

# EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)

 **Atena**  
Editora  
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)

# Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2019 Os Autores  
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora  
Editora Executiva: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira  
Diagramação: Natália Sandrini  
Edição de Arte: Lorena Prestes  
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

## Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

## Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

## Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
E24	Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2)  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-348-4 DOI 10.22533/at.ed.484192405  1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.  CDD 510.7
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
O ALGORITMO ESPECTRAL COMO ALTERNATIVA AO ALGORITMO K-MEANS EM CONJUNTO DE DADOS ARTIFICIAIS	
Luciano Garim Garcia Leonardo Ramos Emmendorfer	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924051</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>16</b>
NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza Hélio Magalhães De Oliveira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924052</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>24</b>
ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924053</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>32</b>
ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA	
Amanda Barretos Lima Garuth Brenda Anselmo Mendes Isabela Geraldo Reghin Rosângela Teixeira Guedes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924054</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>46</b>
DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	
Mariana Coelho Portilho Bernardi Adilandri Mércio Lobeiro Jeferson Rafael Bueno Thiago José Sepulveda da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924055</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>57</b>
MODELO MATEMÁTICO PARA AUXILIAR O PLANEJAMENTO DA MANUTENÇÃO PREVENTIVA DE MOTORES ELÉTRICOS	
Thalita Monteiro Obal Jonatas Santana Obal	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924056</b>	

<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>64</b>
PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE FLUXO EM AQUÍFERO CONFINADO	
<a href="#">João Paulo Martins dos Santos</a> <a href="#">Alessandro Firmiano de Jesus</a> <a href="#">Edson Wendland</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924057</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>83</b>
RESONANT ORBITAL DYNAMICS OF CBERS SATELLITES	
<a href="#">Jarbas Cordeiro Sampaio</a> <a href="#">Rodolpho Vilhena de Moraes</a> <a href="#">Sandro da Silva Fernandes</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924058</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>91</b>
TESTES ADAPTATIVOS ENVOLVENDO O CONTEÚDO DE DERIVADAS: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL	
<a href="#">Patrícia Liane Grudzinski da Silva</a> <a href="#">Claudia Lisete Oliveira Groenwald</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924059</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>104</b>
LOCALIZAÇÃO DE FALTAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO POR ANÁLISE DE SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO	
<a href="#">Danilo Pinto Moreira de Souza</a> <a href="#">Eliane da Silva Christo</a> <a href="#">Aryfrance Rocha Almeida</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240510</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>116</b>
MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA	
<a href="#">Gustavo Henrique Petrolí</a> <a href="#">Norberto Anibal Maidana</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240511</b>	
<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>133</b>
LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO	
<a href="#">Claudio Fuentealba</a> <a href="#">Edelmira Badillo</a> <a href="#">Gloria Sánchez-Matamoros</a> <a href="#">Andrea Cárcamo</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240512</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>143</b>
OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
<a href="#">Márcio Aurélio da Silva</a> <a href="#">Fran Sérgio Lobato</a> <a href="#">Aldemir Ap Cavalini Jr</a> <a href="#">Valder Steffen Jr</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240513</b>	

<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>156</b>
SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY	
Gino Gustavo Maqui Huamán	
Ulcilea Alves Severino Leal	
Geraldo Nunes Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240514</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>164</b>
VALIDAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA O ESCOAMENTO DE GRÃOS DE SOJA	
Rodolfo França de Lima	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Dirceu Lima dos Santos	
Adriano Pilla Zeilmann	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240515</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>181</b>
TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA	
Landy Sosa Moguel	
Guadalupe Cabañas-Sánchez	
Eddie Aparicio Landa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240516</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>192</b>
SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE	
Francisco Helmuth Soares Dias	
Jacques Aveline Loureiro da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240517</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>199</b>
SIMULAÇÃO 3D DO FLUXO DE AR DE UM SISTEMA REAL DE ARMAZENAGEM DE GRÃOS	
Vanessa Faoro	
Rodolfo França de Lima	
Aline Tampke Dombrowski	
Manuel Osório Binelo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240518</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>207</b>
CONTROLE ÓTIMO DO FLUXO DE ÁGUA EM UMA FÔRMA DE GELO	
Xie Jiayu	
João Luis Gonçalves	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240519</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>213</b>
CÓDIGOS CÍCLICOS DEFINIDOS POR ANULAMENTO	
Conrado Jensen Teixeira	
Osnel Broche Cristo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240520</b>	

