

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof^a Dr^a Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof.^a Dr.^a Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Dr.^a Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.^a Dr.^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof.^a Dr.^a Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof.^a Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
E24	Educação matemática e suas tecnologias [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 1) Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-347-7 DOI 10.22533/at.ed.477192405 1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série. CDD 510.7
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA DE ALUNOS COM SÍNDROME DE DOWN: UM ESTUDO ATRAVÉS DA BIBLIOTECA DIGITAL BRASILEIRA DE TESES E DISSERTAÇÕES	
Judcely Nytyeska de Macêdo Oliveira Silva Leonardo Lira de Brito Ticiany Marques da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.4771924051	
CAPÍTULO 2	9
A COLABORAÇÃO PROFISSIONAL EM ESTUDOS DE AULA SOB A PERSPECTIVA DE PROFESSORES DO ENSINO BÁSICO	
Adriana Richit João Pedro da Ponte	
DOI 10.22533/at.ed.4771924052	
CAPÍTULO 3	18
CONEXÕES ENTRE A PRÁTICA DOCENTE E A PESQUISA EM AVALIAÇÃO EDUCACIONAL: A COMPREENSÃO ESTATÍSTICA E A INTERPRETAÇÃO PEDAGÓGICA	
Regina Albanese Pose Larissa Bueno Fernandes Alexandra Waltrick Russi	
DOI 10.22533/at.ed.4771924053	
CAPÍTULO 4	31
A CRIATIVIDADE NA FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS PARA CRIANÇAS COM MENOS DE SEIS ANOS	
Elisabete Ferraz da Cunha Maria de Fátima Pereira de Sousa Lima Fernandes	
DOI 10.22533/at.ed.4771924054	
CAPÍTULO 5	43
A MATEMÁTICA DAS PROFISSÕES	
Janieli da Silva Souza Frank Victor Amorim	
DOI 10.22533/at.ed.4771924055	
CAPÍTULO 6	57
A QUESTÃO DO TRAPÉZIO: UM ESTUDO SOBRE CÁLCULO DE ÁREA E PERÍMETRO	
Andréa Paula Monteiro de Lima Maria das Dores de Moraes	
DOI 10.22533/at.ed.4771924056	

CAPÍTULO 7 70

DE LA ESTRUCTURA INFORMAL A LA ARQUITECTURA DE VALIDACIÓN: UN EMERGENTE EN LA COMUNIDAD DE PRÁCTICA DE FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Jaime Humberto Romero Cruz
Olga Lucía León Corredor
Martha Bonilla Estévez
Diana Gil-Chaves
Edwin Carranza Vargas
Claudia Castro Cortés
Francisco Sánchez-Acero

DOI 10.22533/at.ed.4771924057

CAPÍTULO 8 78

DIÁLOGO ENTRE O SABER MATEMÁTICO E A CULTURA LEITEIRA: CONTRIBUIÇÕES DA ETNOMATEMÁTICA PARA A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Samuelita de Albuquerque Barbosa
José Roberto da Silva

DOI 10.22533/at.ed.4771924058

CAPÍTULO 9 89

PRACTICAS DOCENTES REFLEXIVAS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO EN LAS CARRERAS DE CIENCIAS ECONÓMICAS

María Magdalena Mas

DOI 10.22533/at.ed.4771924059

CAPÍTULO 10 98

RIZZA DE ARAÚJO PORTO: UMA *EXPERT* EM TEMPOS DA ESCOLA NOVA?

Denise Medina França
Edilene Simões Costa

DOI 10.22533/at.ed.47719240510

CAPÍTULO 11 108

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: DISCUSSÕES SOBRE O NUMERAMENTO NOS ANOS INICIAS

Waléria de Jesus Barbosa Soares
Carlos André Bogéa Pereira

DOI 10.22533/at.ed.47719240511

CAPÍTULO 12 116

FORMAÇÃO CONTINUADA DOS PROFESSORES NO ENSINO DOS ANOS INICIAIS: PERSPECTIVAS E TRANSFORMAÇÕES DOS SABERES DOCENTES

Loise Tarouquela Medeiros

DOI 10.22533/at.ed.47719240512

CAPÍTULO 13 124

CONJECTURAS DOS PRESSUPOSTOS OFICIAIS DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS E O USO DE TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Charlâni Ferreira Batista Rafael
Jutta Cornelia Reuwsaat Justo

