

# As Ciências Exatas e da Terra no Século XXI

**Alan Mario Zuffo  
Jorge González Aguilera  
(Organizadores)**

Alan Mario Zuffo  
Jorge González Aguilera  
(Organizadores)

# As Ciências Exatas e da Terra no Século XXI

Atena Editora  
2019



2019 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2019 Os Autores  
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora  
Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de  
Oliveira Diagramação: Lorena Prestes  
Edição de Arte: Lorena Prestes  
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Profª Drª Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

### **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

### **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
C569	As ciências exatas e da terra no século XXI [recurso eletrônico] / Organizadores Alan Mario Zuffo, Jorge González Aguilera. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019.  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-351-4 DOI 10.22533/at.ed.514192405  1. Ciências exatas e da terra – Pesquisa – Brasil. I. Zuffo, Alan Mario. II. Aguilera, Jorge González.  CDD 507
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

A obra “As Ciências Exatas e da Terra no Século XXI” aborda uma publicação da Atena Editora, apresenta, em seus 18 capítulos, conhecimentos tecnológicos aplicados às Ciências Exatas.

Este volume dedicado à Ciência Exatas traz uma variedade de artigos alinhados com a produção de conhecimento na área de Matemática, ao tratar de temas como aritmética multidimensional RDM, a teoria da complexidade no estudo de atividade cerebral e o ensino da matemática e sua contribuição no desenvolvimento da consciência ambiental de estudantes. Na área da Mecânica traz trabalhos relacionados com uso do sensor de vibração piezo e a placa BlackBoard V1.0, como ferramenta para avaliar a conservação de casas e prédios qualificados como históricos ou com valor cultural à sociedade. Estudos de adição de nanotubos de carbono no concreto convencional também são abordados. Na área de Agronomia são abordados temas inovadores como a identificação de doenças com técnicas de visão computacional, emprego da técnica de espectroscopia e a calibração por regressão linear múltipla na determinação de misturas com óleos vegetais de oliva, entre outros temas.

Aos autores dos diversos capítulos, pela dedicação e esforços sem limites, que viabilizaram esta obra que retrata os recentes avanços científicos e tecnológicos nas Ciências Exatas, os agradecimentos dos Organizadores e da Atena Editora. Por fim, esperamos que este livro possa colaborar e instigar mais estudantes e pesquisadores na constante busca de novas tecnologias para a área da Física, Matemática, Mecânica e na Agronomia e, assim, contribuir na procura de novas pesquisas e tecnologias que possam solucionar os problemas que enfrentamos no dia a dia.

Alan Mario Zuffo  
Jorge González Aguilera

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
ANÁLISE NUMÉRICA DOS DIFERENTES PROCESSOS DA MULTIPLICAÇÃO INTERVALAR	
Alice Fonseca Finger	
Aline Brum Loreto	
Dirceu Antonio Maraschin Junior	
Lucas Mendes Tortelli	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5141924051</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>10</b>
APLICAÇÃO DA TEORIA DA COMPLEXIDADE AO ESTUDO DE ATIVIDADE CEREBRAL REGISTRADA EM DADOS DE EEG (ELETROENCEFALOGRAMA)	
Sanielen Colombo	
Eduardo Augusto Campos Curvo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5141924052</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>24</b>
APRIMORAMENTO DO BANCO DE METABÓLITOS SECUNDÁRIOS PARA AUXÍLIO NA BIOPROSPECÇÃO DIRECIONADOS A ESTUDOS QUIMIOTAXONÔMICOS E DE TRIAGEM VIRTUAL DE ESTRUTURAS COM POTENCIAL ATIVIDADE ANTIPROTOZOÁRIA	
Bianca Guerra Tavares	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5141924053</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>29</b>
AVALIAÇÃO PRELIMINAR DO RISCO DE CONTAMINAÇÃO DOS RECURSOS HÍDRICOS POR PESTICIDAS UTILIZADOS NO CULTIVO DA SOJA EM TRÊS MUNICÍPIOS DA REGIÃO OESTE DO PARÁ	
Joseph Simões Ribeiro	
Alessandra de Sousa Silva	
Ronison Santos da Cruz	
Bianca Larissa de Mesquita Sousa	
Ruy Bessa Lopes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5141924054</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>36</b>
DANOS OCASIONADOS EM RESIDÊNCIAS HISTÓRICAS POR VIBRAÇÕES	
Jussiléa Gurjão de Figueiredo	
Louise Aimeé Reis Guimarães	
Ylan Dahan Benoliel Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5141924055</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>44</b>
DETERMINAÇÃO DA COMPOSIÇÃO CENTESIMAL DA PLANTA ALIMENTÍCIA NÃO CONVENCIONAL (PANC) ORA-PRO-NÓBIS PARA O DESENVOLVIMENTO DE UMA RAÇÃO ENRIQUECIDA COM <i>Tenebrio molitor</i> PARA GALINÁCEOS	
Gabriel José de Almeida	
Jorge Luís Costa	
Maira Akemi Casagrande Yamato	
Mariana Souza Santos	
Vitoria Rodilha Leão	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5141924056</b>	

