

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

 **Atena**
Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof^a Dr^a Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof.^a Dr.^a Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Dr.^a Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.^a Dr.^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof.^a Dr.^a Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof.^a Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
E24	Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2) Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-348-4 DOI 10.22533/at.ed.484192405 1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série. CDD 510.7
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
O ALGORITMO ESPECTRAL COMO ALTERNATIVA AO ALGORITMO K-MEANS EM CONJUNTO DE DADOS ARTIFICIAIS	
Luciano Garim Garcia Leonardo Ramos Emmendorfer	
DOI 10.22533/at.ed.4841924051	
CAPÍTULO 2	16
NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza Hélio Magalhães De Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.4841924052	
CAPÍTULO 3	24
ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza	
DOI 10.22533/at.ed.4841924053	
CAPÍTULO 4	32
ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA	
Amanda Barretos Lima Garuth Brenda Anselmo Mendes Isabela Geraldo Reghin Rosângela Teixeira Guedes	
DOI 10.22533/at.ed.4841924054	
CAPÍTULO 5	46
DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	
Mariana Coelho Portilho Bernardi Adilandri Mércio Lobeiro Jeferson Rafael Bueno Thiago José Sepulveda da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.4841924055	
CAPÍTULO 6	57
MODELO MATEMÁTICO PARA AUXILIAR O PLANEJAMENTO DA MANUTENÇÃO PREVENTIVA DE MOTORES ELÉTRICOS	
Thalita Monteiro Obal Jonatas Santana Obal	
DOI 10.22533/at.ed.4841924056	

CAPÍTULO 7	64
PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE FLUXO EM AQUÍFERO CONFINADO	
João Paulo Martins dos Santos Alessandro Firmiano de Jesus Edson Wendland	
DOI 10.22533/at.ed.4841924057	
CAPÍTULO 8	83
RESONANT ORBITAL DYNAMICS OF CBERS SATELLITES	
Jarbas Cordeiro Sampaio Rodolpho Vilhena de Moraes Sandro da Silva Fernandes	
DOI 10.22533/at.ed.4841924058	
CAPÍTULO 9	91
TESTES ADAPTATIVOS ENVOLVENDO O CONTEÚDO DE DERIVADAS: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL	
Patrícia Liane Grudzinski da Silva Claudia Lisete Oliveira Groenwald	
DOI 10.22533/at.ed.4841924059	
CAPÍTULO 10	104
LOCALIZAÇÃO DE FALTAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO POR ANÁLISE DE SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO	
Danilo Pinto Moreira de Souza Eliane da Silva Christo Aryfrance Rocha Almeida	
DOI 10.22533/at.ed.48419240510	
CAPÍTULO 11	116
MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA	
Gustavo Henrique Petrolí Norberto Anibal Maidana	
DOI 10.22533/at.ed.48419240511	
CAPÍTULO 12	133
LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO	
Claudio Fuentealba Edelmira Badillo Gloria Sánchez-Matamoros Andrea Cárcamo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240512	
CAPÍTULO 13	143
OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
Márcio Aurélio da Silva Fran Sérgio Lobato Aldemir Ap Cavalini Jr Valder Steffen Jr	
DOI 10.22533/at.ed.48419240513	

CAPÍTULO 14	156
SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY	
Gino Gustavo Maqui Huamán	
Ulcilea Alves Severino Leal	
Geraldo Nunes Silva	
DOI 10.22533/at.ed.48419240514	
CAPÍTULO 15	164
VALIDAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA O ESCOAMENTO DE GRÃOS DE SOJA	
Rodolfo França de Lima	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Dirceu Lima dos Santos	
Adriano Pilla Zeilmann	
DOI 10.22533/at.ed.48419240515	
CAPÍTULO 16	181
TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA	
Landy Sosa Moguel	
Guadalupe Cabañas-Sánchez	
Eddie Aparicio Landa	
DOI 10.22533/at.ed.48419240516	
CAPÍTULO 17	192
SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE	
Francisco Helmuth Soares Dias	
Jacques Aveline Loureiro da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.48419240517	
CAPÍTULO 18	199
SIMULAÇÃO 3D DO FLUXO DE AR DE UM SISTEMA REAL DE ARMAZENAGEM DE GRÃOS	
Vanessa Faoro	
Rodolfo França de Lima	
Aline Tampke Dombrowski	
Manuel Osório Binelo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240518	
CAPÍTULO 19	207
CONTROLE ÓTIMO DO FLUXO DE ÁGUA EM UMA FÔRMA DE GELO	
Xie Jiayu	
João Luis Gonçalves	
DOI 10.22533/at.ed.48419240519	
CAPÍTULO 20	213
CÓDIGOS CÍCLICOS DEFINIDOS POR ANULAMENTO	
Conrado Jensen Teixeira	
Osnel Broche Cristo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240520	

