EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 3

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Atena Editora

Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 3

Atena Editora
2019

Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E24 Educação matemática e suas tecnologias 3 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 3)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-349-1
DOI 10.22533/at.ed.491192405

1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2.Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2019

APRESENTAÇÃO

A obra "Educação Matemática e suas tecnologias" é composta por quatro volumes, que vêem contribuir de maneira muito significante para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõe estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 7

FAMÍLIAS CONSISTENTES E A COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS

Abel Rodolfo García Lozano
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática
São Gonçalo - RJ
Universidade do Grande Rio, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional
Duque de Caxias – RJ

Angelo Santos Siqueira
Universidade do Grande Rio, Programa de Pós-Graduação em Humanidades, Culturas e Artes
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional
Duque de Caxias – RJ

Sergio Ricardo Pereira de Mattos
Universidade do Grande Rio, Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional
Duque de Caxias – RJ

Valessa Leal Lessa de Sá Pinto
Universidade do Grande Rio, Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional
Duque de Caxias – RJ

RESUMO: A Teoria dos Grafos é uma área da Matemática Discreta que permite modelar e solucionar problemas reais através do desenvolvimento de algoritmos eficientes. Este trabalho apresenta um novo conceito, as Famílias Consistentes, que podem se juntar a esta Teoria, possibilitando a criação de modelos que poderão ser aplicados na resolução de várias situações. Aqui, o objetivo principal é desenvolver uma heurística para a coloração total de grafos, procurando respeitar a conjectura de Vizing. Para isso, definimos inicialmente alguns termos necessários para a identificação destas famílias. Em seguida, provamos quatro proposições relativas a este novo conceito, e finalizamos o texto fazendo a conexão entre estas famílias e a coloração total de grafos.

PALAVRAS-CHAVE: Famílias consistentes. Conjectura de Vizing. Coloração total de grafos.

ABSTRACT: The Theory of Graphs is an area of Discrete Mathematics, which allows modeling and solving real problems through the development of efficient algorithms. This paper presents a new concept, Consistent Families, which can join to this theory, enabling the creation of models that can be applicated in the resolutions of several situations. Here, the main aim is to develop a heuristic to the total coloring of graphs, respecting the Vizing's conjecture. In order to do it, initially, we defined some necessary terms for the identification of

these families. After that, we proved four propositions related to this new concept, and we finished the text by making the connection between these families and the total coloring of the graph.
KEYWORDS: Consistent Families. Vizing's conjecture. Total coloring of graphs.

1 I INTRODUÇÃO

A Matemática Discreta e o estudo de sistemas finitos assumem um papel importante, entre outros fatores, porque a tecnologia necessária à era da computação é basicamente uma estrutura discreta, na qual, muitas de suas propriedades são entendidas a partir dos sistemas matemáticos finitos. Assim, a exploração de tópicos desta parte da Matemática tem muito a oferecer e as áreas aqui abordadas, Famílias Consistentes e Teoria dos Grafos, permitem o desenvolvimento de modelos matemáticos que auxiliam na resolução de problemas reais.

Segundo Lozano *et. al.* (2016), o conhecimento destes campos da Matemática Discreta também possibilita a compreensão de planilhas eletrônicas e *softwares*, o domínio da escrita matemática formal e a linguagem computacional, e a elaboração de argumentos matemáticos. Estas teorias contribuem com a construção das ideias básicas que permeiam os processos algorítmicos e é a base da ciência da computação moderna. Existem diversas heurísticas que tratam do problema da coloração em grafos, tais como Chams *et. al.* (1987), Hertz e Werra (1987) e Galinier e Hertz (2006), e neste trabalho, apresentamos uma nova heurística para obter a coloração total de um grafo, com no máximo $\Delta + 2$ cores (conjectura de Vizing), baseada no conceito de famílias consistentes.