<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>57</b>
DUAS PARTÍCULAS NUM BILHAR QUÂNTICO	
Pedro Chebensi Júnior	
Hércules Alves de Oliveira Junior	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5141924057</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>64</b>
ELABORAÇÃO DE ATLAS AMBIENTAL DIGITAL PARA A MICRORREGIÃO DE FOZ DO IGUAÇU/PR	
Vinícius Fernandes de Oliveira	
Samuel Fernando Adami	
Giovana Secretti Vendruscolo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5141924058</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>72</b>
ESTUDO DO AQUECIMENTO DE UM <i>RASPBERRY PI 3</i> EM MANIPULAÇÃO DE IMAGEM E IMPLEMENTAÇÃO DE SISTEMA TÉRMICO	
Daniel Rodrigues Ferraz Izario	
Yuzo Iano	
Bruno Rodrigues Ferraz Izario	
Carlos Nazareth Motta Marins	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5141924059</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>83</b>
ESTUDO LABORATORIAL DE PROPRIEDADES MECÂNICAS E DE FLUIDEZ A PARTIR DA ADIÇÃO DE NANOTUBOS DE CARBONO NO CONCRETO CONVENCIONAL	
Késsio Raylen Jerônimo Monteiro	
Pedro Bonfim Segobia	
Peter Ruiz Paredes	
Simone Ribeiro Lopes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.51419240510</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>95</b>
EVOLUÇÃO DA COMPUTAÇÃO AUTONÔMICA E ADOÇÃO DO MODELO MAPE-K: UMA PESQUISA BIBLIOGRÁFICA	
Rosana Cordovil da Silva	
Renato José Sassi	
<b>DOI 10.22533/at.ed.51419240511</b>	
<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>109</b>
FLUXO DE ATAQUE DPA/DEMA BASEADO NA ENERGIA DE TRAÇOS PARA NEUTRALIZAR CONTRAMEDIDAS TEMPORAIS NAS ARQUITETURAS GALS4	
Rodrigo Nuevo Lellis	
Rafael Iankowski Soares	
Vitor Gonçalves de Lima	
<b>DOI 10.22533/at.ed.51419240512</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>115</b>
O ENSINO DA MATEMÁTICA E SUA CONTRIBUIÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DA CONSCIÊNCIA AMBIENTAL DOS ESTUDANTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Cláudio Cristiano Liell	
Arno Bayer	
<b>DOI 10.22533/at.ed.51419240513</b>	

<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>130</b>
OS DESAFIOS ENFRENTADOS PELA COMUNIDADE ESCOLAR AO LIDAR COM ALUNOS COM TDAH EM PEDRO LEOPOLDO/MG	
Aurea Helena Costa Melo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.51419240514</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>143</b>
PDI SOFTWARE: IDENTIFICAÇÃO DE FERRUGEM EM FOLHAS DE SOJA COM TÉCNICAS DE VISÃO COMPUTACIONAL	
Hortência Lima Gonçalves Gabriel Rodrigues Pereira Rocha George Oliveira Barros Cássio Jardim Tavares	
<b>DOI 10.22533/at.ed.51419240515</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>148</b>
PERCEÇÃO DA GESTÃO GEOLÓGICA E AMBIENTAL NA PREFEITURA DE SANTA CRUZ DO SUL, RIO GRANDE DO SUL	
Cândida Regina Müller Thays França Afonso Luciano Marquette Verônica Regina de Almeida Vieira Luis Eduardo Silveira da Mota Novaes Leandro Fagundes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.51419240516</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>154</b>
PROCESSAMENTO DE IMAGENS PARA A DETECÇÃO DE PLACAS VEICULARES NO CONTROLE DE ACESSO EM ÁREAS RESTRITAS	
Yan Patrick de Moraes Pantoja Bruno Yusuke Kitabayashi Rafael Fogarolli Vieira Raiff Smith Said	
<b>DOI 10.22533/at.ed.51419240517</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>163</b>
DO PROPOSTA DE ARQUITETURA DE REDE NEURAL CONVOLUCIONAL INTERVALAR PARA O PROCESSAMENTO DE IMAGENS INTERVALARES	
Ivana P. Steim Lucas M. Tortelli Marilton S. Aguiar Aline B. Loreto	
<b>DOI 10.22533/at.ed.51419240518</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>173</b>
QUANTIFICAÇÃO DE AZEITE DE OLIVA EM MISTURAS COM ÓLEOS VEGETAIS UTILIZANDO FTIR E CALIBRAÇÃO POR REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA	
Lucas Wahl da Silva Clayton Antunes Martin	
<b>DOI 10.22533/at.ed.51419240519</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>177</b>
QUANTIFICAÇÃO DE PARTÍCULAS POR ESPALHAMENTO DE LUZ E DETERMINAÇÃO DA COR	