<b>CAPÍTULO 21</b> .....	<b>216</b>
ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA	
Bruno Carlos Lugão Diego Campos Knupp Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues Antônio José da Silva Neto	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240521</b>	
<b>CAPÍTULO 22</b> .....	<b>225</b>
ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	
Ronaldo Mendes Evaristo Kelly Cristiane Iarosz Silvio Luiz Thomaz de Souza Ricardo Luiz Viana Moacir Fernandes de Godoy Antonio Marcos Batista	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240522</b>	
<b>CAPÍTULO 23</b> .....	<b>235</b>
CONSTRUÇÃO DE UM AEROMODELO DE MACARRÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA	
Alissan Sarturato Firão Ernandes Rocha de Oliveira Zulind Luzmarina Freitas	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240523</b>	
<b>SOBRE O ORGANIZADOR</b> .....	<b>239</b>

## LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO

**Claudio Fuentealba**

Universidad Austral de Chile  
Facultad de Ciencias de la Ingeniería  
Chile

**Edelmira Badillo**

Universidad Autónoma de Barcelona  
Departamento de Didáctica de la Matemática y de  
las Ciencias Experimentales  
España

**Gloria Sánchez-Matamoros**

Universidad de Sevilla  
Departamento de Didáctica de la Matemática  
España

**Andrea Cárcamo**

Universidad Austral de Chile  
Facultad de Ciencias de la Ingeniería  
Chile

**RESUMEN:** Los resultados de investigaciones relacionadas con el aprendizaje del concepto de derivada constatan que, a pesar de ser un concepto indispensable, su comprensión resulta muy compleja, observándose una cantidad significativa de estudiantes universitarios que solo logra alcanzar una comprensión parcial. Esta problemática a pesar de no ser nueva, aún constituye un gran desafío de la educación matemática a nivel universitario y es una constante preocupación para las

instituciones educativas de nivel superior. En esta investigación presentamos un análisis exploratorio cuyo fin es identificar y caracterizar los subniveles de desarrollo del esquema de derivada alcanzados por estudiantes universitarios con instrucción previa en Cálculo Diferencial.

**PALABRAS CLAVE:** Derivada; Teoría APOE; Subniveles de Desarrollo; Esquema de Derivada

**ABSTRACT:** The results of research related to the learning of the derivative concept confirm that, despite being an essential concept, its understanding is very complex, observing a significant number of university students that only achieves a partial understanding. This problem, despite not being new, still constitutes a great challenge for mathematics education at the university level and is a constant concern for higher education institutions. In this research, we present an exploratory analysis whose purpose is to identify and characterize the sub-levels of development of the derivative schema reached by university students with previous instruction in Differential Calculus.