Este texto está organizado da seguinte forma: inicialmente apresentamos os conceitos de família finita, subfamília, multiplicidade, igualdade de famílias e família robusta, que são necessários para a introdução dos conceitos de família consistente, elemento crítico e família associada. Em seguida, enunciamos e provamos quatro proposições que são úteis para a identificação e construção das famílias consistentes. Logo após, tratamos dos conceitos básicos de teoria dos grafos e coloração, e finalizamos o trabalho fazendo a conexão entre estas famílias e o processo de coloração total de grafos.

2 I DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES BÁSICAS DAS FAMÍLIAS CONSISTENTES

Nesta seção, apresentamos os conceitos de família finita, subfamília, multiplicidade, igualdades de famílias, família robusta, família consistente e elementos crítico, que dão suporte para a leitura do restante do trabalho.

Definição 2.1. (Família finita). Uma família finita de partes de A, é uma função $f: I_n \to P(A)$, onde I_n denota o conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$, para algum $n \in P(A)$ denota o conjunto das partes de A e $f = [f(1), f(2), \ldots, f(n)]$ denota a família f.

Daqui em diante usaremos simplesmente a palavra família, para denotar uma família finita de partes de *A*.

Definição 2.2. (Subfamília). Sejam $f: I_n \rightarrow P(A)$ e $g: I_m \rightarrow P(A)$ famílias. Diz-se que g é subfamília de f, se existe uma função injetiva h: $I_m \rightarrow I_n$, tal que $g(i) = f(h(i))$, para todo $i \in I_m$. Neste caso, usamos a notação $g < f$.

Antes de continuar com as definições, vamos introduzir algumas notações necessárias para a clareza do texto:

- $f \vee g$ denota a menor família h, tal que $f < h$ e $g < h$, ou seja, se existe outra família u, tal que $f < u$ e $g < u$, então $h < u$;
- $f \wedge g$ denota a maior família h, tal que $h < f$ e $h < g$, ou seja, se existe outra família u, tal que $u < f$ e $u < g$ então $u < h$;
- $\smile$ (f) denota o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} f(i);$
- |x| denota a cardinalidade do conjunto X; $[X]^n$ denota a família $[\overbrace{X, X, \ldots, X}^{n \text{ vezes}}];$
- |f| denota a cardinalidade do domínio da família f, i.e. se f: $I_n \rightarrow P(A)$, n є, $|f|$ denota o número n;
- X є f denota que existe i є I_n, tal que f (i) = X onde f: $I_n \rightarrow P(A)$

Definição 2.3. (Multiplicidade). Sejam f uma família e $X \in f$. Diz-se que X tem multiplicidade n em f, se a família $[X]^n$ é subfamília de f, mas a família $[X]^{n+1}$ não é subfamília de f. Denotamos a multiplicidade do conjunto X na família f por μ_f (x)

Definição 2.4. (Igualdade de famílias). Dadas duas famílias f e g diz-se que $f = g$ se $f < g$ e $g < f$.

Definição 2.5. (Família robusta). Uma família f é dita robusta, se $|\smile (f) > |f|$

Definição 2.6. (Família consistente). Uma família f: $I_n \rightarrow P(A)$ é dita consistente, se toda subfamília de f é robusta.

Definição 2.7. (Elemento crítico). Sejam $f = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$ uma família consistente e I є I_n Um elemento $x \in A$ é dito crítico de X_i com relação a f ou simplesmente crítico de X_i (se não existir ambiguidade), se as seguintes condições são verificadas:

1. $x \in X_i$,
2. A família $f' = [X_1, X_2, \ldots, (X_i - \{x\}), \ldots, X_n]$ não é consistente.

3 I ALGUNS RESULTADOS ACERCA DAS FAMÍLIAS CONSISTENTES

Nesta seção, apresentamos quatro importantes proposições acerca das famílias consistentes, além de uma nova definição, família associada. Estes resultados dão subsídios para a construção da heurística desenvolvida na seção 6.