DE ÁGUAS

David Antonio Brum Siepmann  
Ricardo Schneider  
Alberto Yoshihiro Nakano  
Paulo Afonso Gaspar  
Antonio Cesar Godoy  
Felipe Walter Dafico Pfrimer

**DOI 10.22533/at.ed.51419240520**

**CAPÍTULO 21 ..... 193**

AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE MUROS DE GRAVIDADE CONSTRUÍDO COM  
SOLO-PNEUS

Guilherme Faria Souza Mussi de Andrade  
Daniel Silva Lopez  
Bruno Teixeira Lima  
Ana Cristina Castro Fontenla Sieira  
Alberto de Sampaio Ferraz Jardim Sayão

**DOI 10.22533/at.ed.51419240521**

**SOBRE OS ORGANIZADORES..... 208**

## ANÁLISE NUMÉRICA DOS DIFERENTES PROCESSOS DA MULTIPLICAÇÃO INTERVALAR

### **Alice Fonseca Finger**

Universidade Federal de Pelotas, CDTec  
Pelotas – RS

### **Aline Brum Loreto**

Universidade Federal de Santa Maria, Campus  
Cachoeira do Sul  
Cachoeira do Sul – RS

### **Dirceu Antonio Maraschin Junior**

Universidade Federal de Pelotas, CDTec  
Pelotas – RS

### **Lucas Mendes Tortelli**

Universidade Federal de Pelotas, CDTec  
Pelotas – RS

**RESUMO:** A matemática intervalar tem sido cada vez mais utilizada como uma alternativa para tratar problemas nos cálculos com números de ponto flutuante, uma vez que operar com esse tipo de dado pode levar a resultados com erros. O resultado é apenas uma aproximação de um valor real e erros gerados por arredondamentos ou por instabilidade dos algoritmos podem levar a resultados incorretos. A definição da aritmética intervalar mais conhecida e mais utilizada é a de Moore em 1966. Após, várias contribuições foram feitas quanto as operações intervalares, como por exemplo o cálculo da multiplicação intervalar com base na classificação em que os intervalos se encontram. Mais recentemente, uma nova

aritmética intervalar foi desenvolvida, chamada aritmética intervalar multidimensional RDM. Com diferentes maneiras para a multiplicação intervalar, o objetivo do trabalho é comparar os três processos: multiplicação definida por Moore, multiplicação com base na classificação em regiões e a multiplicação definida na aritmética RDM, apresentar resultados numéricos quando aplicados em uma equação e realizar a análise numérica através das métricas de Erro Absoluto e diâmetro dos intervalos solução. Diante dos resultados é possível afirmar que a aritmética multidimensional RDM retorna intervalos solução com mais qualidade.

**PALAVRAS-CHAVE:** Matemática intervalar, RDM, multiplicação intervalar.

**ABSTRACT:** Interval math has been increasingly used as an alternative to handle problems in calculations with floating-point numbers, once operating with this kind of data can lead to errors. The result is only an approximation of a real value and errors generated by rounding or by instability of the algorithms can lead to incorrect result values. The definition of the most known and most widely used interval arithmetic is that of Moore in 1966. Afterwards, many contributions were made regarding interval operations, such as the calculation of interval multiplication based on the rank in which the intervals are found. Recently, a new interval

arithmetic was developed, denominated multidimensional interval arithmetic RDM. With different ways for intervalar multiplication, the objective of the work is to compare four processes: multiplication defined by Moore, multiplication based on the classification in regions, multiplication by Kaucher and the multiplication defined in RDM arithmetic. Present numerical results when applied in an equation and perform numerical analysis using the absolute error and diameter of solution interval metrics. Given the results it is possible to state that multidimensional RDM arithmetic returns solution intervals with higher quality.