**KEYWORDS:** Derivative; APOS Theory; Sub-levels of Development; Derivative Schema

## 1 | INTRODUCCIÓN

La derivada es uno de los conceptos más importantes del cualquier curso de Cálculo y corresponde a una herramienta fundamental en la comprensión de los fenómenos que involucran el cambio y variación de magnitudes. Sin embargo, a pesar de ser un concepto básico y transversal en los currículos universitarios de matemáticas, ingeniería y otras ciencias, su comprensión es compleja para una gran parte de los estudiantes. Entre algunos de los aspectos más importantes que provocan esta dificultad en la comprensión del concepto de derivada por parte de los estudiantes se encuentran; (1) la creación y utilización de diseños instruccionales que privilegian la excesiva mecanización y memorización, convirtiendo al concepto de derivada en un conocimiento algorítmico que se construye por medio de la resolución de cientos de tareas que solo involucran la aplicación correcta de determinadas operaciones algebraicas, lo cual, obstaculiza la construcción de una comprensión más completa del concepto (DAWKINS & EPPERSON, 2014), (2) la excesiva predilección de por el uso de tareas que involucran la utilización de un solo modo de representación, olvidando que la conversión entre modos de representaciones y la coordinación (síntesis) entre distintas representaciones es fundamental para lograr un nivel alto de comprensión, pues cada representación tiene asociadas algunas características del concepto, pero no todas (DUVAL, 2006; SÁNCHEZ-MATAMOROS, GARCÍA & LLINARES, 2006). Como consecuencia de lo anterior, se observa que una gran parte de los estudiantes tienen éxito al enfrentarse a ese tipo de tareas, sin embargo, estos mismos estudiantes pueden mostrar dificultades y errores cuando la resolución de la tarea que requiere de la comprensión del significado de la derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o de su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente, o de ambas simultáneamente (SÁNCHEZ-MATAMOROS, GARCÍA & LLINARES, 2008; BAKER, COOLEY & TRIGUEROS, 2000).

En este trabajo nos centramos en identificar el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada alcanzado por un grupo de estudiantes universitarios luego de un curso de Cálculo Diferencial.

## 2 | MARCO TEÓRICO

En este trabajo hemos consideramos el marco propuesto por la Teoría APOE (ARNON ET AL., 2014; ASIALA ET AL., 1997), la cual se basa en la idea de abstracción reflexiva propuesta por Piaget y García (1983). La Teoría APOE considera que la comprensión de un concepto, por parte de un estudiante, comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente contruidos, en términos de acciones. Estas acciones se interiorizan para formar procesos que, a su vez, se encapsulan para formar objetos. Con relación a los procesos, éstos pueden ser generados a partir de mecanismos de coordinación o reversión de otros procesos, previamente contruidos

por el estudiante, o bien por medio de la generalización de éstos. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (DUBINSKY, 1991; ARNON ET AL., 2014).

Un esquema debe entenderse como una construcción cognitiva compleja y conformada por acciones, procesos, objetos, otros esquemas y sus interrelaciones. Dichas estructuras se encuentran relacionadas en la mente del estudiante, consciente o inconscientemente, y son evocadas cuando se enfrenta a distintas tareas. Este constructo de esquema y los mecanismos de abstracción reflexiva permiten explicar la manera en que se construyen los conocimientos matemáticos en la mente de un estudiante, a través de las estructuras cognitivas y las relaciones establecidas entre ellas (TRIGUEROS, 2005). Los esquemas según Piaget y García (1983) crecen a través de distintos mecanismos y se desarrollan o evolucionan pasando por tres niveles, Intra-Inter-Trans. Estos niveles son denominados triada y se suceden según un orden fijo, caracterizándose por el grado de construcción de relaciones entre los elementos matemáticos constitutivos del concepto.

Para Arnon et al. (2014) un estudiante en el nivel Intra del desarrollo de un esquema se centra en acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos. En el nivel Inter, hace uso de elementos matemáticos de forma correcta en algunos modos de representación y establece relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en el mismo modo de representación. Este nivel se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre los procesos y los objetos que conforman el esquema. Finalmente, en el nivel Trans, el estudiante usa elementos matemáticos de forma correcta en todos los modos de representación y establece relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en diferentes modos de representación. Los estudiantes en este nivel han construido el objeto derivada, y toman consciencia de las relaciones que pueden establecer entre distintos modos de representación llegando a la síntesis de éstos (SÁNCHEZ-MATAMOROS ET AL., 2006).

Es importante destacar que Piaget y García (1983) consideran que cada fase o nivel (Intra, Inter y Trans) implican, a su vez, la existencia de algunos subniveles que siguen el mismo orden de progresión. Un ejemplo de ello, es lo reportado en la investigación de Sánchez-Matamoros et al. (2006) que identifica y describe dos subniveles para los niveles de desarrollo Intra e Inter. La existencia de estos subniveles podría dar explicación de las diferencias que se observan entre estudiantes asignados a un mismo nivel de desarrollo del esquema.