Proposição 3.1. Dadas duas famílias *f* e *g*, então $|\cup(f \vee g)| = |\cup(f)| + |\cup(g)| - |(\cup(f)) \cap (\cup(g))|$ e $|f \vee g| = |f| + |g| - |f \wedge g|$.

Demonstração. Dado que para quaisquer conjuntos *X* e *Y* tem-se que $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$. Tomando $X = \cup(f)$ e $Y = \cup(g)$, o primeiro resultado é imediato. Adicionalmente, temos que $|f| = \sum_{X \in P(A)} \mu_f(X)$, $|g| = \sum_{X \in P(A)} \mu_g(X)$, $\mu_{f \vee g}(X) = max\{\mu_f(X), \mu_g(X)\}$, $\mu_{f \wedge g}(X) = min\{\mu_f(X), \mu_g(X)\}$ e $max\{a, b\} = a + b - min\{a, b\}$ para quaisquer que sejam *a* e *b*, de onde segue o segundo resultado.

Proposição 3.2. Sejam f = [X_1, X_2, ..., X_n] uma família consistente, i_0 Î I_n e *x* Î *A* elemento crítico de X_{io} então existe uma subfamília g: I_m → P(A) de *f*, tal que:

1. $X_{i_0} \in g$,
2. $|\cup(g)| = m + 1$ e
3. *x* é crítico de X_{i_0} com relação a *g*.

Demonstração. Como *x* é crítico de X_{io} então a família $f' = [X_1, X_2, \ldots, (X_{i_0} - \{x\}), \ldots, X_n]$ não é consistente, i.e. existe uma subfamília de $g' = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_m]$ que não é robusta. É claro que (X_{io} - {x}) є g' pois caso contrário g' seria subfamília de *f* e toda subfamília de *f* é robusta. Seja então j_0, tal que $Y_{j_0} = (X_{i_0} - \{x\})$ A subfamília g= [Y_1, Y_2, ..., Y_{io} ⌣ {x}, ..., Y_m] de *f* satisfaz as condições desejadas. De fato, basta observar que $(\cup(g) - \{x\}) = \cup(g')$, pois *g* é robusta e g' não. Logo, $|\cup(g)| = |\cup(g')| + 1$, de onde se deduz facilmente que $|\cup(g)| = m + 1$.

Proposição 3.3. Dadas duas famílias *f* e *g*, então $\cup(f \wedge g) \subset (\cup(f) \cap \cup(g))$.

Demonstração. Seja *x* є ⌣ (f ∧ g) então existe um conjunto *X* є ⌣ (f ∧ g) tal que *x* є *X*. Agora, se *X* є ⌣ (f ∧g) então *X* є *f* e *X* є *g*. Daí, *X* c (⌣(f) ⌢⌣(g)). Logo, *x* є (⌣(f) ⌢⌣(g))

Definição 3.1. (Família associada). Dados uma família consistente *f* e um elemento crítico *x* de *X* є *f*. Uma subfamília *g* de *f* é dita associada a *x* relativamente a *X* e *f*, ou simplesmente associada a *x*, se não existir ambiguidade, se satisfaz as seguintes condições:

1. I⌣ (g)I = IgI +1
2. *x* é crítico para *X* com relação a *g* e
3. Se existe uma subfamília de *g'* satisfazendo as condições 1 e 2, então g'= g

Proposição 3.4. Sejam f = [X_1, X_2, ..., X_n] uma família consistente e i_0 є I_n. Então uma e somente uma das afirmações seguintes é verdadeira:

1. IX_{io}I = 2 ou

2. X_{io} contém no máximo um elemento crítico.

Demonstração. Sejam g = [Y_1, Y_2, ..., Y_m] uma subfamília de *f* e *x* um elemento crítico de X_{io} com relação a *f*, de forma que *g* é associada a *x* com relação a *f* e X_{io} Sem perda de generalidade, suponhamos que X_{io} = Y_m e g'= [Y_1, Y_2, ..., Y_{m-1}]. Antes de prosseguir com a demonstração da proposição, é necessário provar alguns fatos:

Fato 1. $x \notin \cup(g')$.

