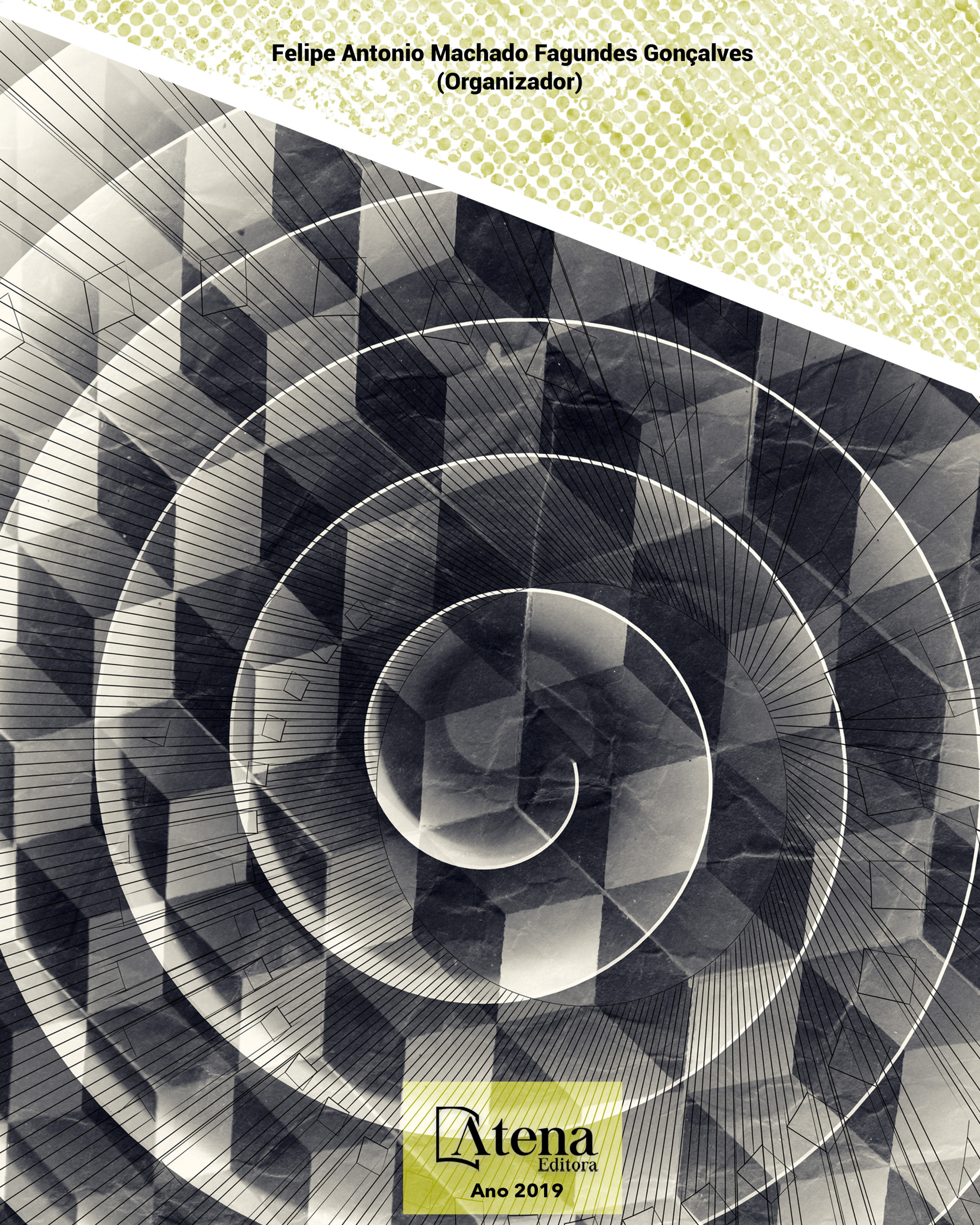
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)



Atena Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora
2019

Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E24 Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-348-4
DOI 10.22533/at.ed.484192405

1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2.Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2019

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêem contribuir de maneira muito significante para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõe estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 1