### 3 | METODOLOGÍA

Esta investigación es de tipo cuantitativa y tiene carácter descriptivo exploratorio. En ella participaron 40 estudiantes universitarios de segundo año del grado doble de

Matemáticas y Física de una universidad pública de Cataluña. Todos los estudiantes habían cursado y aprobado como mínimo una asignatura de Cálculo Diferencial.

El instrumento de recolección de datos correspondió a un cuestionario conformado por tres tareas (ver Tabla 1) entregadas en distintos modos de representación. Dichas tareas fueron seleccionadas y modificadas de investigaciones previas sobre la comprensión del concepto de derivada (BAKER ET AL., 2000; SÁNCHEZ-MATAMOROS ET AL., 2006; FUENTEALBA, SÁNCHEZ-MATAMOROS, BADILLO & TRIGUEROS, 2017). Para su resolución era necesario utilizar y coordinar distintos elementos matemáticos que configuran el concepto de derivada.

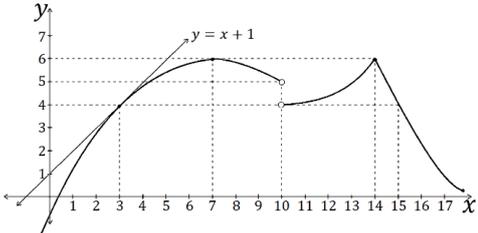
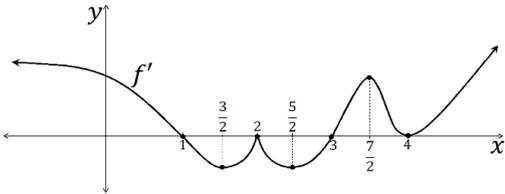
Tarea	Enunciado	Descripción de aspectos asociados a la resolución
1	<p>Esboza la gráfica de una función <math>f</math> que satisfice las siguientes condiciones:</p> <p>a) <math>f</math> es continua en su dominio</p> <p>b) <math>f(2) = 0</math>.</p> <p>c) <math>f'(2) = f'(5) = 0</math></p> <p>d) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4</math></p> <p>e) <math>\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = -\infty</math></p> <p>f) <math>f'(x) &lt; 0</math> cuando <math>5 &lt; x &lt; 8</math></p> <p>g) <math>f'(x) \geq 0</math> cuando <math>x &lt; 5</math></p> <p>h) <math>f''(x) &lt; 0</math> cuando <math>3 &lt; x &lt; 8</math></p> <p>i) <math>f''(x) &gt; 0</math> cuando <math>x &lt; 3</math></p>	<p><u>Modo de representación:</u> analítico → gráfico</p> <p><u>Elementos matemáticos:</u> Interpretación analítica de la derivada y sus implicaciones sobre la gráfica de la función (existencia de valores extremos, puntos de inflexión). Signo de la primera derivada y su relación con respecto a los intervalos de monotonía de la función. Signo de la segunda derivada y su relación con respecto a los intervalos de convexidad de la función.</p>
2	 <p>Dada la gráfica de la función <math>f</math>, formada por las ramas de parábolas</p> <p>a) Obtener los valores de <math>f'(3)</math>, <math>f'(7)</math>, <math>f'(10)</math>, <math>f'(14)</math> y <math>f'(15)</math>. Explicando cómo los obtienes.</p> <p>b) Realiza un esbozo de la gráfica de <math>f'</math>. Explica cómo los has obtenido.</p>	<p><u>Modo de representación:</u> gráfico → analítico → gráfico</p> <p><u>Elementos matemáticos:</u> Interpretación geométrica y analítica de la derivada (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía y convexidad de la función y su relación con el signo de la primera derivada o segunda derivada según sea el caso. El operador derivada (si <math>f</math> es una parábola entonces <math>f'</math> es una recta).</p>
3	 <p>La Figura muestra la gráfica de la derivada de <math>f</math>, esboza las posibles gráficas de <math>f</math>.</p>	<p><u>Modo de representación:</u> gráfico → analítico → gráfico</p> <p><u>Elementos matemáticos:</u> Interpretación geométrica (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía de la primera derivada y su relación con el signo de la segunda derivada (intervalos de convexidad de la función). Intervalos de cambio de signo de la primera derivada y su relación con respecto a la monotonía de función.</p>