Prova. Suponhamos que x є⌣ (g') então $g_1 = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m - \{x\}]$ é robusta, mas não consistente, logo existe g_2 = [W_1, W_2, ..., W_s] subfamília de g_1 que não é robusta. Sem perda de generalidade sejam $W_s = (Y_m - \{x\})$ e $g_3 = [W_1, W_2, \dots, W_s \cup \{x\}]$. Se x є⌣ ($g_2$) então g_3 não é robusta, mas g_3 é uma subfamília de *f* o que é uma contradição, logo $x \notin \cup(g_2)$. Como X є⌣ (g') então $g_3 < g$, $|g_3| = |\cup(g_3)| + 1$, *X* é crítico para W_S ⌣{x} = X_{IO} com relação a g_3 e g_3 ¹ ≠ *g*, o que é uma contradição.

Fato 2. $(X_{i_0} - \{x\}) \subset \cup(g')$.

Prova. Suponhamos que existe Z є X_{IO} tal que $z \neq x$ e $z \notin \cup(g')$. Pelo fato 1, temos $x \notin \cup(g')$, daí $|\cup(g')| \leq |\cup(g)| - 2 = (m+1) - 2 = m - 1$ e |g| = |g| - 1= -1 portanto g' não é robusta. Mas g'< f logo *f* não pode ser consistente, o que é um absurdo.

Fato 3. A família g_1 = [Y_1, Y_2, ..., Y_m - {x}] não é robusta.

Prova. Como $x \notin \cup(g')$. e |⌣(g)| = m+1 então |⌣(g_1)| = m Como |g_1|=m então g_1 não é robusta.

Continuamos agora com a demonstração da proposição. Se |X_{io}| = 2 então para qualquer elemento u є X_{io} a família [X_{io} - {u}] não é robusta, pois os dois elementos de X_{io} são críticos.

Se |X_{io}| > 2 suponhamos que existe *y* ≠ *x,* outro elemento crítico de X_{io} e h = [Z_1, Z_2, ..., Z_t] a família associada a *y* com relação a X_{io} e *f*. Novamente por facilidade, suponhamos que X_{io} = Z_t e seja h'= [Z_1, Z_2, ..., Z_{t-1}] Pela proposição 3.1, temos que |gvh| = |g| + |h| - |g∧h| e |⌣(g v h)| = |⌣(g)| + |(⌣ (h)| - |⌣(g)) ⌢(⌣(h))|. Como g = g'⌣ {X_{io}} e h = h'⌣ {X_{io}} então |g v h| = m + t - (1 + |(g'∧ h')|). Por outro lado, |⌣ (g v h)| = (m +1) + (t + 1) - (2 + |(⌣(g'))⌢ (⌣(h'))|) = m +t - |(⌣ (g'))⌢(⌣ (h'))|. Basta observar que pelo fato 1, $x \notin \cup(g')$. e $y \notin \cup(g')$. e pelo fato 2 (X_{io} - {x})c u (g') e (X_{io} - {y}) c u (h') Como |X_{io}| > 2 então existe pelo menos um elemento z є X_{io} tal que *z* ≠ *x* e *z* ≠ *y*. Pelo fato 2, z є ⌣ (g') e z є ⌣ (h') então |(⌣ (g')) ⌢ (⌣(h'))|≥1

Agora, as famílias g' e h' não têm elementos em comum (I) ou (g'∧ h') é robusta (II), pois (g'∧ h') é subfamília de *f*. De (I), |g v h| = m +t -1 e |⌣(g v h)| = m +t - |⌣(g')) ⌢(⌣(h'))| mas |(⌣(g'))⌢(⌣(h'))|≥1 então |⌣(g v h) ≤ m + t - 1= |g v h| o que é uma contradição, pois (g v h) é subfamília de *f*. De (II), |g v h| = m + t - (1 +|g'∧ h'|) e |⌣(g v h)| = m + t - |(⌣ (g')) ⌢(⌣ (h'))|. Pela proposição 3.3, |⌣ (g v h)| ≤ m + t - |⌣(g'∧ h')| Como (g'∧ h') é robusta, então |⌣ (g'∧ h') ≥ 1 + |(g'∧ h')| Logo, |⌣(g v h) ≤ lg v h| o que é uma contradição, pois (g v h) é subfamília de *f*.