DOI 10.22533/at.ed.47719240513

CAPÍTULO 14 135

A TEORIA DO MOBILE LEARNING E O ENSINO DE MATEMÁTICA EM ARTIGOS INTERNACIONAIS E TESES DEFENDIDAS EM UNIVERSIDADES BRASILEIRAS: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA

Learcino dos Santos Luiz
Ricardo Antunes de Sá

DOI 10.22533/at.ed.47719240514

CAPÍTULO 15 153

UN EJEMPLO DE TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA APOYAR EL DESARROLLO COGNITVO DE CONCEPTOS EN ÁLGEBRA LINEAL

Andrea Cárcamo
Josep Maria Fortuny
Claudio Fuentealba

DOI 10.22533/at.ed.47719240515

CAPÍTULO 16 162

A UTILIZAÇÃO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Jessica da Silva Miranda
Felipe Antonio Moura Miranda

DOI 10.22533/at.ed.47719240516

CAPÍTULO 17 170

APRENDIZAGEM MATEMÁTICA SOB UM OLHAR INCLUSIVO: A UTILIZAÇÃO DO ORIGAMI COMO RECURSO DIDÁTICO

Thiago Ferreira de Paiva
Meire Nadja Meira de Souza

DOI 10.22533/at.ed.47719240517

CAPÍTULO 18 180

AS TEORIAS DA APRENDIZAGEM E A PRÁTICA DOCENTE: UM APROFUNDAMENTO TEÓRICO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE UM JOGO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Leandro Mário Lucas
Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro Moita

DOI 10.22533/at.ed.47719240518

CAPÍTULO 19 197

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA NO PNAIC DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO: O JOGO NA PRÁTICA DE PROFESSORES DO CICLO DE ALFABETIZAÇÃO

Edite Resende Vieira
Elizabeth Ogliari Marques

DOI 10.22533/at.ed.47719240519

CAPÍTULO 20 209

DUAS ATIVIDADES PRÁTICAS ENVOLVENDO FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS COM BASE EM SÓLIDOS DE PLATÃO

Samilly Alexandre de Souza
Kátia Maria de Medeiros

DOI 10.22533/at.ed.47719240520

CAPÍTULO 21	219
CIRCUITO: UMA ATIVIDADE PRÁTICA ENVOLVENDO OS CRITÉRIOS DE VERDADE DA MATEMÁTICA	
Elen Graciele Martins	
Nilza dos Santos Rodrigues César	
Rafael Henrique Dielle	
DOI 10.22533/at.ed.47719240521	
CAPÍTULO 22	224
DIDÁTICA GERAL E DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: PARADIGMAS NA FORMAÇÃO INICIAL DOCENTE	
Cícera Tatiana Pereira Viana	
Guttenberg Sergistótanés Santos Ferreira	
João Paulo Guerreiro de Almeida	
DOI 10.22533/at.ed.47719240522	
CAPÍTULO 23	232
DIFERENÇAS ENTRE MOTIVAÇÃO E CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA ENTRE MENINOS E MENINAS CONCLUINTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Mateus Gianni Fonseca	
Cleyton Hércules Gontijo	
Juliana Campos Sabino de Souza	
DOI 10.22533/at.ed.47719240523	
CAPÍTULO 24	240
IMPLEMENTACIÓN DE LAS TIC EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS DE NIVEL UNIVERSITARIO	
María Eugenia Navarrete Sánchez	
Ángela Rebeca Garcés Rodríguez	
Sergio Alberto Rosalío Piña Granja	
Eustorgia Puebla Sánchez	
DOI 10.22533/at.ed.47719240524	
SOBRE O ORGANIZADOR	247

UN EJEMPLO DE TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA APOYAR EL DESARROLLO COGNITIVO DE CONCEPTOS EN ÁLGEBRA LINEAL

Andrea Cárcamo

Universidad Austral de Chile
Facultad de Ciencias de la Ingeniería
Chile

Josep Maria Fortuny

Universidad Autónoma de Barcelona
Departamento de Didáctica de la Matemática y de
las Ciencias Experimentales
España