Tabla 1. Tareas propuestas en el cuestionario y descripción de aspectos asociados a su resolución

Para discretizar los protocolos de resolución y obtener un vector asociado a cada uno de ellos, definimos 27 variables (ver Tabla 2) que son el resultado de la descomposición de: los elementos matemáticos en ambos modos de representación (analítico/gráfico), la utilización de relaciones lógicas y de otros estudios previos (TRIGUEROS & ESCANDÓN, 2008; FUENTEALBA ET AL., 2017).

Elemento matemático	Variable a observar
1. Derivada en un punto $f'(a)$	$V_1$ . Usa correctamente el significado geométrico de la derivada en $x=a$ $V_2$ . Usa correctamente el significado analítico de la derivada en $x=a$
2. Función derivada $f'(x)$	$V_3$ . Usa correctamente el significado de función derivada $V_4$ . Usa correctamente el significado del operador derivada
3. Valor extremo de $f$	$V_5$ . Usa correctamente el significado de máximo local geoméricamente $V_6$ . Usa correctamente el significado de máximo local analíticamente $V_7$ . Usa correctamente el significado de mínimo local geoméricamente $V_8$ . Usa correctamente el significado de mínimo local analíticamente
4. Punto de inflexión de $f$	$V_9$ . Usa correctamente el significado de punto de inflexión geoméricamente $V_{10}$ . Usa correctamente el significado de punto de inflexión analíticamente
5. Relación de equivalencia lógica entre el signo de $f'$ en un intervalo $I$ , la monotonía de $f$ en dicho intervalo	$V_{11}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de $f'$ en un intervalo $I$ y el crecimiento estricto de $f$ en dicho intervalo $V_{12}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el crecimiento estricto de $f$ en un intervalo $I$ y el signo positivo de $f'$ en dicho intervalo $V_{13}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo $f'$ en un intervalo y el decrecimiento estricto de $f$ en dicho intervalo $V_{14}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el decrecimiento estricto de $f$ en un intervalo $I$ y el signo negativo de $f'$ en dicho intervalo
6. Relación de equivalencia lógica entre el signo de $f''$ en un intervalo $I$ y, la curvatura de $f$ en dicho intervalo	$V_{15}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de $f''$ en un intervalo $I$ y la convexidad de $f$ en dicho intervalo $V_{16}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: la convexidad de $f$ en un intervalo $I$ y el signo positivo de $f''$ en dicho intervalo $V_{17}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo de $f''$ en un intervalo $I$ y la concavidad de $f$ en dicho intervalo $V_{18}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: la concavidad de $f$ en un intervalo $I$ y el signo negativo de $f''$ en dicho intervalo
7. Puntos de no derivabilidad de $f$	$V_{19}$ . Usa correctamente las derivadas laterales $V_{20}$ . Usa correctamente el significado de los puntos conflictivos (cúspides y angulosos)

8. Continuidad y derivabilidad de $f$	$V_{21}$ . Usa correctamente la relación directa: si $f$ es derivable en $x=a$ , entonces $f$ es continua en $x=a$ $V_{22}$ . Usa correctamente la relación contrarrecíproca: si $f$ no es continua en $x=a$ , entonces $f$ no es derivable en $x=a$
Otras variables generales observables	$V_{23}$ . Es capaz de dividir correctamente una gráfica en distintos intervalos determinados por los elementos gráficos proporcionados (monotonía y curvatura). $V_{24}$ . Es capaz de definir correctamente distintos intervalos del dominio de la función determinados por la información analítica proporcionada (signo y ceros). $V_{25}$ . Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades gráficas. $V_{26}$ . Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades analíticas. $V_{27}$ . Es capaz para establecer correctamente relaciones entre la primera y segunda derivada

