$

Definição 3.3 (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006) Dado um conjunto fuzzy μ em □, diz-se que:

1. μ é compacto, se $[\mu]^\alpha$ é compacto para todo α ϵ [0,1] ;
2. μ é convexo, se $[\mu]^\alpha$ é convexo para todo α ϵ [0,1];
3. μ é normal, se existe x ϵ tal que μ (x) = 1.

Denota-se por:

- $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ a família de conjuntos fuzzy compactos e normais.
- $\mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ a família de conjuntos fuzzy compactos, convexos e normais, família que normalmente é conhecida como família de intervalos fuzzy e cujos elementos chamaremos de números fuzzy.

3.2 Operações Algébricas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Observe que, se $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, então as operações algébricas usuais entre funções não são adequadas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Por exemplo, se somar μ_1 e μ_2 ponto a ponto, poderia ocorrer que:

$$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) \notin [0,1].$$

Visando superar essa situação utiliza-se o chamado princípio de extensão de Zadeh, como definido a seguir:

Definição 3.4 (Princípio de Extensão de Zadeh)

Seja f: X1 x X2 → Y uma função, f pode ser estendida ao contexto fuzzy por:

$$\hat{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \to \mathcal{F}(Y)$$

onde:

$$\hat{f}(\mu_1, \mu_2)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) & \text{se} \quad f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & \text{se} \quad f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

para cada y є Y.

Mesmo que, o Princípio de Extensão estenda o conceito de uma função aplicada a um subconjunto clássico de X, em geral, o cálculo de $\hat{f}$ não foi implementada de modo prático, exceto para funções muito simples.

Exemplo 3.1 Seja f: □ → □ definida por $f(x) = ax + b$ com a≠0 pode-se obter facilmente $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ definida por: $\hat{f}(\mu)(y) = \mu\left(\frac{a}{y-b}\right), \forall \mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.1 Sejam f: X_1 x X_2 → Y uma função contínua e µ um subconjunto fuzzy de X_1 x X_2, então para todo α є [0,1] vale: $[\hat{f}(m)]^a = f([m]^a)$.

Este resultado indica que os α-níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo princípio de extensão, coincidem com as imagens dos α-níveis determinado pela função crisp. Contudo, obter $\dot{f}$ (µ) utilizando a aritmética intervalar standard traz um sério inconveniente, o que acontece nos processos de cálculo com intervalos e é conhecido como efeito de sobrestimação.

Exemplo 3.2 Considere o número triangular fuzzy µ(1/2;1;3/2) onde:

$$[\mu]^\alpha = \left[\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2}\right].$$

Para obter $\mu^2 - 2\mu$, utiliza-se a função F: □→□ definida por f (x) = $x^2 - 2x$ e a partir dai obtêm-se $\dot{f}$ (µ) = $\mu^2 - 2\mu$. Utilizando a SIA teremos que:

$$[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-\frac{11}{4}, \frac{5}{4}\right]$$

Agora, se fatorar a função a ser estendida; isto é, f (x) = x(x-2) se obtém a sua extensão: ḟ (μ) = μ (μ -2). Dessa forma, $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-\frac{9}{4}, -\frac{1}{4}\right]$. Todavia, se utilizar a SLCIA pode-se observar que mesmo fatorando a função a se estendida obtêm-se o mesmo resultado. Neste contexto, $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-1, -\frac{3}{4}\right]$ independentemente se f (x) = x^2 - 2x ou f(x) = x (x-2).

Proposição 3,1 Sejam A e B números fuzzy com α-níveis dados, respectivamente, por $[A]^a = [\underline{A}_a, \overline{A}_a]$ e $[B]^a = [\underline{B}_a, \overline{B}_a]$. Então, utilizando a SLCIA valem as seguintes propriedades:

1. $[A \pm B]^\alpha = [A]^\alpha \pm [B]^\alpha$;
2. $[\delta A]^\alpha = \delta[A]^\alpha$;
3. $[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha$;
4. $\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} \quad 0 \notin [B]^\alpha$.

Considerando o exemplo anterior e aplicando a Teorema, tem que $[\hat{f}(\mu)]^\alpha = f([\mu]^\alpha)$ é uma função intervalar, e assim, ela pode ser descrita por:

$$f([\mu]^\alpha) = f\left(\left[\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2}\right]\right) = \left[\min_{\lambda\in[0,1]}\{f_\lambda([\mu]^\alpha)\}, \max_{\lambda\in[0,1]}\{f_\lambda([\mu]^\alpha)\}\right],$$

onde $f_\lambda([\mu]^\alpha) = \left(\frac{1+\alpha}{2} + \lambda(1-\alpha)\right)^2 - 2\left(\frac{1+\alpha}{2} + \lambda(1-\alpha)\right)$.