Claudio Fuentealba

Universidad Austral de Chile
Facultad de Ciencias de la Ingeniería
Chile

RESUMEN: En la actualidad, el curso de Álgebra Lineal se incluye en la mayoría de los programas de estudios de las carreras universitarias enfocadas en el área de ciencia y tecnología. Sin embargo, su enseñanza en este nivel educativo, según señala Hillel (2000) es calificada universalmente como una experiencia frustrante tanto para los profesores como para los estudiantes. Con el objetivo de favorecer el aprendizaje y la enseñanza de este curso, en este trabajo se presenta una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) que tiene como finalidad apoyar a los estudiantes en la construcción de ciertos contenidos del Álgebra Lineal. En particular, se eligen los conceptos de

conjunto generador y espacio generado. Esta THA se sustenta en la heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes y la modelización matemática. La THA que se presenta surge del análisis de los resultados de una investigación basada en el diseño que constó con tres ciclos de experimentación y en la que participaron estudiantes de primer año de la carrera de ingeniería. El análisis de los resultados muestra evidencias del potencial de esta THA para apoyar el aprendizaje de estos conceptos del Álgebra Lineal.

PALABRAS CLAVE: Trayectoria Hipotética de Aprendizaje; Investigación Basada en el Diseño; Álgebra Lineal; Conjunto Generador; Espacio Generado

ABSTRACT: Currently, the Linear Algebra course is included in the majority of university studies programs focused on the area of science and technology. However, their teaching at this level of education, according to Hillel (2000), is universally qualified as a frustrating experience for both teachers and students. In order to favor the learning and teaching of this course, this paper presents a hypothetical learning trajectory (HLT) that aims to support students in the construction of certain concepts of linear algebra. In particular, the concepts of spanning set and span are chosen. This HLT is based on the instructional design heuristics of emergent

models and mathematical modeling. The HLT arises from the analysis of the results of a design-based research that consisted of three cycles of experimentation in which first-year students of the engineering career participated. The analysis of the results gives evidence of the potential of this HLT to support the learning of these concepts of Linear Algebra.

KEYWORDS: Hypothetical Learning Trajectory; Design-Based Research; Linear Algebra; Spanning Set; Span

1 | INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal es un curso obligatorio en muchos cursos de pregrado porque es ampliamente reconocido por tener aplicaciones importantes en diferentes disciplinas (SALGADO & TRIGUEROS, 2015). Sin embargo, su enseñanza es universalmente reconocida como difícil. Los estudiantes, por lo general, sienten que aterrizan en otro planeta, ya que se ven abrumados por la cantidad de nuevas definiciones y la falta de conexión con el conocimiento anterior. En tanto, los profesores, a menudo, se sienten frustrados y desconcertados por esta situación (DORIER, 2002).

Dorier y Sierpinska (2001) plantean que los profesores del curso del Álgebra Lineal necesitan sugerencias sobre cómo organizar los conocimientos que enseñan en conjunto con un suministro de buenos ejemplos, preguntas, ejercicios y problemas. Estos profesores aprecian los documentos que les proporcionan esto y la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) ofrece esta información a los profesores. Por este motivo, es importante su diseño.

Una THA de acuerdo con Confrey y Maloney (2015) es un modelo conceptual de cómo los estudiantes transitan de sus conocimientos informales a unos más sofisticados cuando se involucran con un conjunto de tareas cuidadosamente secuenciadas. Para Simon (1995) una THA se compone de: el objetivo de aprendizaje, las tareas de instrucción y la hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Recientemente, se han realizado estudios sobre THA para Álgebra Lineal. Trigueros y Possani (2011) diseñan una THA para combinación lineal, dependencia lineal e independencia lineal y concluyen que dicha THA contribuye a que los estudiantes aprendan estos conceptos. Por su parte, Andrews-Larson, Wawro y Zandieh (2017) presentan una THA que facilita, a los estudiantes, la comprensión de matrices como transformaciones lineales. Estas autoras, a través de la implementación de esta THA, identificaron aspectos importantes del razonamiento del estudiante y el papel del profesor para apoyar el desarrollo de ese razonamiento. Considerando los resultados de estos estudios, en esta investigación se diseña una THA para conjunto generador y espacio generado. Se eligen estos conceptos por su relación con contenidos importantes de este curso como: base y dimensión de un espacio vectorial (STEWART & THOMAS, 2010).

El objetivo de este estudio es presentar una THA, fundamentada empírica y

teóricamente, que favorezca el aprendizaje de los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Con este estudio, pretendemos contribuir al diseño de THA para el curso de Álgebra Lineal. Nuestra intención es que dicho diseño de THA apoye a los docentes en la creación de modelos de pensamiento de sus estudiantes. Estos consideramos que les servirán como base para buscar respuestas pedagógicas que ayuden a los estudiantes a transitar hacia su aprendizaje en el ámbito del Álgebra Lineal.