**KEYWORDS:** Interval mathematics, RDM, interval multiplication.

## 1 | INTRODUÇÃO

Os computadores empregam aritmética chamada de ponto flutuante ou ponto fixo. Nesta aritmética, números reais são aproximados por um subconjunto finito de números reais chamados números de máquina representáveis. Devido a esta representação são gerados erros. Tais erros podem ocorrer quando um valor real de entrada é aproximado por um número de máquina, quando resultados intermediários são gerados na execução de cada operação e vão se acumulando, ou ainda, um outro tipo de erro relacionado com a incerteza dos dados de entrada, o que acontece muito em casos de experimentos físicos e químicos onde os dados de entrada são incertos (RATSCHEK, ROKNE, 1988).

A análise intervalar surgiu com o objetivo inicial de controlar a propagação de erros numéricos em procedimentos computacionais. Ela traz uma garantia de resultado correto, uma vez que o valor real sempre está contido no intervalo solução. A realização das operações é feita por meio de números de ponto flutuante, isto é, os extremos do intervalo  $[x]$  são números de máquina  $\underline{x}_{pf}$  e  $\bar{x}_{pf}$  (MOORE, 1966; MOORE, 1979; MOORE, KEARFOTT, CLOUD, 2009).

Entretanto, é preciso que o intervalo solução tenha qualidade. Para analisar a qualidade deste intervalo é preciso utilizar métricas como diâmetro, erro absoluto, erro relativo, entre outras.

Dentre as diversas maneiras de se calcular o produto entre intervalos, o objetivo do presente trabalho é apresentar as definições devidas a Moore, Vaccaro e Piegat e Landowski, mais utilizadas para essa operação e, através de uma aplicação, apresentar e discutir os resultados. Adicionalmente, realiza-se uma análise numérica para cada processo, podendo então verificar qual o melhor método a ser utilizado. A seguir são descritos os três diferentes processos adotados no presente trabalho: Moore, Vaccaro e RDM.

## 2 | DIFERENTES PROCESSOS PARA MULTIPLICAÇÃO INTERVALAR

Nesta seção serão apresentados os diferentes processos de multiplicação

intervalar que serão adotados e analisados neste trabalho.

## 2.1 Multiplicação definida por Moore

Na aritmética intervalar desenvolvida por Moore (1966), todas as operações aritméticas básicas estão definidas com o tipo intervalo, são elas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Pelas definições de Moore os cálculos com intervalos ocorrem sobre conjuntos, ou seja, quando se realiza uma operação de adição entre dois intervalos, por exemplo, o intervalo resultante é um novo conjunto contendo as adições de todos os pares de números das duas séries iniciais. Nessa aritmética, quando o método de extensão intervalar é aplicado, apenas os extremos do intervalo são considerados, isto é, somente os valores que representam os limites do intervalo são utilizados nos cálculos.

Abaixo encontra-se a operação de multiplicação definida por Moore, a qual será utilizada neste trabalho. As demais operações aritméticas básicas podem ser facilmente encontradas na literatura.

$$[x] \times [y] = \left[ \min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\} \right] \quad (1)$$

Caso os dois intervalos sejam positivos, a multiplicação pode ser feita da seguinte maneira:

$$[x] \times [y] = [\underline{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}] \quad (2)$$

Uma das primeiras partições de  $\mathbb{R}$  conhecidas é a sugerida por Moore (1966), a qual baseia-se nos sinais dos extremos dos intervalos: ++, +- e --. Esta partição permitiu-lhe definir expressões otimizadas para o cálculo da multiplicação de intervalos, sendo que apenas um de nove casos apresentados necessita de mais de dois produtos de reais para ser obtido (MOORE, 1966). Sejam  $A = [\underline{x}, \bar{x}]$  e  $B = [\underline{y}, \bar{y}]$ :