CAPÍTULO 21	216
ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA	
Bruno Carlos Lugão Diego Campos Knupp Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues Antônio José da Silva Neto	
DOI 10.22533/at.ed.48419240521	
CAPÍTULO 22	225
ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	
Ronaldo Mendes Evaristo Kelly Cristiane Iarosz Silvio Luiz Thomaz de Souza Ricardo Luiz Viana Moacir Fernandes de Godoy Antonio Marcos Batista	
DOI 10.22533/at.ed.48419240522	
CAPÍTULO 23	235
CONSTRUÇÃO DE UM AEROMODELO DE MACARRÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA	
Alissan Sarturato Firão Ernandes Rocha de Oliveira Zulind Luzmarina Freitas	
DOI 10.22533/at.ed.48419240523	
SOBRE O ORGANIZADOR	239

DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Mariana Coelho Portilho Bernardi

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,
DACOC – Departamento Acadêmico de
Construção Civil
Campo Mourão – Paraná

Adilandri Mércio Lobeiro

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,
DAMAT – Departamento Acadêmico de
Matemática
Campo Mourão – Paraná

Jeferson Rafael Bueno

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,
DACOC – Departamento Acadêmico de
Construção Civil
Campo Mourão – Paraná

Thiago José Sepulveda da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,
DAMAT – Departamento Acadêmico de
Matemática
Campo Mourão – Paraná

RESUMO: Neste artigo, apresenta a dedução matemática e encontra a solução analítica e numérica da equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com condições de contorno do tipo Dirichlet-Dirichlet, que descreve um arranjo estrutural viga-pilar utilizado na Engenharia Civil. Como estudo de caso, obtém-se a equação diferencial da linha elástica de uma viga biapoiada com carregamento

distribuído. A priori, foi encontrado a solução analítica desta equação e implementou-se um programa em MATLAB, em que, calculou a solução numérica, com base no Método das Diferenças Finitas, aplicando o Método de Decomposição em LU para resolver o sistema de equações lineares. Por fim, para validação dos resultados numéricos, os mesmos foram comparados com a solução analítica.

PALAVRAS-CHAVE: Linha elástica; Análise Estática; Euler-Bernoulli.

ABSTRACT: In this paper, he presents the mathematical deduction and finds the numerical and analytical solution of the second order linear differential equation, with Dirichlet-Dirichlet boundary conditions, which describes a structural beam-pillar arrangement used in Civil Engineering. As a case study, we obtain the differential equation of the elastic line of a biapoiada beam with distributed load. A priori, the analytical solution of this equation was found and a MATLAB program was implemented, in which the numerical solution was calculated based on the Finite Differences Method, applying the Decomposition Method in LU to solve the system of linear equations. Finally, for validation of the numerical results, they were compared with the analytical solution.

KEYWORDS: Elastic line, Static analysis, Euler-Bernoulli.

1 | INTRODUÇÃO

O estudo de deflexão de vigas é importante na Engenharia Civil. Utiliza o termo deflexão para se referir a configuração deformada do eixo longitudinal de uma viga, que ocorre quando a mesma é submetida a carregamentos que causam flexão. Em projetos de Engenharia, busca-se que a estrutura (ou elemento estrutural) satisfaça os parâmetros aceitáveis onde, evita-se deslocamentos excessivos para que, o Estado Limite de Serviço (ELS) e o Estado Limite Último (ELU) sejam atendidos, conforme recomenda a NBR 6118 [1].