O ALGORITMO ESPECTRAL COMO ALTERNATIVA AO ALGORITMO K-MEANS EM CONJUNTO DE DADOS ARTIFICIAIS

Luciano Garim Garcia
Leonardo Ramos Emmendorfer

DOI 10.22533/at.ed.4841924051

CAPÍTULO 2 16

NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL

Arquimedes José De Araújo Paschoal
Ricardo Menezes Campello De Souza
Hélio Magalhães De Oliveira

DOI 10.22533/at.ed.4841924052

CAPÍTULO 3 24

ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL

Arquimedes José De Araújo Paschoal
Ricardo Menezes Campello De Souza

DOI 10.22533/at.ed.4841924053

CAPÍTULO 4 32

ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Amanda Barretos Lima Garuth
Brenda Anselmo Mendes
Isabela Geraldo Reghin
Rosângela Teixeira Guedes

DOI 10.22533/at.ed.4841924054

CAPÍTULO 5 46

DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Mariana Coelho Portilho Bernardi
Adilandri Mércio Lobeiro
Jeferson Rafael Bueno
Thiago José Sepulveda da Silva

DOI 10.22533/at.ed.4841924055

CAPÍTULO 6 57

MODELO MATEMÁTICO PARA AUXILIAR O PLANEJAMENTO DA MANUTENÇÃO PREVENTIVA DE MOTORES ELÉTRICOS

Thalita Monteiro Obal
Jonatas Santana Obal

DOI 10.22533/at.ed.4841924056

CAPÍTULO 7 64

PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE FLUXO EM AQUÍFERO CONFINADO

João Paulo Martins dos Santos
Alessandro Firmiano de Jesus
Edson Wendland

DOI 10.22533/at.ed.4841924057

CAPÍTULO 8 83

RESONANT ORBITAL DYNAMICS OF CBERS SATELLITES

Jarbas Cordeiro Sampaio
Rodolpho Vilhena de Moraes
Sandro da Silva Fernandes

DOI 10.22533/at.ed.4841924058

CAPÍTULO 9 91

TESTES ADAPTATIVOS ENVOLVENDO O CONTEÚDO DE DERIVADAS: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL

Patrícia Liane Grudzinski da Silva
Claudia Lisete Oliveira Groenwald

DOI 10.22533/at.ed.4841924059

CAPÍTULO 10 104

LOCALIZAÇÃO DE FALTAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO POR ANÁLISE DE SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO

Danilo Pinto Moreira de Souza
Eliane da Silva Christo
Aryfrance Rocha Almeida

DOI 10.22533/at.ed.48419240510

CAPÍTULO 11 116

MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA

Gustavo Henrique Petroli
Norberto Anibal Maidana

DOI 10.22533/at.ed.48419240511

CAPÍTULO 12 133

LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO

Claudio Fuentealba
Edelmira Badillo
Gloria Sánchez-Matamoros
Andrea Cárcamo

DOI 10.22533/at.ed.48419240512

CAPÍTULO 13 143

OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Márcio Aurélio da Silva
Fran Sérgio Lobato
Aldemir Ap Cavalini Jr
Valder Steffen Jr

DOI 10.22533/at.ed.48419240513

CAPÍTULO 14 156

SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY

Gino Gustavo Maqui Huamán
Ulcilea Alves Severino Leal
Geraldo Nunes Silva

DOI 10.22533/at.ed.48419240514

CAPÍTULO 15 164

VALIDAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA O ESCOAMENTO DE GRÃOS DE SOJA

Rodolfo França de Lima
Vanessa Faoro
Manuel Osório Binelo
Dirceu Lima dos Santos
Adriano Pilla Zeilmann

DOI 10.22533/at.ed.48419240515

CAPÍTULO 16 181

TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA

Landy Sosa Moguel
Guadalupe Cabañas-Sánchez
Eddie Aparicio Landa

DOI 10.22533/at.ed.48419240516

CAPÍTULO 17 192

SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE

Francisco Helmuth Soares Dias
Jacques Aveline Loureiro da Silva

DOI 10.22533/at.ed.48419240517

CAPÍTULO 18 199

SIMULAÇÃO 3D DO FLUXO DE AR DE UM SISTEMA REAL DE ARMAZENAGEM DE GRÃOS

Vanessa Faoro
Rodolfo França de Lima
Aline Tampke Dombrowski
Manuel Osório Binelo