- 
- $\underline{x} \geq 0$  e  $\underline{y} \geq 0 \rightarrow A \times B = [\underline{x} \times \underline{y}, \bar{x} \times \bar{y}]$
- $\underline{x} \geq 0$  e  $\underline{y} < 0 \leq \bar{y} \rightarrow A \times B = [\bar{x} \times \underline{y}, \bar{x} \times \bar{y}]$
- $\underline{x} \geq 0$  e  $\bar{y} < 0 \rightarrow A \times B = [\bar{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \bar{y}]$
- $\underline{x} < 0 \leq \bar{x}$  e  $\underline{y} \geq 0 \rightarrow A \times B = [\underline{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \bar{y}]$
- $\underline{x} < 0 \leq \bar{x}$  e  $\underline{y} \leq 0 \leq \bar{y} \rightarrow A \times B = [\min\{\underline{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \underline{y}\}, \max\{\underline{x} \times \underline{y}, \bar{x} \times \bar{y}\}]$
- $\underline{x} < 0 \leq \bar{x}$  e  $\bar{y} < 0 \rightarrow A \times B = [\bar{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \bar{y}]$
- $\bar{x} < 0$  e  $\underline{y} \geq 0 \rightarrow A \times B = [\underline{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \underline{y}]$



- $< 0$  e  $\underline{y} < 0 \leq \bar{y} \rightarrow A \times B = [\underline{x} \times \bar{y}, \underline{x} \times \underline{y}]$
- $< 0$  e  $\bar{y} < 0 \rightarrow A \times B = [\underline{x} \times \bar{y}, \underline{x} \times \underline{y}]$

Para fins de implementação em computadores, pode-se minimizar os cálculos feitos no caso da multiplicação, considerando-se os sinais dos extremos dos intervalos, os quais levam aos nove casos apresentados acima.

## 2.2 Cobertura de intervalos reais na multiplicação segundo Vaccaro

Abaixo apresenta-se a definição de cobertura de intervalos com separação de fronteiras proposta por Vaccaro (2001) e que será utilizada na comparação de resultados ao final do trabalho.

(Cobertura de  $\mathbb{R}$  com Separação de Fronteiras): seja  $[x] \in \mathbb{R}$ . Então  $[x]$  pertence a somente uma das oito regiões, denominadas O, I, BI, II, BII, III, BIII e IV, conforme especificado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} [x] \in O, & \underline{x} = \bar{x} = 0 \\ [x] \in I, & 0 < \underline{x} \leq \bar{x} \\ [x] \in BI, & 0 = \underline{x} < \bar{x} \\ [x] \in II, & (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| < \bar{x}) \\ [x] \in BII, & (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| = \bar{x}) \\ [x] \in III, & (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| > \bar{x}) \\ [x] \in BIII, & \underline{x} < \bar{x} = 0 \\ [x] \in IV, & \underline{x} \leq \bar{x} < 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{ll} [x] \in O, & \underline{x} = \bar{x} = 0 \\ [x] \in I, & m([x]) > 0 \wedge \underline{x} > 0 \\ [x] \in BI, & m([x]) > 0 \wedge \underline{x} = 0 \\ [x] \in II, & m([x]) > 0 \wedge \underline{x} < 0 \\ [x] \in BII, & m([x]) = 0 \wedge \bar{x} > 0 \\ [x] \in III, & m([x]) < 0 \wedge \bar{x} > 0 \\ [x] \in BIII, & m([x]) < 0 \wedge \bar{x} = 0 \\ [x] \in IV, & m([x]) < 0 \wedge \bar{x} < 0 \end{array} \right.$$

Além disso, o autor mostra que partindo-se de um elemento da região I e seguindo até um elemento da região IV tem-se uma varredura de intervalos com relação ao volume de contribuição de seus componentes positivos e negativos e que é coerente com as coberturas anteriormente referidas. Logo, a seguinte nomenclatura é adotada:

(Nomenclatura para a Cobertura de  $\mathbb{R}$  pela Contribuição de Sinais): seja  $[x] \in \mathbb{R}$ . Então:

- $[x] \rightarrow O$   $[x]$  é dito nulo;
- $[x] \rightarrow I$   $[x]$  é dito estritamente positivo;
- $[x] \rightarrow BI$   $[x]$  é dito não negativo;
- $[x] \rightarrow II$   $[x]$  é dito não assimétrico positivo;
- $[x] \rightarrow BII$   $[x]$  é dito simétrico;
- $[x] \rightarrow III$   $[x]$  é dito assimétrico negativo;
- $[x] \rightarrow BIII$   $[x]$  é dito não positivo;
- $[x] \rightarrow IV$   $[x]$  é dito estritamente negativo.