Neste trabalho, apresenta a dedução matemática da equação diferencial ordinária (EDO) linear de segunda ordem, conforme [3], que controla a deflexão em vigas, conhecida como equação da linha elástica, dado por (1),

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{M}{E_{cs}I_z} \quad (1)$$

em que, u denota a função que governa a deflexão da viga a uma distância x , M o momento fletor, I_z o momento de inércia da seção transversal da viga e E_{cs} o módulo de elasticidade secante a ser utilizado nas análises elásticas de projeto, conforme recomenda a NBR 6118 [1].

O produto $E_{cs}I_z$ é chamado de rigidez à flexão da viga e o momento fletor pode ser obtido por meio do equilíbrio estático em uma seção transversal da viga, Figura 1. Na Figura 1, q é a intensidade da carga uniformemente distribuída, l é o comprimento do vão e R_a a reação de apoio.

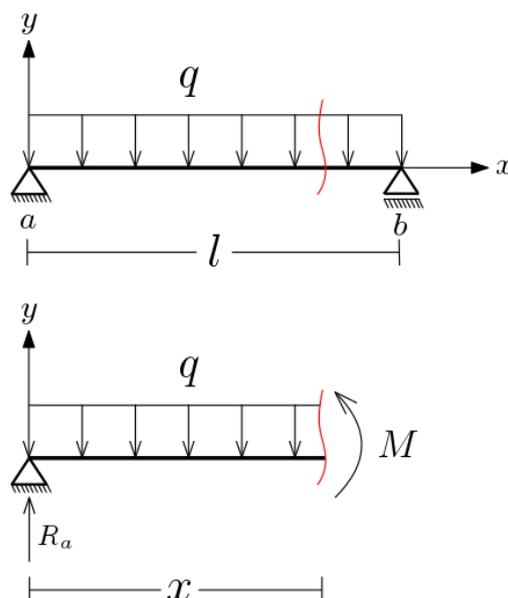


Figura 1 - Viga biapoiada com corte na seção transversal a uma distância x , em que $0 \leq x \leq l$.

A Figura 2, denota a seção transversal da viga em questão, em que b_w é a largura e H é a altura da seção transversal.

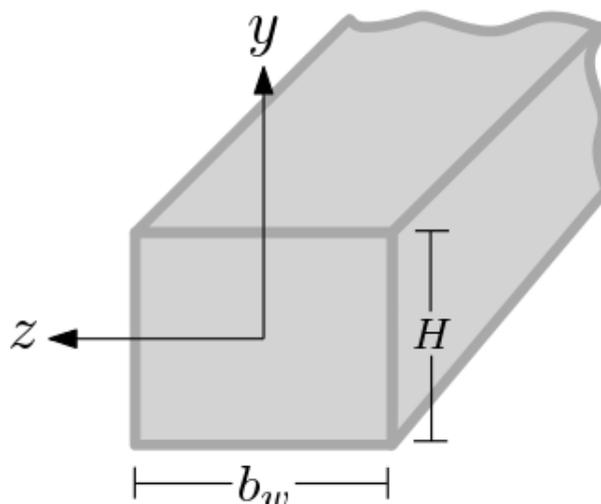


Figura 2 - Seção transversal de uma viga retangular.

Ao observar a Figura 1, obtém-se a equação do momento fletor na viga, (2) onde realiza-se o equilíbrio de momentos na seção de corte, [3], [6],

$$\Sigma M = M + \frac{qx^2}{2} - xR_a = 0. \quad (2)$$

A reação de apoio, R_a , pode ser determinada ao fazer o equilíbrio de forças na direção y , ao utilizar o carregamento total, conforme (3),

$$R_a = \frac{ql}{2}. \quad (3)$$

Ao substituir (3) em (2), obtém-se (4),

$$M + \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2} = 0, \quad (4)$$

e ao isolar M encontra (5),

$$M = \frac{qx}{2}(l - x). \quad (5)$$

A equação (5) representa a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga. Ao substituir (5) em (1), obtém-se (6),

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{qx}{2E_{cs}I_z}(l - x), \quad (6)$$

que representa a equação da Linha Elástica de uma viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído, sujeita as condições de contorno dadas em (7),

$$u(0) = 0 \text{ e } u(l) = 0, \quad (7)$$

nas quais, indicam que os deslocamentos nos extremos da viga são nulos, ou seja, não há deflexão nos apoios. As equações (6) e (7) garantem a unicidade da solução do problema de valor de contorno (PVC), conhecido como Dirichlet-Dirichlet.