Destas últimas expressões se considerar o nível zero obtêm-se:

$$f([\mu]^0) = f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[\min_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4}\}, \max_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4}\}\right] = \left[-1, -\frac{3}{4}\right].$$

Note que, isto é o esperado quando analisamos a imagem desta função ponto a ponto.

Uma outra aplicação imediata da SLCIA é a seguinte:

3.3 Sequências de Números Fuzzy

Nesta parte será apresentada a sequência de números fuzzy e analisada a sua convergência.

Definição 3.5 Uma sequência em $\mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ é simplesmente uma função $A : \mathbb{N} \to \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ denotada por:

$$(A_n);\ (A_n)_{n\in} \quad ou \quad (A_0, A_1, A_2, \ldots)$$

Essas sequências serão chamadas de Sequências de Números Fuzzy, e a seguir, define-se a convergência das mesmas.

Definição 3.6 Uma sequência de números fuzzy $(A_n)_{n\in}$ é convergente se sua correspondente sequência de α-níveis o é; isto é,

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \to A \in \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ se, e somente se $([A_n]^\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \to [A]^\alpha \in \mathbb{I}$

Proposição 3.2 Sejam $A_n, B_n, A, B \in \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ tal que $A_n \to A$, $B_n \to B$, então tem-se os seguintes resultados:

i. $A_n \pm B_n \to A \pm B$;

ii. $A_n \cdot B_n \to A \cdot B$;

iii. $\dfrac{A_n}{B_n} \to \dfrac{A}{B}$, para todo B_n $B \not\ni 0$.

Exemplo 3.3 Seja $(A_n)_{n\in}$ uma sequência de números fuzzy, tal que, sua sequência de α-níveis é $([A_n]^\alpha)_{n\in}$ com $[A_n]^\alpha = \left[-1-e^{-n}+(1+e^{-n})\alpha, 1+e^{-n}-(1+e^{-n})\alpha\right]$. Assim, $([A_n]^\alpha)_{n\in} \to [-1+\alpha, 1-\alpha]$. .

Exemplo 3.4 Seja (A_n) uma sequência de números fuzzy, tal que, a sequência de α-níveis é $([A_n]^\alpha)_{n\in}$ e $[A_n]^\alpha = \left[\dfrac{sen\, n}{n} - 1 + a\alpha, 1 + e^{-n} - a\alpha\right]$ onde $a = 1 + \dfrac{1}{2}e^{-n} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{sen\, n}{n}$. É fácil ver que $([A_n]^\alpha)_{n\in} \to [-1+\alpha, 1-\alpha]$.

4 I CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados alguns resultados sobre o Cálculo Intervalar e algumas aplicações no contexto fuzzy, mostrando assim uma forte relação entre estas. O presente estudo é de fundamental importância para o desenvolvimento do cálculo intervalar, das equações diferenciais intervalares e outras áreas via SLCIA. Assim como, cálculo fuzzy, equações diferenciais fuzzy entre outras.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES e FAPESP pelo apoio.

REFERÊNCIAS

BARROS L.C. e BASSANEZI R. C., **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**, Unicamp-Imecc, (2006).

CHALCO-CANO Y., LODWICK W. A., BEDE B. and JENKINS O., **Spline approximation for Zadeh's**

extensions, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, World Scientific, (2008).

CHALCO-CANO Y., LODWICK W. A. and BEDE B., **Single level constraint interval arithmetic**, Fuzzy Sets and Systems 257, 146-168 (2014).

LODWICK W. A., **Interval and fuzzy analysis: A unified approach**, Advances in Imaging and Electron Physics, Elsevier, (2007).

MAQUI-HUAMÁN G. G., **Introdução à Analise Intervalar em Níveis Simples e Extensão de Zadeh**, Dissertação de Mestrado, Unesp-Ibilce, (2014).

MOORE R. E., **Interval analysis**. Vol. 4. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, (1966).

ZADEH L. A., **Fuzzy sets**. Information and control, v. 8, n. 3, p. 338-353, (1965).

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-348-4
9 788572 473484