A partir dessa definição de regiões, apresenta-se um teorema para o cálculo da multiplicação intervalar com base na classificação em que os intervalos se encontram.

(Classificação e Cálculo da Multiplicação Intervalar): sejam  $[x] \in \mathbb{IR}$  e  $[y] \in \mathbb{IR}$ . Então o produto  $[x]*[y]$  é calculado conforme a Figura 1.

[x]*[y]		[y]							
		O	I	BI	II	BII	III	BIII	IV
[x]	O	[0;0]							
	I	[x* $\underline{y}$ ; $\bar{x}$ * $\bar{y}$ ]		[ $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ; $\bar{x}$ * $\bar{y}$ ]				[ $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ; $\bar{x}$ * $\bar{y}$ ]	
	BI	[0; $\bar{x}$ * $\bar{y}$ ]		[ $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ; $\bar{x}$ * $\bar{y}$ ]				[ $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ; 0]	
	II			[min{x* $\bar{y}$ , $\bar{x}$ * $\underline{y}$ }; $\bar{x}$ * $\bar{y}$ ]		[ $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ; max{x* $\underline{y}$ , $\bar{x}$ * $\bar{y}$ }]			
	BII	[x* $\bar{y}$ ; $\bar{x}$ * $\bar{y}$ ]				[x* $\bar{y}$ ; $\bar{x}$ * $\bar{y}$ ]= [ $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ; $\bar{x}$ * $\bar{y}$ ]= [x* $\bar{y}$ ; x* $\underline{y}$ ]= [ $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ; x* $\underline{y}$ ]		[ $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ; x* $\underline{y}$ ]	
	III			[x* $\bar{y}$ ; max{x* $\underline{y}$ , $\bar{x}$ * $\bar{y}$ }]				[min{x* $\bar{y}$ , $\bar{x}$ * $\underline{y}$ }; x* $\underline{y}$ ]	
	BIII	[x* $\bar{y}$ ; 0]		[ $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ; $\bar{x}$ * $\bar{y}$ ]				[0; x* $\underline{y}$ ]	
	IV	[x* $\bar{y}$ ; $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ]		[ $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ; $\bar{x}$ * $\bar{y}$ ]				[ $\bar{x}$ * $\underline{y}$ ; x* $\underline{y}$ ]	

Figura 1: Regras para o cálculo da multiplicação.

Fonte: (VACCARO, 2001).

### 2.3 Multiplicação aritmética multidimensional RDM

Na aritmética definida por Moore existem algumas limitações com cálculos de intervalos, como intervalos com diâmetro muito grande, por exemplo. A fim de contornar essa e outras limitações, Piegat e Landowski (2012, 2013), desenvolveram uma nova aritmética intervalar, chamada aritmética intervalar multidimensional RDM.

A abreviatura RDM (do inglês, *Relative Distance Measure*) significa Medida da Distância Relativa, sendo caracterizada como multidimensional por cada novo parâmetro de incerteza de um sistema aumentar a sua dimensionalidade. Assim, quando um dado um valor  $x$  pertencente a um intervalo  $[x]$ , ele é descrito da seguinte maneira:

$$[x] = \{x : x = \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x})\}, \quad (3)$$

onde  $\alpha_x \in [0, 1]$  é uma variável RDM.

A Figura 2 abaixo ilustra um intervalo  $x$  e o valor da variável  $\alpha_x$ .

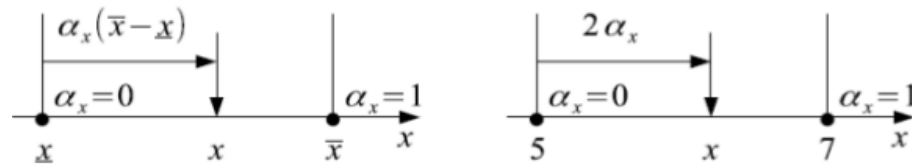


Figura 2: Variável  $\alpha_x$ .

Fonte: (PIEGAT, LANDOWSKI, 2012) .