DOI 10.22533/at.ed.48419240518

CAPÍTULO 19 207

CONTROLE ÓTIMO DO FLUXO DE ÁGUA EM UMA FÔRMA DE GELO

Xie Jiayu
João Luis Gonçalves

DOI 10.22533/at.ed.48419240519

CAPÍTULO 20 213

CÓDIGOS CÍCLICOS DEFINIDOS POR ANULAMENTO

Conrado Jensen Teixeira
Osnel Broche Cristo

DOI 10.22533/at.ed.48419240520

CAPÍTULO 21 216

ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA

Bruno Carlos Lugão
Diego Campos Knupp
Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues
Antônio José da Silva Neto

DOI 10.22533/at.ed.48419240521

CAPÍTULO 22 225

ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

Ronaldo Mendes Evaristo
Kelly Cristiane Iarosz
Silvio Luiz Thomaz de Souza
Ricardo Luiz Viana
Moacir Fernandes de Godoy
Antonio Marcos Batista

DOI 10.22533/at.ed.48419240522

CAPÍTULO 23 235

CONSTRUÇÃO DE UM AEROMODELO DE MACARRÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA

Alissan Sarturato Firão
Ernandes Rocha de Oliveira
Zulind Luzmarina Freitas

DOI 10.22533/at.ed.48419240523

SOBRE O ORGANIZADOR.. 239

CAPÍTULO 21

ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA

Bruno Carlos Lugão
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico
Nova Friburgo, RJ, Brasil

Diego Campos Knupp
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico
Nova Friburgo, RJ, Brasil

Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico
Nova Friburgo, RJ, Brasil

Antônio José da Silva Neto
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico
Nova Friburgo, RJ, Brasil

RESUMO: A proposta deste trabalho consiste em estimar a velocidade média e o coeficiente de dispersão longitudinal da equação da advecção-dispersão unidimensional em regime transiente através de um problema inverso. Para tal, foram utilizados dados de um experimento de campo realizado por Sousa (2009), onde foi simulado o lançamento instantâneo de um contaminante conservativo (NaCl) em um trecho do rio São Pedro, localizado na cidade de Nova Friburgo/RJ. O problema direto é resolvido com o método híbrido analítico-numérico conhecido como Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). O problema inverso é formulado através da Inferência Bayesiana e resolvido com o Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC). Os resultados obtidos demonstram a robustez da combinação de transformações integrais e inferência Bayesiana nesta análise.

PALAVRAS-CHAVE: Técnica da Transformada Integral Generalizada, Problemas Inversos, Inferência Bayesiana, Monte Carlo via Cadeias de Markov.

ABSTRACT: The purpose of this study is to estimate the average speed and the longitudinal dispersion coefficient of the advection-dispersion equation transient one-dimensional through an inverse problem. For this, we used data from a field experiment conducted by Sousa (2009), which was simulated instantaneous release of a conservative contaminant (NaCl) on a stretch of the river San Pedro, located in the city of Nova Friburgo / RJ. The direct problem is solved with the analytical-numerical hybrid method known as Generalized Integral Transform Technique (GITT). The inverse problem is formulated by Bayesian Inference and solved with the Markov Chains Monte Carlo method (MCMC). The results demonstrate the robustness of the combination of integral transformation and Bayesian inference in this analysis.

KEYWORDS: Generalized Integral Transform Technique, Inverse Problems, Bayesian

1 I INTRODUÇÃO

A previsão do comportamento da dispersão de poluentes em rios, conduzida através de modelos matemáticos, é importante para a análise e redução de impactos ambientais, uma vez que pode levar a estimativas do alcance e das concentrações a serem observadas na pluma de contaminantes.