Tabla 2. Variables utilizadas para discretizar los protocolos de resolución de cada uno de los cuestionarios

El propósito del establecimiento de estas variables fue realizar un análisis de conglomerados que nos permitirá identificar y caracterizar preliminarmente los subniveles de desarrollo del esquema de derivada (subgrupos entregados por el análisis de conglomerados). Sin embargo, para cuantificar la presencia o ausencia de cada una de las variables, en los protocolos de resolución de los estudiantes, era necesario utilizar una escala de medida para asignar una puntuación a cada una de ellas. Para el caso específico de este estudio utilizaremos una escala de tipo binaria 1 o 0 (1: se observa la variable; 0: no se observa la variable). A partir de estas dos herramientas (variables y escala) obtuvimos para cada uno de los cuestionarios un vector del tipo  $(V_1, V_2, V_3, \dots, V_{27})$ , en donde cada variable tiene un valor de 0 o 1.

#### 4 | ANÁLISIS Y RESULTADOS

Para el análisis de conglomerados utilizamos el software Infostat versión 2016. Por otra parte, dadas las características del estudio seleccionamos como distancia la euclídea al cuadrado (por tratarse de variables binarias) y como método de agrupamiento el de encadenamiento completo (vecino más lejano). Además, considerando los elementos aportados por la Teoría APOE indicamos que el número inicial de conglomerados es 3 (3 conglomerados iniciales correspondientes a los niveles de desarrollo del esquema Intra-Inter-Trans). A partir de estas consideraciones obtuvimos el dendograma que se muestra en la Figura 1.

El análisis e interpretación del dendograma nos permite indicar que la primera línea vertical de la derecha determina los tres grupos correspondiente a los niveles de desarrollo del esquema de derivada Inter-Intra-Trans y, la segunda línea vertical correspondiente a la mitad de la distancia total (criterio comunmente utilizado) nos indica la subdivisión de cada nivel en dos subniveles de desarrollo, que para cada uno de los casos hemos denominado A y B.