2 | MARCO TEÓRICO

La base teórica de nuestra investigación se fundamenta en la heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes (GRAVEMEIJER, 1999) y la modelización matemática desde una perspectiva educativa (JULIE & MUDALY, 2007).

Para iniciar el aprendizaje previsto, se elige una tarea inicial que sea experiencialmente real para el estudiante (GRAVEMEIJER, 1999). En nuestro caso, elegimos una tarea de contexto real en que la modelización matemática se utiliza como una herramienta de ayuda al estudio de las matemáticas (JULIE Y MUDALY, 2007). Consideramos el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiss (2007) para guiar a los estudiantes en la resolución de esta tarea.

Una vez definida la tarea inicial, se diseñaron o seleccionaron tareas que apoyarían a los estudiantes a lograr el aprendizaje previsto. En esta investigación, el diseño de las tareas fue guiado por la heurística para el diseño instruccional de los modelos emergentes (GRAVEMEIJER, 1999) que busca crear una secuencia de tareas en que los estudiantes primero desarrollen modelos-de su actividad matemática informal que más tarde se transformen en modelos-para su razonamiento matemático más sofisticado.

Para el progreso desde la actividad matemática informal a un razonamiento matemático formal, Gravemeijer (1999) establece cuatro niveles de actividad: situacional, referencial, general y formal. Zolkower y Bressan (2012) precisan que en el nivel situacional, el problema experiencialmente real es organizado por los estudiantes por medio de estrategias que surgen espontáneamente de la problemática. En el nivel referencial (modelo-de), los estudiantes hacen gráficos, notaciones y procedimientos que esquematizan el problema, pero que se refieren al problema inicial. En el nivel general (modelo-para), los estudiantes exploran, reflexionan y generalizan lo aparecido en el nivel anterior, pero no se hace referencia al contexto inicial. En el nivel formal, los estudiantes trabajan con procedimientos y notaciones convencionales desligadas de las situaciones que les otorgaron su significado inicial.

3 | METODOLOGÍA

La metodología del estudio fue la investigación basada en el diseño. Esta investigación tiene el potencial de superar la brecha entre la práctica educativa y la teoría (BAKKER & VAN EERDE, 2015). En la primera fase, se elaboró una THA (SIMON, 1995). En la fase de experimentos de enseñanza, se desarrollaron tres ciclos de experimentos de diseño en los que se refinó la THA inicial. Finalmente, en la fase de análisis retrospectivo se realizaron dos tipos de análisis de datos: uno preliminar y otro global.

El análisis preliminar consistió en comparar los datos de la trayectoria actual de aprendizaje (TAA) con las conjeturas de la THA para las diferentes tareas (BAKKER & VAN EERDE, 2015). Por esta razón, (re)construimos la TAA para las tareas principales de la THA de cada ciclo de experimento de diseño a través de los siguientes pasos: selección de datos; organización en tablas de las respuestas escritas de los estudiantes y transcripción de las grabaciones en video y audio que estaban relacionadas con las respuestas escritas; identificación de regularidades en cada tarea referentes a los tipos de respuestas que dieron los estudiantes y a las dificultades que presentaron. Es importante señalar que utilizamos la TAA para describir el aprendizaje observado que se infiere de los datos recogidos, ya que estamos de acuerdo con Dierdorff *et al.* (2011) en que no es posible detectar el aprendizaje “real” de los estudiantes.

A continuación, comparamos en cada ciclo de experimento de diseño, la THA con la TAA a través de la matriz cualitativa/cuantitativa de análisis de datos (Tabla 1) propuesta por Dierdorff, Bakker, Eijkelhof, y van Maanen (2011). Para esto, se buscaron datos que apoyaran o refutaran las conjeturas. La parte izquierda de la matriz resume la THA y la parte derecha sintetiza la TAA a través de: respuestas escritas o extractos de transcripciones, descripción de los resultados por parte del investigador y una impresión cuantitativa de lo cercano que estuvieron las conjeturas de la THA con la TAA. El signo - se utiliza cuando las observaciones sugieren que las conjeturas fueron confirmadas por un máximo de un tercio de los estudiantes. El signo + se utilizó cuando las observaciones sugirieron que las conjeturas se confirmaron por lo menos en dos tercios de los estudiantes. El signo \pm se utiliza para los casos intermedios.