Neste trabalho é realizada a análise da dispersão de um contaminante conservativo lançado de maneira instantânea em um rio, através da comparação entre os resultados obtidos em um experimento de campo e aqueles calculados por um modelo matemático. O transporte deste contaminante foi simulado através da equação da advecção-dispersão unidimensional em regime transiente com velocidade e coeficiente de dispersão longitudinal constantes. A solução desta EDP é obtida por meio do método híbrido analítico-numérico conhecido como Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) (Cotta, 1993). Esta escolha é importante, pois por tratar-se de uma metodologia parcialmente analítica a solução do problema direto é realizada com custo computacional menor e com grande precisão. Este é um passo fundamental na solução do problema inverso aqui tratado, pois este envolve um processo iterativo intenso computacionalmente. O problema inverso para estimativa dos parâmetros do modelo (velocidade média e coeficiente de dispersão longitudinal) é então formulado por meio de Inferência Bayesiana (Kaipio, 2004), permitindo assim a incorporação no modelo inverso de informações a priori disponíveis para estes parâmetros.

2 I DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

O experimento foi realizado por Sousa (2009) no verão de 2009, em um pequeno curso fluvial, Rio São Pedro, localizado na região rural do município de Nova Friburgo, centro-norte do estado do Rio de Janeiro. Foram lançadas 2000 gramas de cloreto de sódio, diluídos em aproximadamente 15 litros de água em um balde, de maneira instantânea em um ponto da seção de injeção, sobre a linha de corrente central do escoamento.

Em duas seções, localizadas, respectivamente, a 50 e 100 metros a jusante do local de injeção, foram colhidas, a cada 15 segundos, amostras de 200 ml da água, durante período de tempo suficiente para que ocorresse, por completo, a passagem da pluma do traçador. Apenas as amostras obtidas na seção a 100 metros do ponto de lançamento foram utilizadas. Em todas as amostras foi determinada a condutividade elétrica, posteriormente convertida em concentração de sais dissolvidos, através da curva de calibração que modelada para este fim. De acordo com esse procedimento, a concentração de sais a montante do ponto de lançamento seria de 15.5 mg/l .

3 I FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO

Considere uma seção de um rio com comprimento L , inicialmente com velocidade média e coeficiente de dispersão longitudinal constantes. Em x_1 é simulado o lançamento instantâneo de um poluente. A representação esquemática deste problema é apresentada na figura 1.

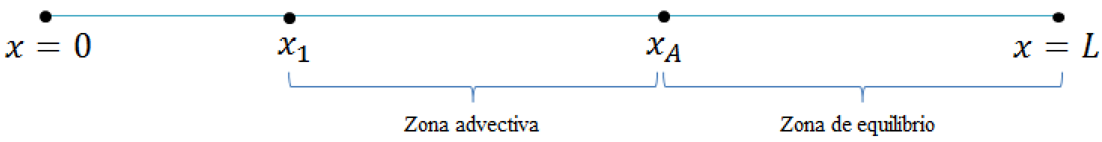


Figura 1: Representação Esquemática

A zona de equilíbrio desde problema, marcada esquematicamente a partir do ponto x_A na figura 1, pode ser modelada pela equação da advecção-dispersão unidimensional em regime transiente (Fischer, 1979):

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + u\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = E_L\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \; e \; t > 0 \qquad (1)$$

$$C(0,t) = c_0, \qquad t > 0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(L,t) = 0, \qquad t > 0 \qquad (1.2)$$

$$C(x,0) = \frac{M}{A}\delta(x - x_1) + c_0, \qquad 0 < x < L \qquad (1.3)$$

onde u é a velocidade média na seção transversal, E_L é o coeficiente de dispersão longitudinal, A é a área da seção transversal, M é a massa do poluente, $\delta(x - x_1)$ é a função Delta de Dirac e c_0 é o valor da concentração medido no rio antes do lançamento do poluente.

Para o experimento descrito na Seção 2, os seguintes parâmetros são conhecidos: c_0 = 15.5 mg/l, M= 2000g, A = 0.9m^2, L = 1000 m e x_1 = 500m. Os parâmetros u e E_L serão estimados por meio do problema inverso.