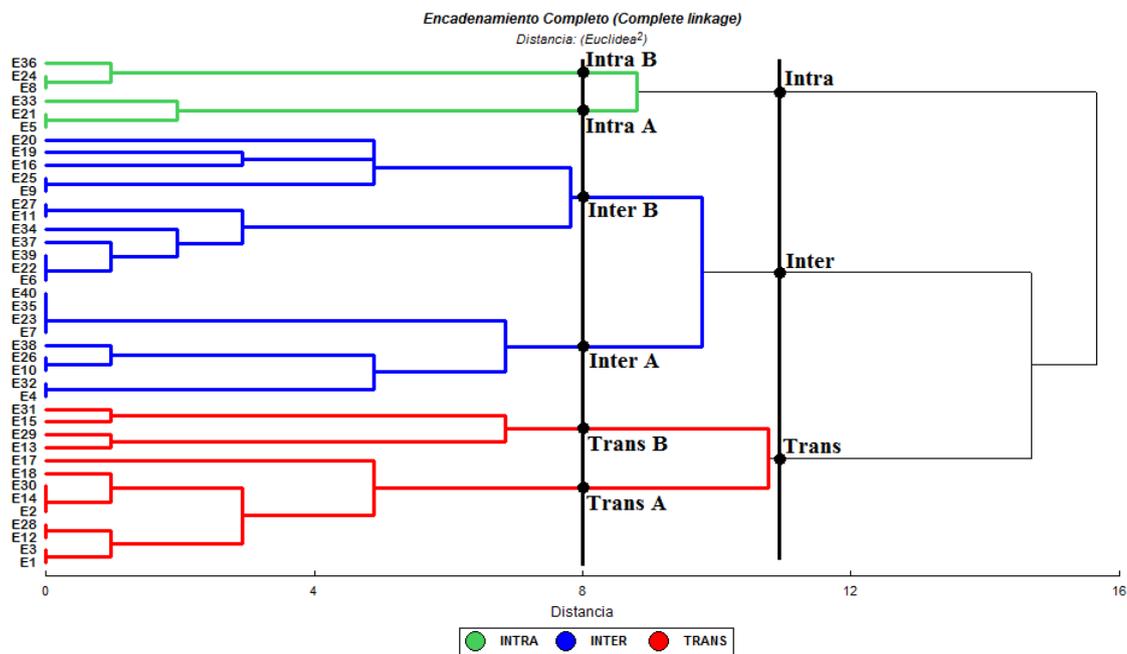


Figura 1. Dendrograma obtenido del análisis de conglomerados con encadenamiento completo y distancia euclidea al cuadrado.

El agrupamiento de los estudiantes en los distintos niveles y subniveles (A y B) se muestra en la Tabla 3.

	INTRA		INTER		TRANS	
<b>Estudiantes</b>	E5, E8, E21, E24, E33, E36		E4, E6, E7, E9, E10, E11, E16, E19, E20, E22, E23, E25, E26, E27, E32, E34, E35, E37, E38, E39, E40		E1, E2, E3, E12, E13, E14, E15, E17, E18, E28, E29, E30, E31	
<b>Total</b>	6		21		13	
<b>SUBNIVELES</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>B</b>
<b>Estudiantes</b>	E5, E21, E33	E8, E24, E36	E4, E7, E10, E23, E26, E32, E35, E38, E40	E6, E9, E11, E16, E19, E20, E22, E25, E27, E34, E37, E39	E1, E2, E3, E12, E14, E17, E18, E28, E30	E13, E15, E29, E31
<b>Total</b>	3	3	9	12	9	4

Tabla 3. Distribución de los estudiantes según los niveles y subniveles entregados por el análisis de conglomerados.

Posteriormente, a partir la asignación de estudiantes a los distintos subniveles de desarrollo determinados por el análisis de conglomerados, observamos cada uno

de los subgrupos generados con el objetivo de caracterizarlos en términos de la presencia y/o ausencia de las variables observadas.

Con relación a los subniveles de desarrollo Intra, se observa que en ambos subniveles no existe comprensión del significado de derivada en un punto. Además, los estudiantes asignados a estos subniveles, no ven a la derivada como una función o como un operador lineal. Es importante destacar que estos estudiantes no hacen uso de derivadas laterales o puntos conflictivos y no establecen relaciones entre la primera y segunda derivadas. Sin embargo, son capaces de determinar intervalos a partir de la información analítica o gráfica, aunque no grafican correctamente.

Por otra parte, en subnivel Intra A, a diferencia de lo que ocurre con el subnivel Intra B, se establecen relaciones directas entre el signo de  $f'$  y la monotonía de  $f$ . Los estudiantes no son capaces de establecer relaciones entre continuidad y derivabilidad, las cuales sí las realizan los estudiantes asignados al subnivel Intra B.

Los estudiantes asignados a los subniveles Inter utilizan el significado geométrico de la derivada (pendiente de la recta tangente), pero no el analítico. Además, utilizan correctamente el significado de los valores extremos y puntos de inflexión en ambos modos de representación. Asimismo, al igual que los estudiantes de los subniveles Intra, no logran establecer relaciones entre la primera y segunda derivadas. Sin embargo, ellos utilizan las derivadas laterales y son capaces de establecer intervalos para graficar a partir de información entregada, aunque grafican con poca precisión.

En cuanto, a las diferencias entre los dos subniveles Inter, podemos indicar que los estudiantes de nivel Inter B no consideran a la derivada como función ni como operador, en contraste con los estudiantes del subnivel Inter A que sí la consideran como función. Además, los estudiantes del subnivel Intra A tienen dificultades en establecer la relación directa entre el crecimiento de la función y el signo de la derivada. En tanto, los estudiantes del subnivel Inter B, tienen dificultades para establecer la relación directa entre la curvatura de la función y el signo de la segunda derivada.