Exemplo 3.1. (Famílias robustas, consistentes, elemento crítico, família associada).

1. $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f=[\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}]$.

$n=3$, $f(1)=\{1, 2, 3\}$, $f(2)=\{2, 3\}$, $f(3)=\{2, 4\}$.

2. $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $g=[\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 4\}]$.

$n=3$, $g(1)=\{1, 2, 3\}$, $g(2)=\{3, 4\}$, $g(3)=\{3, 4\}$.

No exemplo 3.1, a família *f* é robusta e consistente, vejamos: $|f|=3<|\cup(f)|=|\{1, 2, 3, 4\}|=4$, logo *f* é robusta. Como $\cup([f(1), f(2)])=3$, $\cup([f(1), f(3)])=4$, $\cup([f(2), f(3)])=3$ e $\cup([f(1)])=3$, $\cup([f(2)])=\cup([f(3)])=2$, *f* também é consistente.

Já a família *g* é robusta, mas não é consistente, vejamos: $|g|=3<|\cup(g)|=4$, logo *g* é robusta. Mas $|[g(2), g(3)]|=2=|\cup([g(2), g(3)])|$, logo *g* não é consistente.

No mesmo exemplo, 1 é elemento crítico de {1, 2, 3} para a família *f*, pois a família [{2, 3}], {2, 3}, {2, 4}] não é consistente. A família associada a 1 é [{1, 2, 3}, {2, 3}]

4 I CONCEITOS BÁSICOS DE TEORIA DOS GRAFOS

Nesta seção, são apresentadas definições básicas e terminologias da teoria de grafos utilizadas neste trabalho. Outros conceitos sobre grafos podem ser encontrados em Bondy e Murty (1976), Yap (1986), Yap (1996) e Boaventura Netto (2003).

Denota-se por *G*(*V*, *E*) um grafo *G* composto por um conjunto não vazio de vértices *V* e um conjunto de arestas *E*, tais que cada aresta conecta dois vértices. A Figura 4.1 ilustra um grafo com 6 vértices e 10 arestas.

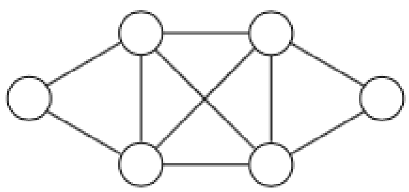

Figura 4.1. Um grafo *G*(*V, E*) com 6 vértices e 10 arestas.

Neste trabalho, a palavra grafo, tem o significado de grafos simples sem laços. Para cada vértice *v* o número de arestas incidentes em *v* é dito grau do vértice *v* e denotado por *d*(*v*). O grau mínimo será denotado por δ, enquanto o grau máximo é representado por Δ. Um grafo *G*(*V, E*), tal que todos os seus vértices tenham o mesmo grau *k* é chamado de grafo *k*-regular. Na Figura 4.1, temos δ = 2 e Δ = 4, enquanto que na Figura 4.2, o grafo é 4-regular com 8 vértices, 16 arestas e δ = Δ = 4.

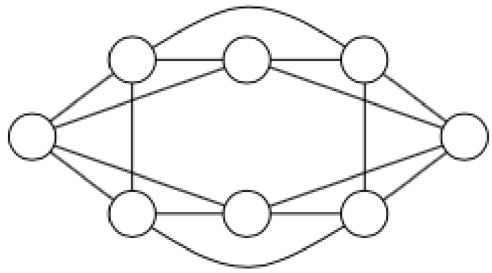

Figura 4.2. Um grafo 4-regular com 8 vértices e 16 arestas.