4 I TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

A solução formal através da Técnica da Transformada Integral Generalizada segue o seguinte procedimento sistemático: (i) definição do problema de autovalor, (ii) desenvolvimento do par de transformação integral, (iii) realização da transformação integral na EDP original, (iv) solução do sistema de EDO's resultante da transformação integral e (v) utilização da fórmula de inversão para construir o potencial original (Cotta, 1993).

De modo a acelerar a convergência da solução através da GITT, é desejável que as condições de contorno sejam homogêneas. Portanto, considera-se o seguinte filtro:

$$C(x,t) = C^*(x,t) + C_f(x) \tag{2}$$

onde c*(x,t) é o potencial filtrado e $c_f(x)$ é a solução do problema filtro. Para o problema aqui tratado, $c_f(x) = c_0$ é considerado, sendo o suficiente para homogeneizar as condições de contorno.

O problema de autovalor diferencial é definido como o problema de Helmoltz, cujas autofunções, $\psi_i(x)$, e seus respectivos autovalores, μ_i, para as condições de contorno dadas são:

$$\psi_i(x) = \cos\left(\frac{\mu_i x}{\sqrt{E_L}}\right), \qquad i = 1,2,\ldots \tag{3}$$

$$\mu_i = \frac{\sqrt{E_L}(2i-1)\pi}{2L}, \qquad i = 1,2,\ldots \tag{4}$$

Define-se enatão o par de transformação integral como:

$$Transformada: \bar{C}_i(t) = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) C^*(x,t)dx \tag{5.1}$$

$$Inversa: C^*(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{C}_i(t)\,\tilde{\psi}_i(x) \tag{5.2}$$

onde

$$\tilde{\psi}_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\sqrt{N_i}}, \qquad N_i = \int_0^L \psi_i^2(x)dx \tag{6}$$

Operando o problema filtrado com $\int_0^L \tilde{\psi}_i(x)(\,.\,)dx$ e realizando manipulações algébricas para cada uma das integrais resultantes, obtém-se o seguinte sistema de EDO's para os potenciais $\bar{C}_i(t)$:

$$\frac{d\bar{C}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{C}_i(t) = \bar{g}_i(t), \qquad i = 1,2,3,\ldots \tag{7.1}$$

onde

$$\bar{g}_i(t) = -u\sum_{j=1}^{\infty}\bar{C}_j(t)D_{ij} \tag{7.2}$$

$$D_{ij} = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x)\frac{d\tilde{\psi}_j(x)}{dx}dx \tag{7.3}$$

Com as condições iniciais transformadas dadas por:

$$\bar{C}_i(0) = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x)f^*(x)dx, \qquad f^*(x) = f(x) - c_f(x) \tag{7.4}$$

Para a solução do sistema de EDO’s dado em (7), foi utilizada a rotina NDSolve do software Mathematica. Uma vez conhecidos os potenciais transformados $\bar{C}_i(t)$, a fórmula de inversão, Eq. (5.2), pode ser utilizada para a obtenção do campo filtrado, C* (x,t). Para a obtenção do campo original, C(x,t), a Eq. (2) é empregada, resultando:

$$C(x,t) = C^*(x,t) + C_f(x) = \sum_{i=1}^{Ntr}\bar{C}_i(t)\tilde{\psi}_i(x) + C_f(x) \tag{8}$$

5 I FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Considere que no problema modelado pela eq. (1) estejam disponíveis dados experimentais $\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, ..., Z_{Nd}\}$, medidos em uma determinada posição e em tempos distintos, onde N_d representa o número de dados disponíveis. Considere agora que os valores do conjunto de parâmetros α = {u, E_L} sejam desconhecidos, mas seja necessário estimá-los. Este é o problema de interesse deste trabalho.

Na abordagem Bayesiana o problema inverso é formulado como um problema de inferência estatística, onde se busca uma função de densidade de probabilidade *a posteriori* dadas as observações experimentais. Dessa maneira, as informações *a priori* sobre os parâmetros do modelo podem ser utilizadas na formulação do problema inverso.