Finalmente, en relación con los subniveles de desarrollo Trans podemos indicar que el subnivel Trans A observamos las 27 variables. Sin embargo, en los protocolos de resolución de los estudiantes, asignados al subnivel Trans B, se observan dificultades para establecer relaciones entre la primera y segunda derivadas, del mismo modo, no observamos la utilización del significado geométrico del punto de inflexión y tampoco el establecimiento de relaciones entre la curvatura de la función y el signo de la segunda derivada.

## 5 | CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo nos han permitido identificar dos subniveles asociados a cada nivel de desarrollo de esquema de derivada, lo cual, es coincidente con los resultados obtenidos por Sánchez-Matamoros et al. (2006) para los niveles de desarrollo Intra e Inter. Sin embargo, el tratamiento estadístico de los datos nos

ha mostrado la existencia, hasta ahora, de dos subniveles asociados al nivel de desarrollo Trans. Cada par de subniveles (Intra- Inter-Trans) tiene asociadas algunas características comunes y otras, que los diferencian. Dichas divergencias se acentúan en los niveles de desarrollo más bajos (Intra, Inter) y son menos notorias, en el nivel de desarrollo Trans. Esta primera caracterización confirma algunas conclusiones de otros estudios previos (SÁNCHEZ-MATAMOROS ET AL., 2006; BAKER ET AL., 2000) en cuanto al papel fundamental que juegan los modos de representación, los extremos y puntos de inflexión, así como también, las relaciones lógicas que pueden establecerse entre elementos matemáticos. Estos últimos son los que determinan los niveles y subniveles de desarrollo del esquema. Finalmente, esperamos que al aumentar la muestra podamos encontrar otros subniveles que nos permitan refinar esta caracterización preliminar.

## REFERENCIAS

ARNON, ILANA ET AL. APOS theory: **A framework for research and curriculum development in mathematics education**. New York: Springer-Verlag, 2014.

ASIALA, MARK ET AL. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In: Schoenfeld, Alan; Kaput, Jim; Dubinsky, Ed (Coords.). **Research in collegiate mathematics education II, CBMS issues in mathematics education**. American Mathematical Society: MAA NOTES, 1997, p. 37-54.

BAKER, BERNADETTE; COOLEY, LAUREL; TRIGUEROS, MARÍA. A Calculus Graphing Schema. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 31, n. 5, p. 557-578, nov. 2000.

DAWKINS, PAUL; EPPERSON, JAMES. The development and nature of problem-solving among first-semester calculus students. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 45, n. 6, p. 839-862, feb. 2014.

DUBINSKY, ED. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: Tall, David (Coord.). **Advanced Mathematical Thinking**. Netherlands: Springer, 1991, p. 95-123.

DUVAL, RAYMOND. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational studies in mathematics**, v. 61, n. 1, p. 103-131, feb. 2006.

FUENTEALBA, CLAUDIO; SÁNCHEZ-MATAMOROS, GLORIA; BADILLO, EDELMIRA; TRIGUEROS, MARÍA. Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 48, n. 3, p. 374-392, jul. 2017.

PIAGET, JEAN; GARCÍA, ROLANDO. **Psicogénesis e historia de la ciencia**. México, España, Argentina, Colombia: Siglo veintiuno editores, S.A, 1983.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, GLORIA; GARCÍA, MERCEDES; LLINARES, SALVADOR. El desarrollo del esquema de derivada. **Enseñanza de las ciencias**, v. 24, n. 1, p. 85-98, mar. 2006.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, Gloria; GARCÍA, Mercedes; LLINARES, Salvador. La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa**, v. 11, n. 2, p. 267-296, jun. 2008.

TRIGUEROS, MARÍA; ESCANDÓN, COVADONGA. Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación: un análisis a través de la estadística implicativa. **Revista mexicana de investigación educativa**, v. 13, n. 36, p. 59-85, mar. 2008.

TRIGUEROS, María. La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. **Educación Matemática**, v. 17, n. 1, p. 5-31, abr. 2005.

## **SOBRE O ORGANIZADOR**

**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES** Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-348-4