Um caminho em um grafo $G(V, E)$ é uma sequência finita e não nula $P_k = v_0e_1v_1e_2v_2$ ... e_kv_k cujos termos são alternativamente vértices e arestas, tais que, para $i = 1, ..., k$, os extremos de e_i são $v_{i\text{-}1}$ e v_i e nenhum elemento de P_k se repete. Neste caso, diz-se que o caminho P_k liga ou conecta os vértices v_0 e v_k. Se uma sequência satisfaz as condições acima, e, além disso, $v_k = v_{0,}$ então a sequência é chamada de ciclo C_k.

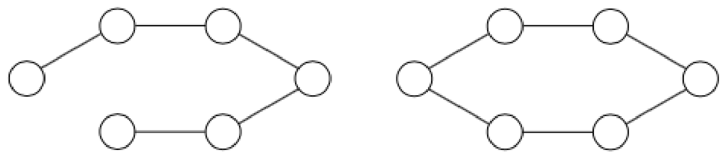

Figura 4.3.Um caminho P6e um ciclo C6.

5 I COLORAÇÃO EM GRAFOS

Nesta seção, são apresentados os conceitos de coloração de vértices, coloração total e coloração total equilibrada que servem de suporte para o restante do trabalho. Para um estudo mais aprofundado, pode-se consultar Yap (1996), Lozano (2005), Lozano *et. al.* (2009) e Siqueira (2011).

Dado um grafo $G(V, E)$, uma coloração de vértices de G é uma aplicação do conjunto de vértices V em um conjunto de cores $C = \{1, 2, ..., k\}$, k Î. Uma coloração de vértices com k cores, é chamada de k-coloração de vértices, e será dita própria, se nenhum par de vértices adjacentes tiver a mesma cor associada.

Uma coloração total de G é uma aplicação do conjunto $E \smile V$ em um conjunto de cores $C = \{1, 2, ..., k\}$, k Î. Uma coloração total com k cores, é chamada de k-coloração total, e será própria é se nenhum par de elementos incidentes ou adjacentes tiver a mesma cor associada. Esta coloração total será equilibrada se, para todo par de cores c_1 e c_2, tem-se $|a(c_1) – a(c_2)| \leq 1$, onde, $a(c_i)$ representa o número de aparições da cor c na coloração. A Figura 5.1 ilustra uma 4-coloração total equilibrada, com as cores 1, 2, 3 e 4. Nela, observa-se $a(1) = a(2) = a(4) = 4$ e $a(3) = 5$, o que de fato caracteriza uma coloração equilibrada.

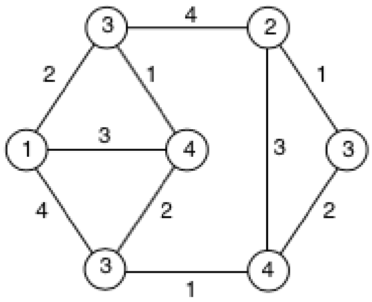

Figura 5.1.Uma 4-coloração total equilibrada.

6 I COLORAÇÃO TOTAL A PARTIR DAS FAMÍLIAS CONSISTENTES

Conceitos introdutórios sobre grafos e coloração foram apresentados nas seções 4 e 5. Conceitos mais específicos sobre coloração e coloração com folga de ordem *k*, podem ser vistos em Yap (1996), Lozano *et. al.* (2009), Lozano *et. al.* (2011) e Lozano *et. al*. (2016).

Abaixo ilustramos o passo a passo da coloração total de um grafo 3-regular, a partir do conceito das famílias consistentes. Segundo Lozano *et. al.* (2009) todo grafo $G \neq C_5$ pode ser colorido com folga 2 com no máximo $\Delta + 2$ cores. Iniciamos gerando uma coloração de vértices com folga 2, conforme mostra a Figura 6.1.