O teorema de Bayes para a análise inversa pode ser formulado da seguinte maneira (Kaipio, 2004):

$$\pi_{pos}(\alpha) = \pi(\alpha|\mathbf{Z}) = \frac{\pi_{pr}(\alpha)\pi(\mathbf{Z}|\alpha)}{\pi(\mathbf{Z})} \tag{9}$$

onde $\pi_{pos}(\alpha)$ é a função de densidade de probabilidades *a posteriori*, $\pi_{pr}(\alpha)$ é a função de densidade de probabilidades *a priori*, π (**Z** lα) é a função de máxima verossimilhança e π (**Z**) é a densidade marginal que exerce o papel de constante de normalização.

Se os erros experimentais forem aditivos e descritos por uma distribuição normal, a função de máxima verossimilhança pode ser definida como:

$$\pi(\mathbf{Z}|\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N_d}}} \frac{1}{\det(\mathbf{W})} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_{calc})^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_{calc})\right] \qquad (10)$$

onde **W** é a matriz de covariância relacionado aos dados experimentais. Para o experimento realizado por Sousa (2009) foi considerado um desvio padrão constante igual a $\sigma_{\exp} = 1.55\, mg/l.$. Para simular amostras de $\pi_{pos}(\alpha)$ através do MCMC é empregado o algoritmo de Metropolis-Hastings (Metropolis, 1953; Hastings, 1970).

6 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

A metodologia apresentada foi formulada computacionalmente no software de computação algébrica Mathematica utilizando uma ordem de truncamento Ntr = 100. Na tabela 1 pode-se acompanhar a convergência da GITT para diversas ordens de truncamento. Para t = 90s utilizando Ntr=100 tem-se 5 algarismos convergidos, enquanto que, em t=150s com Ntr= 60, é possível constatar uma convergência melhor. Este resultado já era esperado, pois o método necessita de uma quantidade maior de termos para representar de maneira mais fiel os valores nas proximidades do contorno.

		t= 90s			t = 150s	
Ntr	50m	100m	150m	50m	100m	150m
20	51.1036	23.2132	13.4647	29.4998	45.6128	17.3230
40	61.7399	16.7798	15.0933	24.8485	49.2443	16.9888
60	62.6123	17.5713	15.4851	24.9217	49.2696	16.9684
80	62.6311	17.5495	15.4999	24.9217	49.2696	16.9686
100	62.6312	17.5497	15.5001	24.9217	49.2696	16.9686

Tabela 1: Tabela de Convergência

Para a solução do problema inverso foram consideradas informações a priori disponíveis para os parâmetros μ e E_L obtidos por Sousa (2009), modeladas como distribuições normais com μ_u = 0.59m/s, σ_u = 0.3m/s, μ_{EL} = 1.75m^2/s e σ_{EL} = 0.8m^2/s. Para a construção das Cadeias de Markov, no algoritmo de Metropolis-Hastings foram utilizados estados iniciais diferentes das médias a priori, com o objetivo de testar a implementação, verificando a convergência das cadeias.

A Cadeia de Markov foi construída com 20.000 estados e um aquecimento de

6.000 estados, que são descartados na computação das estatísticas da distribuição *a posteriori*. As figuras 2 (a) e (b) mostram a evolução das cadeias para os parâmetros E_L e u, respectivamente, onde é observado que os 6.000 estados utilizados como amostras de aquecimento são mais do que o suficiente para as cadeias alcançarem a distribuição de equilíbrio.