2 | APLICAÇÃO EM VIGAS PRÉ-FABRICADAS

A idealização de vigas e as equações apresentadas anteriormente podem ser utilizadas em diversos casos na Engenharia Civil, como exemplo, apresenta-se o caso de vigas pré-fabricadas em concreto armado, Figura 3, em que, observa-se uma viga apoiada em dois pilares, sendo este um arranjo estrutural muito comum em edifícios pré-fabricados e pré-moldados [4].



Figura 3 - Viga típica de concreto armado pré-fabricada.

Esse tipo de estrutura recebe o nome de pré-fabricada, pois os elementos estruturais são produzidos em indústrias especializadas, sob condições rigorosas de controle de qualidade, conforme item 3.6 da NBR 9062 [2]. Em outras palavras, os elementos estruturais pré-fabricados chegam na obra prontos para serem utilizados.

Não se deve confundir o termo pré-fabricado com o termo pré-moldado, já que o segundo se refere a elementos executados fora do local de utilização definitiva na estrutura item 3.5 da NBR 9062 [2], mas, são feitos na própria obra. A ligação entre viga e pilar é garantida por meio de detalhes de encaixe, como mostra a Figura 4.

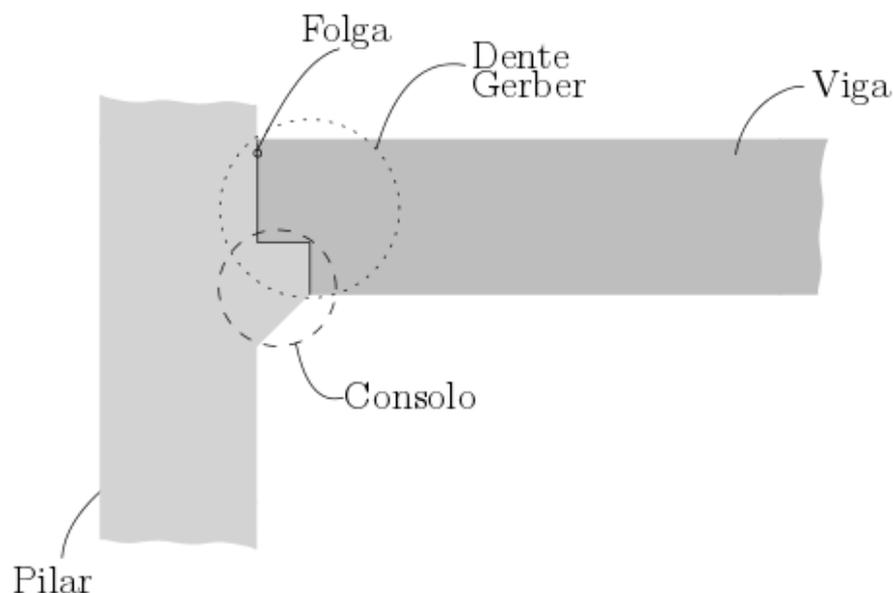


Figura 4 - Detalhe típico de ligação viga-pilar pré-fabricados.

Ao considerar a situação problema apresentada na Figura 3, nota-se que o carregamento da viga será devido apenas ao seu peso próprio e pode ser representado como um carregamento uniformemente distribuído. Dessa forma, o modelo estrutural dessa viga pré-fabricada será o mesmo apresentado na Figura 1.

3 | PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DE DEFLEXÃO EM VIGAS

Como estudo de caso, utiliza-se a EDO (6) para determinar os deslocamentos ao longo do vão da viga, a qual, possui tais propriedades geométricas:

- Comprimento do vão: $l = 5000\text{mm}$
- Seção transversal:
 - Largura: $b_w = 200\text{mm}$;
 - Altura: $H = 500\text{ mm}$
 - Momento de Inércia: $I_z = 10^8\text{mm}^4$

e, para as propriedades do material, concreto armado, de acordo com a NBR 6118 [1], tem-se,

- Peso específico: $p = 25\text{KN}$
- Resistência à compressão: $f_{ck} = 30\text{MP}_a$
- Módulo de elasticidade:
 - Tangente inicial: $E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}}$;
 - Secante: $E_{CS} = 0,85_{ci} = 26071,6\text{ MP}_a$

O carregamento da viga é obtido pelo produto de peso específico pela área da seção transversal, o que resulta em uma carga uniforme $q = 2,5\text{ N/mm}$.