THA		TAA		Comparación THA y TAA	
Tarea	Descripción tarea	Conjetura de la respuesta de los estudiantes	Extracto de respuesta escrita u oral	Resultado	Impresión cuantitativa de lo que se acercan éstas (i.e. -, \pm ,+)

Tabla 1. Matriz cualitativa/cuantitativa de análisis de datos para comparar la THA con la TAA

A partir de los resultados de cada ciclo, se agregaron, mantuvieron, modificaron o eliminaron conjeturas de la THA aplicada para utilizarla en un ciclo nuevo. El análisis

global (BAKKER & VAN EERDE, 2015) consistió en observar las tres TAA de los ciclos de experimento de diseño para buscar patrones o tendencias relacionadas con determinar las tareas de cada THA que favorecieron la construcción de los conceptos.

4 | RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el análisis preliminar se identificaron, para cada ciclo de experimento de diseño, las tareas que favorecieron la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Para ver los resultados de cada ciclo se puede consultar: Cárcamo, Gómez y Fortuny (2016); Cárcamo, Fortuny y Gómez (2017); Cárcamo, Fortuny y Fuentealba (2018). La descripción de estas tareas y sus características comunes en los diferentes ciclos de experimento de diseño se muestran en la Tabla 2.

Descripción de la tarea	Característica de las tareas que favorecieron el aprendizaje
<i>Tarea 1.</i> Crear un generador de contraseñas numéricas con vectores.	Permitió que los estudiantes activaran sus concepciones previas de vectores. Esto les sirvió para resolver las siguientes tareas y tener una primera aproximación de conjunto generador y espacio generado.
<i>Tarea 2.</i> Realizar una tabla de analogía entre el contexto de generar contraseñas numéricas y los conceptos de conjunto generador y espacio generado.	Favoreció que los estudiantes distinguieran entre conjunto generador y espacio generado al tener que relacionarlos con conjuntos derivados de una situación real.
<i>Tarea 3.</i> Conjeturar propiedades de conjunto generador y espacio generado fuera del escenario de las contraseñas.	Admitió que los estudiantes profundizaran sobre propiedades de conjunto generador y espacio generado en el espacio de R^n .
<i>Tarea 4.</i> Aplicar los conceptos de conjunto generador y espacio generado en un contexto matemático.	Dejó que los estudiantes aplicaran conjunto generador y espacio generado en un contexto matemático y en situaciones diferentes a las presentadas en las tareas previas.

Tabla 2. Descripción de cada tarea y las características comunes de éstas en cada ciclo de diseño de experimento que favorecieron el aprendizaje

Respecto a la tarea 1, Cárcamo, Fortuny y Fuentealba (2017) precisan que los estudiantes usaron el modelo matemático basado en vectores para tener una primera aproximación de los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Lo anterior, porque a partir de éste, ellos obtuvieron dos conjuntos que se relacionaron con el contexto de las contraseñas, pero también, con estos conceptos matemáticos. En relación con la tarea 2, Cárcamo, Fortuny y Gómez (2016) señalan que ofreció a los estudiantes la oportunidad de evitar confundir estos conceptos porque fueron presentados en una situación cotidiana y real para los estudiantes.

La tarea 3 permitió que los estudiantes, del ciclo de experimento de diseño uno, identificaran la relación de inclusión que existe entre conjunto generador y espacio generado, pero también que reconocieran en notación de conjunto que uno de ellos tiene una cantidad finita de vectores mientras que el otro, infinitos vectores (CÁRCAMO,

GÓMEZ & FORTUNY, 2016). Por otro lado, en los ciclos de experimento de diseño dos y tres, los estudiantes exploraron, reflexionaron e hicieron conjeturas sobre conjuntos de vectores de R^n que correspondían a conjuntos generadores o a espacios generados y que no se referían al escenario de la tarea 1 (por ejemplo, conjeturaron las condiciones para que un conjunto generara al espacio de R^2).