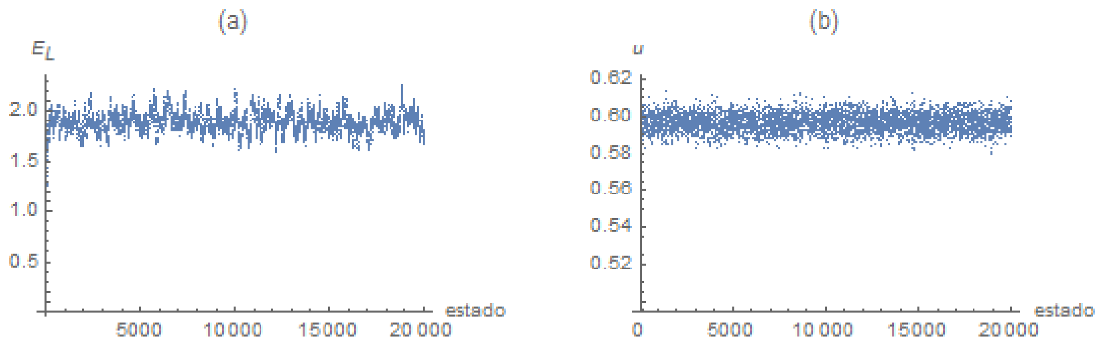


Figura 2: Evolução das Cadeias para E_L e u, respectivamente em (a) e (b)

Nas figuras 3 (a) e (b) são apresentados os histogramas das distribuições a posteriori para E_L e u, respectivamente, onde é possível observar que as densidades tendem para uma distribuição normal.

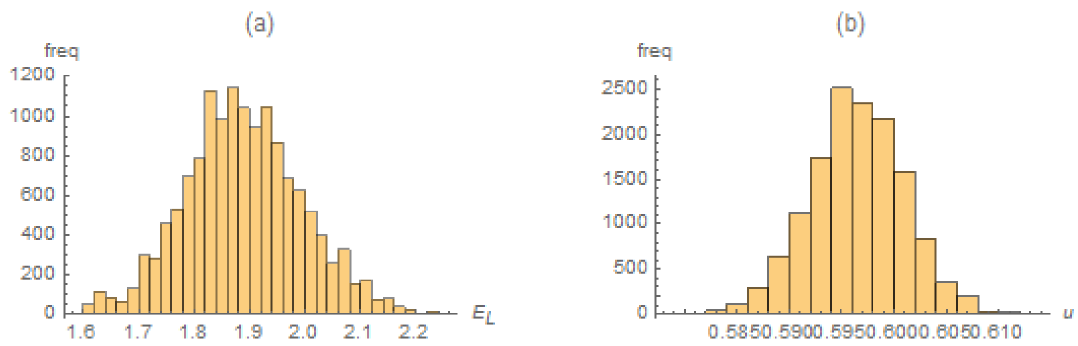


Figura 3: Histogramas para as distribuições a posteriori de E_L e u, respectivamente em (a) e (b)

A tabela 2 apresenta os intervalos de confiança estimados de 95% para cada uma das distribuições *a posteriori* amostradas pelo MCMC, bem como a média e o desvio padrão de cada um dos parâmetros. É importante notar que os valores estimados por Sousa (2009), E_L = 1.75 e u = 0.59, encontram-se dentro do intervalo de confiança determinado neste trabalho.

	E_L (m^2/s)	u (m/s)
IC	[1.69 ; 2.11]	[0.59 ; 0.61]
μ	1.89	0.60
σ	0.105	0.0045

Tabela 2 Intervalos de confiança de 95%, média e desvio padrão para E_L e u

Por fim, é possível observar na figura 4 uma comparação entre as concentrações calculadas e os dados experimentais. A linha azul representa a solução via GITT utilizando os valores médios dos parâmetros dados na tabela 2, resultando em um erro absoluto total de 74mg/l, enquanto que a linha tracejada refere-se aos resultados encontrados por Sousa (2009), resultando em um erro absoluto total de 78mg/l .