Pelo fato, da viga estar biapoiada obtém-se o Problema de Valor de Contorno

(PVC), do tipo Dirichlet-Dirichlet,

$$\begin{cases} \frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{qx}{2E_{cs}I_z} (l-x), & 0 < x < l, \\ u(0) = 0, & u(l) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

em que, $u(0)=0$ e $u(l)=0$ são as condições de contorno, as quais indicam que nas extremidades da viga o deslocamento vertical é nulo.

4 | SOLUÇÃO NUMÉRICA

Um Problema de Dirichlet-Dirichlet é caracterizado conforme apresentado em (9),

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta, \end{cases} \quad (9)$$

A solução numérica deste tipo de problema pode ser obtida pelo *Método das Diferenças Finitas* (MDF). O MDF é um método consagrado em transformar uma equação diferencial em uma equação de diferenças, que gera um sistema de equações lineares, [5].

Para fazer a discretização do intervalo $[a;b]$, em primeiro lugar, selecione um número inteiro $N>0$ e divide o intervalo $[a;b]$ em $N+1$ subintervalos iguais, cujos extremos são os pontos de malha,

$$x_i = a + ih. \quad (10)$$

Ao substituir $i=0$ e $i=N+1$ em (10), obtém-se os extremos do intervalo, $x_0 = a$ e $x_{N+1} = b$ respectivamente. Em particular, para $i=N+1$ encontra-se o tamanho do passo, h , dado por,

$$h = \frac{b-a}{N+1}. \quad (11)$$

A equação diferencial a ser aproximada é,

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x). \quad (12)$$

Ao substituir as equações

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i+h) - y(x_i-h)}{2h} + O(h^2) \quad (13)$$

e

$$y''(x_i) = \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2} + O(h^2), \quad (14)$$

em (12), obtém-se

$$-r(x_i) = \left(\frac{-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1}}{h^2} \right) + p(x_i) \left(\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right) + q(x_i)w_i, \quad (15)$$

em que $w_i \approx y(x_i)$ para $i = 1, 2, \dots, N$. Observe que w_i representa a solução numérica, $y(x_i)$ a solução analítica e p , q e r são as funções dadas em (9), juntamente com as condições de contorno que são escritas em (16),

$$w_0 = \alpha, \quad w_{N+1} = \beta. \quad (16)$$

A equação (15) é conhecida como Método das Diferenças Finitas para problemas lineares de segunda ordem do tipo de Dirichlet-Dirichlet, com erro de truncamento da ordem $O(h^2)$.

Ao multiplicar a equação (15) por h^2 e rearranjar os termos, encontra-se,

$$h^2 r(x_i) = \left(1 - \frac{h}{2} p(x_i) \right) w_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i)) w_i + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_i) \right) w_{i+1}, \quad (17)$$

e ao fazer i variar de 1 até N em (17), obtém-se o sistema de equações,

$$Aw = b \quad (18)$$

em que, $A_{N \times N}$ é uma matriz tridiagonal, $w_{N \times 1}$ e $b_{N \times 1}$ são matrizes coluna.

Para obter a solução numérica do PVC (8), foi desenvolvido um código em MATLAB, baseado no MDF aplicando a Decomposição em LU, para resolver o sistema dado em (18), na qual foi criado uma interface amigável ao usuário final. A Figura 5, apresenta a primeira janela, onde o usuário digita os valores de $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ e N .

Figura 5 - Janela para inserir os dados da EDO.

Na Figura 6, insere as condições de contorno, ou seja, os valores de a , b , $y(a)$ e $y(b)$.