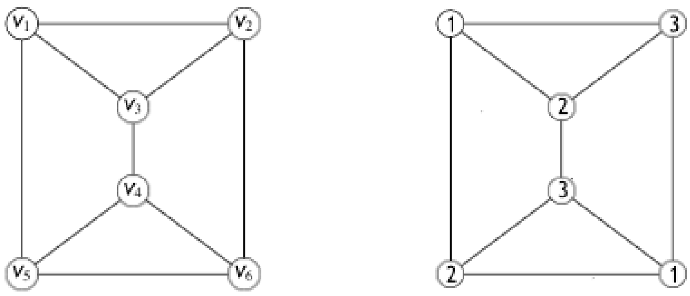

Figura 6.1.Umgrafo 3-regular e sua respectiva coloração de vértices com folga 2

Na sequência associamos a cada aresta um conjunto de cores permissíveis a ela, respeitando a conjectura de Vizing, e a cada vértice associamos a família formada pelos conjuntos de cores correspondentes as arestas incidentes nele. É fácil ver que estas famílias são todas consistentes, uma vez que a coloração é com folga 2. O próximo passo é destacar os elementos críticos das famílias consistentes relacionadas a cada vértice. Optamos por inserir um sobreíndice no elemento crítico relativo à família ligada ao vértice de mesmo subíndice.

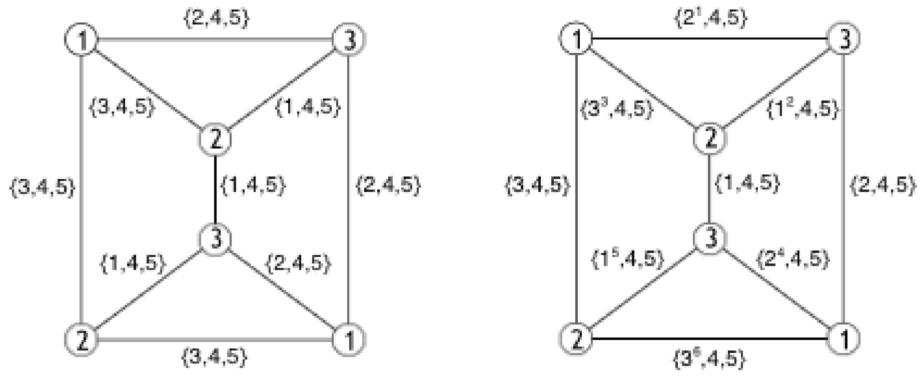

Figura 6.2.Conjunto de cores permissíveis a cada aresta e seus elementos críticos.

Em seguida iniciamos a coloração das arestas, escolhe-se uma aresta do grafo, por exemplo, aresta v_2v_6 e atribui-se a ela uma cor que não elimine nenhum elemento crítico das famílias relacionadas aos seus vértices extremos. Cada aresta colorida é marcada (nas figuras aparecem com linhas mais espessas) e a cor escolhida para esta aresta é removida dos conjuntos associados as arestas adjacentes a ela. Note que a cor escolhida em cada passo mantém a consistência de todas as famílias associadas aos vértices, pois não foram removidos os elementos críticos. Esse processo se repete até a coloração total do grafo ou até não existir uma aresta factível de ser colorida por esse método. Neste caso, se completa a coloração com o menor número de cores possível.