A partir do entendimento de como são tratados os intervalos na aritmética multidimensional, abaixo define-se a operação de multiplicação nesta aritmética. Considere os intervalos  $[x]$  e  $[y]$ , definidos como:

$$[x] = \{x : x = \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x}), \alpha_x \in [0, 1]\},$$

$$[y] = \{y : y = \underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y}), \alpha_y \in [0, 1]\}.$$

Assim, o produto intervalar entre os intervalos  $[x]$  e  $[y]$  é:

$$[x] \times [y] = \left\{ \left[ \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x}) \right] \times \left[ \underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y}) \right], \alpha_x, \alpha_y \in [0, 1] \right\}.$$

A presente seção apresentou as propriedades e processos de calcular uma operação de multiplicação de três diferentes maneiras. Na multiplicação definida por Moore, é possível calcular o resultado do produto de dois intervalos, no qual os extremos são o valor mínimo e máximo das multiplicações entre os extremos dos intervalos multiplicadores. Já Vaccaro definiu casos com expressões otimizadas para o cálculo da multiplicação de intervalos, tornando o cálculo mais rápido e simples, matematicamente. Por último, apresentou-se o cálculo de multiplicação utilizado na mais recente definição de aritmética intervalar, a aritmética multidimensional RDM. O diferencial nessa definição é que são usadas variáveis do tipo RDM, além de que a cada novo parâmetro aumenta-se a dimensionalidade do sistema.

A próxima seção apresenta os resultados com comparações numéricas entre os

três diferentes cálculos de multiplicação a partir de um exemplo. Além do resultado intervalar, realiza-se a análise de qualidade desse intervalo solução com métricas de diâmetro e erro Absoluto.

### 3 | RESULTADOS

Para comparar os resultados das diferentes multiplicações, foi escolhido um exemplo de multiplicação do trabalho de Landowski (2004). Abaixo encontra-se a equação utilizada na aplicação.

$$C = A - A^2 \quad (4)$$

A partir da equação (4), podemos escrevê-la de duas outras formas, como mostram as equações (5) e (6):

$$C = A(1 - A) \quad (5)$$

$$C = (A - 1) + (1 - A)(1 + A) \quad (6)$$

A computação de intervalos fornece as medidas intervalares de Erro Absoluto (EA), conforme equação (7), e Erro Relativo (ER), para a análise do erro (ou qualidade do intervalo). Outra métrica muito utilizada em intervalos é o diâmetro, ou comprimento, do intervalo, calculado através da diferença entre os limites superior e inferior:  $w(x) = x - x$ .

$$EA = |x - m([x])| < \frac{w([x])}{2}, \quad (7)$$

onde  $m([x]) = (x+x/2)$  é o ponto médio do intervalo  $[x]$ . Observa-se que nas medidas de erros, utiliza-se o ponto médio  $m(x)$  do intervalo  $x$  para medir a distância do valor real em relação ao valor pontual do intervalo.

Salienta-se que neste trabalho não foi possível utilizar a medida de erro relativo, pois os intervalos do exemplo incluem o zero.

Calculando o valor de  $C$  das equações (4), (5) e (6), para  $A = [0,2]$ , usando a aritmética de Moore, Vaccaro e RDM, obtém-se os seguintes resultados:

Eq.	Moore			Vaccaro			RDM		
	Sol.	w(x)	EA	Sol.	w(x)	EA	Sol.	w(x)	EA
(4)	[-4,2]	6	0 < 3	[-4,2]	6	0 < 3	[-2,1/4]	2.25	0 < 1.125



(5)	$[-2,2]$	4	$0 < 2$	$[-2,2]$	4	$0 < 2$	$[-2,1/4]$	2.25	$0 < 1.125$
(6)	$[-4,4]$	8	$0 < 4$	$[-4,4]$	8	$0 < 4$	$[-2,1/4]$	2.25	$0 < 1.125$

Tabela 1- Intervalo solução, diâmetro e erro absoluto de cada multiplicação.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da Tabela 1 é possível verificar que nas aritméticas de Moore e de Vaccaro os resultados para as três equações foram iguais. Era esperado, pois a multiplicação de Vaccaro é uma extensão do que foi definido por Moore. Sobre a diferença entre os resultados das três equações, as quais são somente uma escrita diferente de uma mesma equação, é claramente notável que a aritmética de Moore tem limitações quanto ao tamanho do intervalo, uma vez que nas equações (4) e (6) o intervalo resultante possui diâmetro maior que o intervalo para a equação (5). Já o resultado obtido com a aritmética RDM mostrou um intervalo solução igual para todas as equações e com um diâmetro menor os de Moore e Vaccaro.