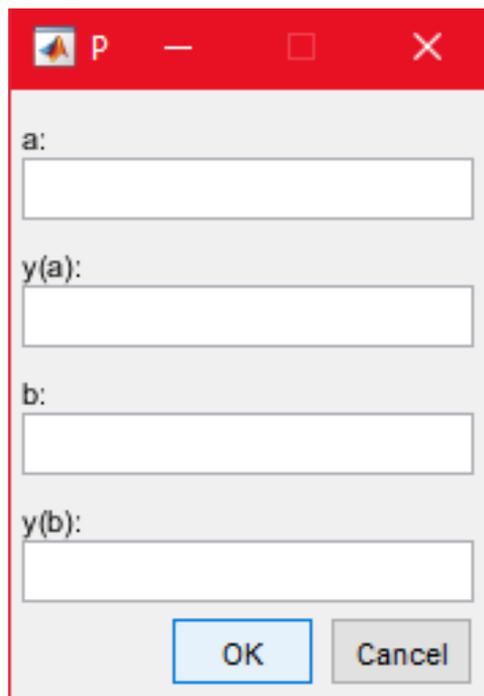


Figura 6 - Janela para inserir as condições de contorno.

Por fim o usuário digita, caso seja conhecida a solução analítica, Figura 7.

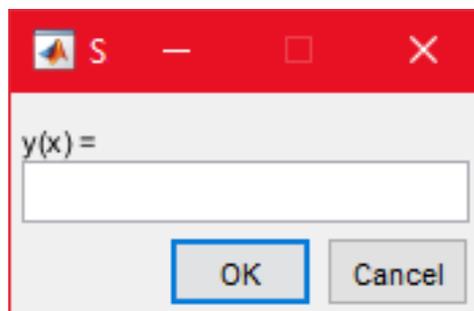


Figura 7 - Janela para inserir a solução analítica.

Ao clicar em “OK”, resolve-se numericamente o PVC, fornecendo como resultado uma tabela de dados e um gráfico.

5 | SOLUÇÃO ANALÍTICA

Para obter a solução analítica de (8), aplica-se, inicialmente a integral de ambos os membros em (8) e obtém-se,

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{q}{2E_{cs}I_z} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) + c_1. \quad (19)$$

Ao aplicar novamente a integral de ambos os membros de (19), encontra-se,

$$u(x) = \frac{q}{2E_{cs}I_z} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + c_1x + c_2, \quad (20)$$

em que, c_1 e c_2 são as constantes de integração.

Para encontrar os valores de c_1 e c_2 basta utilizar as condições de contorno dadas em (8). Ao utilizar $u(0)=0$, encontra-se $c_2=0$ e (20) pode ser escrita,

$$u(x) = \frac{q}{2E_{cs}I_z} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + c_1x. \quad (21)$$

Ao aplicar a condição de contorno, $u(l)=0$, em (21), obtém-se,

$$c_1 = -\frac{ql^3}{24E_{cs}I_z}. \quad (22)$$

Após substituir (22) em (21), encontra-se,

$$u(x) = \frac{q}{2E_{cs}I_z} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) - \frac{qx^4}{24E_{cs}I_z} \quad (23)$$

que representa a solução analítica de (8).

6 | RESULTADOS

Para o estudo de caso, PVC (8), tem-se $p(x) = 0, q(x) = 0, r(x) = (qlx - qx^2) / (2E_{cs}I_z)$, $N = 1001, \alpha = 0, b = 5000, y(\alpha) = 0, y(b) = 0$ e $y(x)$ dada por, (23). Ao inserir esses valores no código, obtém-se a solução numérica do PVC.

A Tabela 1 ilustra alguns valores para os deslocamentos ao longo do vão da viga pré-fabricada em questão, indicando os resultados obtidos para a solução numérica e analítica.

x_n (mm)	w_n (mm)	y_n (mm)	Erro percentual (%)
0	0	0	0
503,9920	-0,54855523	-0,54855473	0,0000913
1002,9940	-1,03255795	-1,03255706	0,0000858
1501,9960	-1,41130420	-1,41130304	0,0000823
2000,9980	-1,65176397	-1,65176264	0,0000803
2500	-1,73411922	-1,73411784	0,0000796
3003,9920	-1,65011991	-1,65011859	0,0000803
3502,9940	-1,40815717	-1,40815601	0,0000823
4001,9960	-1,02817283	-1,02817195	0,0000858
4500,9980	-0,54332905	-0,54332856	0,0000913

5000	0	0	0
------	---	---	---

Tabela 1 - Comparação dos resultados numéricos e analíticos

O gráfico, Figura 8, demonstra a deflexão que ocorre na viga.