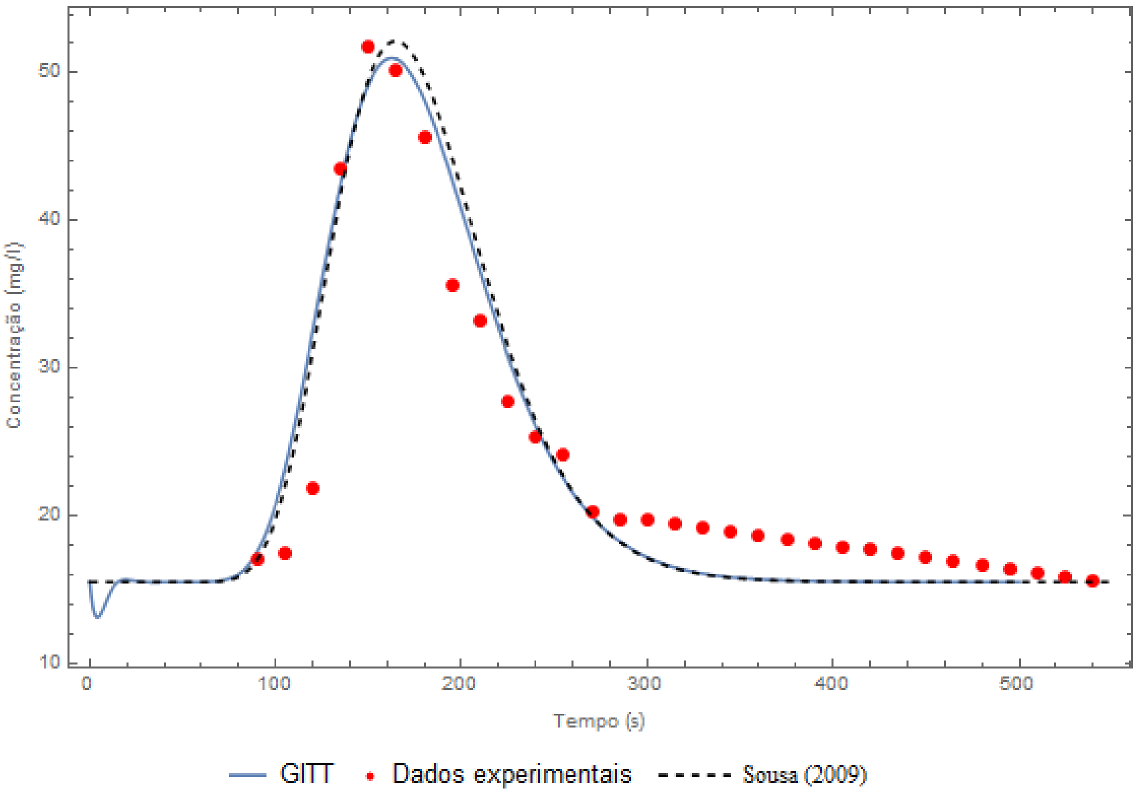


Figura 4: Comparação dos resultados obtidos em relação aos dados experimentais

7 I CONCLUSÕES

A metodologia empregada neste trabalho, combinando transformações integrais e inferência Bayesiana, foi demonstrada eficaz para a estimativa do coeficiente de dispersão longitudinal e a velocidade média empregando-se informação a priori. Os resultados obtidos apresentaram uma pequena melhora em relação aos encontrados por Sousa (2009). Além disso, ressalta-se o fato da solução do problema inverso na abordagem Bayesiana ser densidades de probabilidade para os parâmetros buscados, trazendo maior nível de informação quanto às incertezas dos parâmetros estimados.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem pelo apoio financeiro das agências CNPq, CAPES e FAPERJ.

REFERÊNCIAS

Cotta, R. M. **Integral transforms in computational heat and fluid flows**. Florida , CRC Press, 1993.

Fischer, H. B., List, J. E., Koh, C. R., Imberger, J. e Brooks, N. H. **Mixing in inland and coastal waters**. London, Academic Press, 1979.

Hastings, W. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. **Biometrika**, v.57,n.1:97-109, 1970.

Metropolis, N., Rosenbluth, A., Rosenbluth, M., Teller A. Equation of state calculations by fast computing machine. **The journal of chemical physics**, v.21:1087-1091, 1953.

Sousa, E. P. **Avaliação de mecanismos dispersivos em rios através de problemas inversos**, Nova Friburgo, UERJ, 2009.

Kaipio, J., Sommersalo, E. **Statistical and Computational Inverse Problems**, Springer-Verlag, 2004.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-348-4
9 788572 473484