Com a análise do erro absoluto verifica-se que em todos os casos a desigualdade é satisfeita, e a aritmética de RDM retornou um erro menor, reforçando a qualidade já observada com o diâmetro.

## 4 | CONCLUSÕES

A aritmética intervalar gera resultados com uma garantia de sua incerteza, pois os possíveis erros estão contidos nesse intervalo solução. A partir disso, cada vez mais vem sendo utilizada em substituição da aritmética convencional, principalmente em sistemas críticos, os quais necessitam de resultados exatos.

O objetivo deste trabalho foi apresentar três diferentes processos de multiplicação intervalar e analisar a qualidade dos resultados gerados por cada processo.

A análise numérica, realizada através da verificação do diâmetro e erro absoluto do intervalo solução, permite confirmar a qualidade do resultado e afirmar que a aritmética RDM retorna intervalo solução com menor diâmetro e erro para a operação de multiplicação, em comparação com os processos de multiplicação devido a Moore e Vaccaro.

## REFERÊNCIAS

KEARFOTT, R. B. Interval computations: Introduction, uses, and resources. **Euromath Bulletin**, v. 2, p. 95-112, 1996.

LANDOWSKI, M.. Differences between Moore and RDM Interval Arithmetic. **Proceedings of the 7th IEEE International Conference Intelligent Systems IS'2014**, v. 1, p. 331-340, 2014, DOI: 10.1007/978-3-319-11313-5.

MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Prentice-Hall, v. 4, 1966.

MOORE, R. E. **Methods and Applications of Interval Analysis**. SIAM, 1979.

MOORE, R. E; KEARFOTT, M; CLOUD, J. **Introduction to Interval Analysis**. SIAM, 2009.

PIEGAT, A; LANDOWSKI, M. **Is the conventional interval-arithmetic correct?** Journal of Theoretical and Applied Computer Science, v. 6, p. 27-44, 2012.

PIEGAT, A; LANDOWSKI, M. **Two interpretations of multidimensional rdm interval arithmetic-multiplication and division**. International Journal of Fuzzy Systems, v. 15, p. 488-496, 2013.

RATSCHEK, H; ROKNE, J. **New Computer Methods for Global Optimization**. Horwood Publishing Limited, 1988.

VACCARO, G. L. R. **Solução de Equações Intervalares**. 2001. 241 f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Computação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

## **SOBRE OS ORGANIZADORES**

**JORGE GONZÁLEZ AGUILERA** Engenheiro Agrônomo (Instituto Superior de Ciências Agrícolas de Bayamo (ISCA-B) hoje Universidad de Granma (UG)), Especialista em Biotecnologia pela Universidadde Oriente (UO), CUBA (2002), Mestre em Fitotecnia (UFV/2007) e Doutorado em Genética e Melhoramento (UFV/2011). Atualmente, é professor visitante na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) no Campus Chapadão do Sul. Têm experiência na área de melhoramento de plantas e aplicação de campos magnéticos na agricultura, com especialização em Biotecnologia Vegetal, atuando principalmente nos seguintes temas: pre-melhoramento, fitotecnia e cultivo de hortaliças, estudo de fontes de resistência para estres abiótico e biótico, marcadores moleculares, associação de características e adaptação e obtenção de vitroplantas. Tem experiência na multiplicação “on farm” de insumos biológicos (fungos em suporte sólido; Trichoderma, Beauveria e Metharrizum, assim como bactérias em suporte líquido) para o controle de doenças e insetos nas lavouras, principalmentede soja, milho e feijão. E-mail para contato: [jorge.aguilera@ufms.br](mailto:jorge.aguilera@ufms.br)

**ALAN MARIO ZUFFO** Engenheiro Agrônomo (Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT/2010), Mestre em Agronomia – Produção Vegetal (Universidade Federal do Piauí –UFPI/2013), Doutor em Agronomia – Produção Vegetal (Universidade Federal deLavras – UFLA/2016). Atualmente, é professor visitante na Universidade Federal doMato Grosso do Sul – UFMS no Campus Chapadão do Sul. Tem experiência naárea de Agronomia – Agricultura, com ênfase em fisiologia das plantas cultivadas e manejo da fertilidade do solo, atuando principalmente nas culturas de soja, milho, feijão, arroz, milheto, sorgo, plantas de cobertura e integração lavoura pecuária. E-mail para contato: [alan\\_zuffo@hotmail.com](mailto:alan_zuffo@hotmail.com)

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-351-4