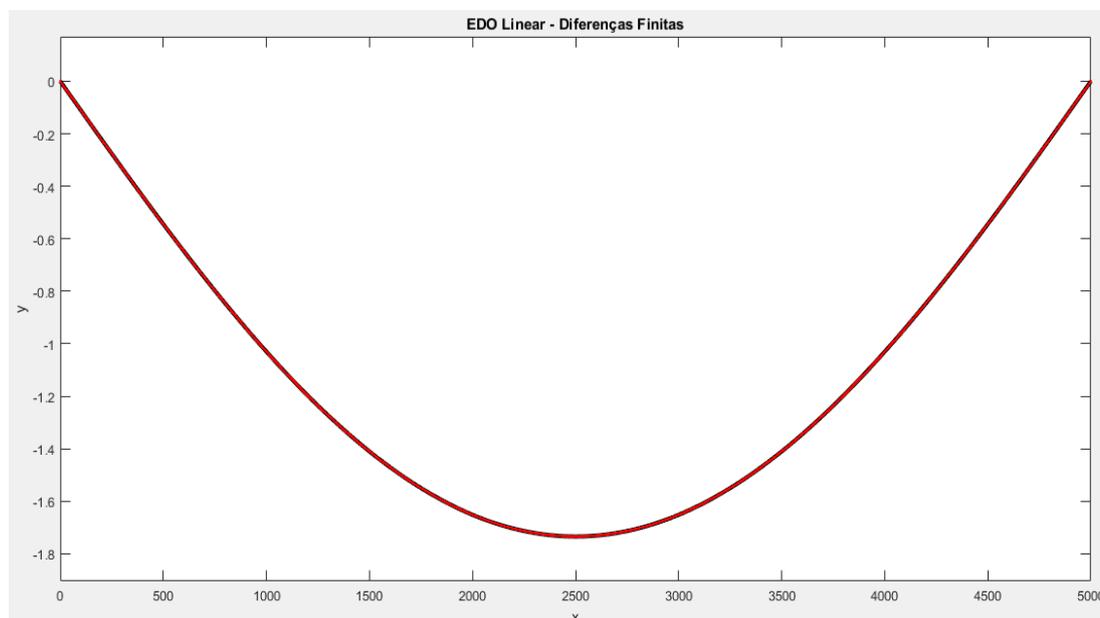


Figura 8 - Gráfico das soluções numérica e analítica representando a deflexão da viga.

Pelo fato de a viga ser biapoiada, a mesma não sofre deslocamento nos apoios e a flecha, ou seja, a deflexão máxima, ocorre no meio do vão.

7 | CONCLUSÃO

Deduzir a equação da Linha Elástica de uma viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído foi de suma importância para entendimento dos termos que a compõem.

A partir daí, implementou um algoritmo no MATLAB baseado no Método das Diferenças Finitas, onde foi possível obter a solução numérica da equação, ou seja, obteve-se a deformação máxima da viga e verificou a simetria que existe nos deslocamentos ao longo da viga com relação ao seu centro.

A solução analítica foi calculada para validação do método numérico, e é notório que os resultados obtidos pelas soluções numérica e analítica foram muito próximos, mostrando a eficiência do método.

8 | AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Campo Mourão (UTFPR-CM) pelo Projeto LaTeX para instituições de ensino superior,

que proporcionou a possibilidade desse estudo. A primeira autora, agradece ao Professor Orientador Dr. Adilandri Mércio Lobeiro e ao Coorientador Dr. Jeferson Rafael Bueno, pela orientação nesse estudo.

REFERÊNCIAS

- [1] Associação Brasileira de normas técnicas. NBR 6118: **Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- [2] Associação Brasileira de normas técnicas. NBR 9062: **Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado**. Rio de Janeiro, 2001.
- [3] F. P. Beer e E. R. Johnston Jr. **Resistência dos Materiais**, 3 ed. MAKRON Books, São Paulo, 1996.
- [4] M. K. El Debs. **Concreto pré-moldado: Fundamentos e Aplicações**. Oficina de Textos, 2017.
- [5] R. L. Burden e J. D. Faires. **Análise Numérica**. Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2003.
- [6] R. C. Hibbeler. **Resistência dos Materiais**, 3 ed. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2000.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-348-4