La tarea 4, en los ciclos de experimento de diseño dos y tres, dio indicios de que favoreció la construcción de los conceptos en estudio porque los estudiantes los aplicaron en un contexto matemático y en situaciones diferentes a las presentadas en las tareas previas. También, se considera que una de las preguntas de la tarea 3, del ciclo de experimento de diseño uno, favoreció que los estudiantes aplicaran conjunto generador y espacio generado en un contexto matemático. En concreto, la pregunta que les pidió verificar si un vector pertenece a un cierto espacio generado. Varios estudiantes lograron verificar si un vector pertenecía a un cierto espacio generado haciendo combinación lineal de los vectores del conjunto generador de este cierto espacio (CÁRCAMO, GÓMEZ & FORTUNY, 2016). Es importante señalar que la THA del ciclo uno no tuvo tarea 4. Sin embargo, se consideró que una de las preguntas de la tarea 3 de esta THA se vinculaba a la tarea 4 de los otros ciclos de experimento de diseño.

Los resultados de cada ciclo de experimento de diseño fueron corroborando las características primordiales de cada tarea que favoreció que los estudiantes construyeran los conceptos de conjunto generador y espacio generado. La discusión de estos resultados nos condujo a desarrollar una THA para estos conceptos. Una síntesis de esta THA se presenta en la Tabla 3.

Objetivo	Descripción de la tarea	Conjetura de la ruta de aprendizaje
Los estudiantes usan vectores y el ciclo de modelización para crear un modelo matemático.	Tarea 1: crear un generador de contraseñas seguras basado en vectores.	Los estudiantes: (a) Leen información de las contraseñas seguras. (b) Crean un generador de contraseñas basado en vectores siguiendo los pasos del ciclo de modelización matemática.
Los estudiantes identifican características de conjunto generador y espacio generado, y distinguen entre ellos.	Tarea 2: hacer una tabla de analogía entre su generador de contraseñas y los conceptos de conjunto generador y espacio generado.	Los estudiantes: (a) Encuentran dos conjuntos de su generador de contraseñas (uno que tiene los vectores para generar contraseñas numéricas y otro que posee los vectores que al hacer combinación lineal entre ellos se obtiene cada contraseña numérica). (b) Identifican similitudes entre los conjuntos de su generador de contraseñas y conjunto generador y espacio generado (c) Distinguen entre los conceptos con la tabla de analogía.

Los estudiantes deducen propiedades de conjunto generador y espacio generado.	Tarea 3: conjeturar cuáles son las características de dos conjuntos generadores de un mismo espacio en \mathbb{R}^n .	Los estudiantes: (a) Exploran casos particulares en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 e identifican algún patrón. (b) Relacionan conjunto generador con otros conceptos. (c) Conjeturan las características que pueden tener dos conjuntos generadores de un mismo espacio. (e) Determinan que dos conjuntos generadores no tienen porque tener elementos en común o tener el mismo número de elementos.
Los estudiantes aplican conjunto generador y espacio generado.	Tarea 4: Sean $C=\{(1,0,0), (0,0,1)\}$ y $S=\{(p,0,p) / p \text{ en } \mathbb{R}\}$ entonces cada vector de S es una combinación lineal de los vectores de C porque $(p,0,p) = p(1,0,0) + p(0,0,1)$. ¿Es C un conjunto generador de S ? Justifica tu respuesta.	Los estudiantes para plantear una solución: (a) Exploran posibles rutas para su resolución. (b) Determinan las condiciones que debe cumplir C para que sea un conjunto generador de S . (c) Concluyen que C no es un conjunto generador de S .

Tabla 3. Síntesis de la THA para los conceptos de conjunto generador y espacio generado propuesta en esta investigación.

5 | CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo fue presentar una THA que favorezca a los estudiantes en su construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado del Álgebra Lineal a nivel universitario.

Esta THA es una propuesta que se fundamenta en la heurística de los modelos emergentes y en la modelización matemática. Además, surge como resultado de un refinamiento iterativo de una THA en tres ciclos de experimentación de diseño.

La THA propuesta para la construcción de conjunto generador y espacio generado, se destaca por ser útil para enseñar este tipo de contenido porque proporciona una estrategia para promover la comprensión de conjunto generador y espacio generado. Esta estrategia se refiere a utilizar la modelización matemática como una herramienta de ayuda (JULIE Y MUDALY, 2007) para el estudio de estos conceptos y una secuencia de tareas diseñada para facilitar la transición de los estudiantes de sus concepciones previas hacia la comprensión formal de los contenidos (GRAVEMEIJER, 1999).