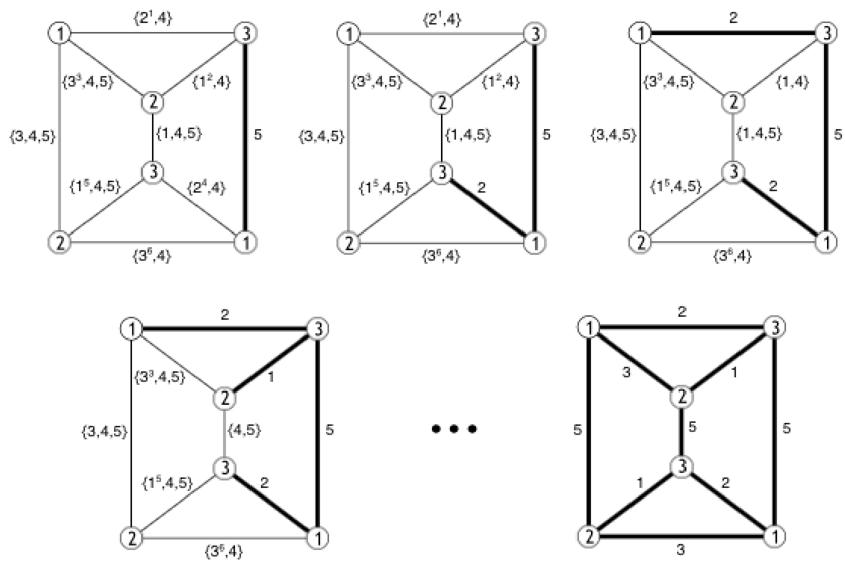

Figura 6.3.Processo de coloração das arestas.

7 I CONCLUSÕES

Muitos conceitos da Matemática Discreta, como estes que apresentamos aqui, são considerados assuntos indispensáveis ao desenvolvimento das ciências e da tecnologia. Eles são instrumentos fundamentais para resolver problemas de gestão e de computação em atividades produtivas, como por exemplo, no transporte, telecomunicação, informática, entre outras.

Este trabalho, como salientamos, apresentou resultados que mostram o potencial do conceito de famílias consistentes no desenvolvimento de uma heurística para a coloração total de grafos, procurando respeitar a conjectura de Vizing. Ressaltamos ainda, que o fato de estarmos colorindo totalmente um grafo, não impede a busca por uma coloração total e equilibrada, conforme pode ser observado no exemplo acima.

Para trabalhos futuros, pretendemos apresentar novas proposições que garantam a coloração total de subfamílias de grafos, respeitando a conjectura de Vizing, e utilizando o conceito de famílias consistentes.

REFERÊNCIAS

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos: Teorias, Modelos Algoritmos**. Rio de Janeiro, Edgard Blücher, 2003.

BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. Graph Theory with Applications. New York, North-Holland, 1976.

CHAMS, M., HERTZ, A., WERRA, D. “Some experiments with simulated annealing for coloring graph”, European Journal of Operational Research, v.32, 260-266, 1987.

GALINIER, P., HERTZ, A. “A survey of local search methods for graph coloring”, Computers & Operations Research, v.33, 2547-2562, 2006.

HERTZ, A., WERRA, D. “Using tabu search techniques for graph coloring”, Computing, v.39, 345-351, 1987.

LOZANO, A. R. G. **Coloração total equilibrada de grafos**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., WAGA, C., MARKENZON, L. “Coloração de Vértices com Folga”. In: XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Porto Seguro. Anais do XLI SBPO, pp. 3084-3091, 2009.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., SIQUEIRA, A. S. “Relação entre coloração de vértices com folga e coloração total equilibrada”, Almanaque Unigranrio de Pesquisa, v.1, 103-106, 2011.

LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S., FRIEDMANN, C. V. P., JURKIEWICZ, S. “Relationship Between Equitable Total Coloring and Range Coloring in Some Regular Graphs”, **Pesquisa Operacional**, v.36, 101-111, 2016.

LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S., MATTOS, S. R. P., JURKIEWICZ, S. “Produto Funcional de Grafos: Um Modelo para conexão de sistemas multiagentes”, Tendências em Matemática Discreta e Computacional, v.17, 341-352, 2016.

SIQUEIRA, A. S. Coloração total equilibrada em subfamílias de grafos regulares. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

YAP, H. P. Some topics in graph theory. London, Cambridge University Press, 1986.

YAP, H. P. Total colorings of graphs. Berlin, Springer, 1996.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-349-1
9 788572 473491