Los resultados, en el proceso de refinamiento de esta THA, dan evidencias de su potencial para apoyar el aprendizaje de conjunto generador y espacio generado. Por este motivo, esperamos que esta THA sirva para aplicarla en otros contextos educativos, previamente adaptada a estos. Asimismo, consideramos que esta THA puede proporcionar una orientación para diseñar otras trayectorias que ayuden a los estudiantes a transitar hacia su aprendizaje en el curso de Álgebra Lineal.

REFERENCIAS

- ANDREWS-LARSON, Christine; WAWRO, Megan; ZANDIEH, Michelle. A hypothetical learning trajectory for conceptualizing matrices as linear transformations. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 48, n. 6, p. 809-829, feb. 2017.
- BAKKER, ARTHUR; VAN EERDE, DOLLY. An introduction to design-based research with an example from statistics education. In: Bikner-Ahsbabs, Angelika; Knipping, Christine; Presmeg, Norma (Coord.). **Approaches to qualitative research in mathematics education**. Springer Netherlands, 2015. p. 429-466.
- BLUM, WENERN; LEISS, DOMINIK. How do students and teachers deal with modelling problems? In: Haines, Christopher; Galbraith, Peter; Blum, Werner; Khan, Sanowar (Coord.). **Mathematical modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics**. Chichester, UK: Horwood Publishing, 2007. p. 222-231.
- CÁRCAMO, ANDREA, FORTUNY, JOSEP; FUENTEALBA, CLAUDIO. (2018). The emergent models in linear algebra: an example with spanning set and span. **Teaching Mathematics and its Applications**, v. 37, n. 4, p. 202-217, dec. 2018.
- CÁRCAMO, ANDREA; FORTUNY, JOSEP; GÓMEZ, JOAN. Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 48, n. 3, p. 338-352, jul. 2017.
- CÁRCAMO, ANDREA; GÓMEZ, JOAN; FORTUNY, JOSEP. Mathematical Modelling in Engineering: A Proposal to Introduce Linear Algebra Concepts. **Journal of Technology and Science Education**, v. 6, n. 1, p. 62-70, feb. 2016.
- CONFREY, JERE; MALONEY, ALAN. A Design study of a curriculum and diagnostic assessment system for a learning trajectory on equipartitioning. **ZDM Mathematics Education**, v. 47, n. 6, p. 919-932, oct. 2015.
- DIERDORP, ADRI; BAKKER, ARTHUR; EIJKELHOF, HARRIE; VAN MAANEN, JAN. Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 13, n. 1-2, p. 132-151, ene. 2011.
- DORIER, JEAN-LUC. Teaching linear algebra at university. In: Tatsien, Li (Coord.). **Proceedings of the International Congress of Mathematicians ICM**. Beijing, China: Higher Education Press, v. 3, 2002. p. 875-874.
- DORIER, JEAN-LUC; SIERPINSKA, ANNA. Research into the teaching and learning of linear algebra. In: Holton Derek (Coord.). **The Teaching and Learning of Mathematics at University Level**. Netherlands: Springer, 2001. p. 255-273.
- GRAVEMEIJER, KOENO. How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 1, n. 2, p. 155-177, nov. 1999.
- HILLEL, JOEL. Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In: Dorier, Jean-Luc (Coord.). **On the teaching of linear algebra** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 191-208.
- JULIE, CYRIL; MUDALY, VIMOLAN. Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In: Blum, Werner; Galbraith, Peter; Henn, Hans-Wolfgang; Niss, Mogen (Coords.). **Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study**. New York: Springer, 2007. p. 503-510.
- SIMON, MARTIN. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 2, p. 114-145, mar. 1995.

TRIGUEROS, MARÍA; POSSANI, EDGAR. Using an economics model for teaching linear algebra. **Linear Algebra and its Applications**, v. 438, n. 4, p. 1779-1792, feb. 2011.

SALGADO, HILDA; TRIGUEROS, MARÍA. Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 39, p. 100-120, sep. 2015.

STEWART, SEPIDEH; THOMAS, MICHAEL. Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 41, n. 2, p. 173-188, feb. 2010.

ZOLKOWER, BETINA; BRESSAN, ANA MARÍA. Educación matemática realista. In: Pochulu, Marcel; Rodríguez, Mabel (Coords.). **Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos**. Argentina: UNGS – EDUVIM, 2012, p.175-200.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-347-7

