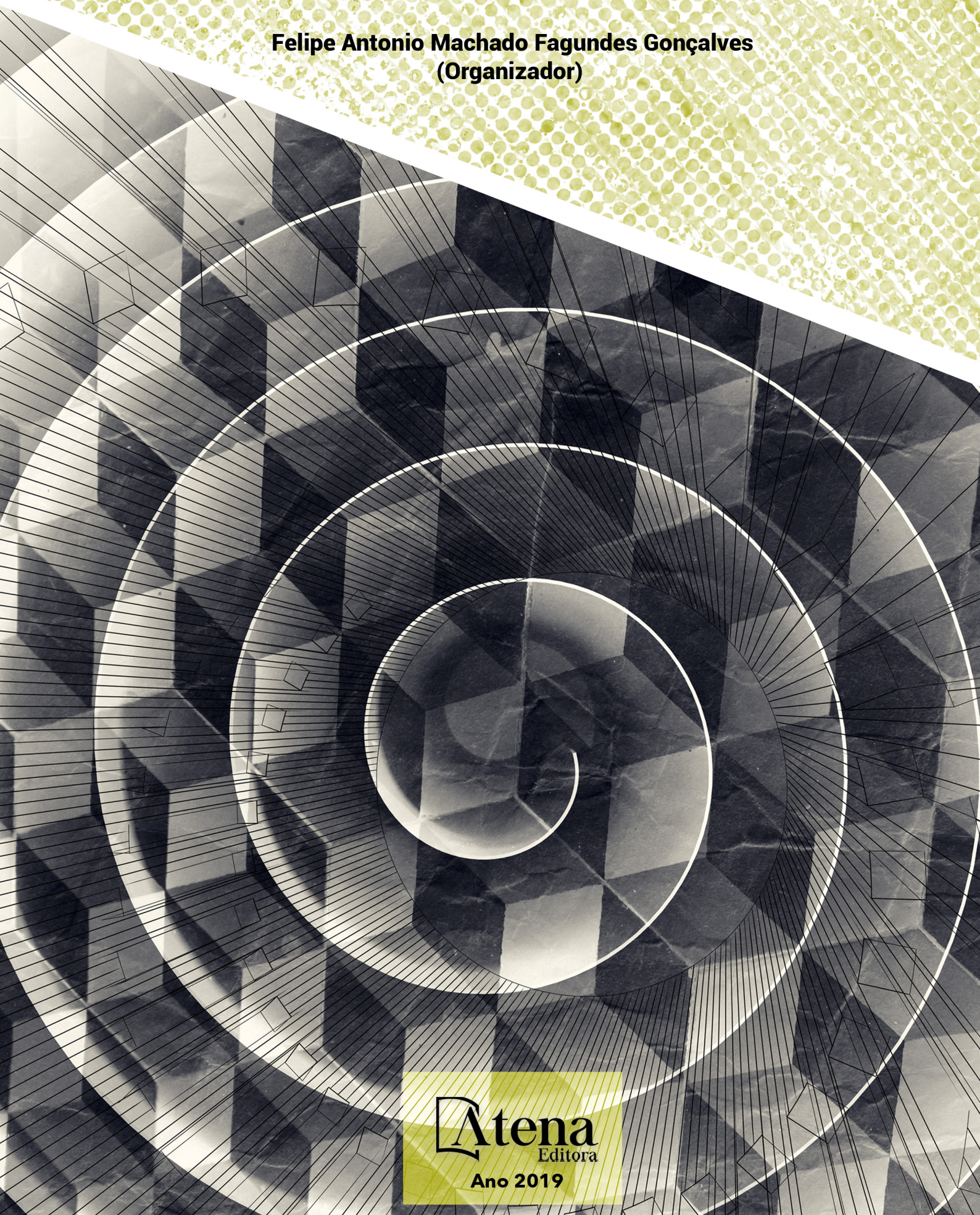
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)



Atena Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora
2019

2019 *by Atena Editora*

Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Atena Editora
Ano 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E24 Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-348-4
DOI 10.22533/at.ed.484192405

1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2.Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêem contribuir de maneira muito significante para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõe estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 3

ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL

Arquimedes José De Araújo Paschoal
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco - Campus Caruaru – Departamento de Engenharia Mecânica
Caruaru – PE

Ricardo Menezes Campello De Souza
Universidade Federal de Pernambuco – Departamento de Eletrônica e Sistemas
Recife – PE

RESUMO: Este artigo propõe algoritmos rápidos para computar a Transformada Numérica de Pascal (TNP) de comprimentos e . As simetrias da matriz da TNP, bem como sua fatoração como um produto de Kronecker, foram usadas para se obter uma redução da complexidade multiplicativa para se implementar a transformada. Os algoritmos propostos resultaram em uma redução da complexidade entre 84% e 99,9%. Considerando o critério de complexidade multiplicativa, os melhores resultados são obtidos quando o comprimento da TNP é uma potência de um primo.
PALAVRAS –CHAVE: Transformada Numérica de Pascal, Triângulo de Pascal Modular, Algoritmos Rápidos, Produto de Kronecker.

ABSTRACT: This paper proposes fast algorithms for computing the Pascal Number Theoretic Transform (PNTT) of blocklengths and . The symmetries of the PNTT as well as its factorization as a Kronecker product were explored to reduce the multiplicative complexity for implementing the transform. The proposed algorithms resulted in a complexity reduction from 84% to 99.9%. Taking into account the multiplicative complexity criterion, the best results are obtained when the blocklength of the PNTT is a prime power.
KEYWORDS: Pascal Number-Theoretic Transform, Modular Pascal Triangle, Fast Algorithms, Kronecker Product.

1 I INTRODUÇÃO

Transformada discretas desempenham um papel relevante em Engenharia e suas aplicações devem-se principalmente à existência de algoritmos rápidos para sua computação. Neste cenário, transformadas definidas sobre corpos finitos são atraentes porque não apresentam o chamado erro de arredondamento ou truncagem, uma vez que empregam aritmética módulo p. Este trabalho aborda as chamadas transformadas numéricas, isto é, transformadas definidas sobre o corpo finito GF(p). Algumas áreas da Engenharia Eletrônica, tais como Processamento Digital de Sinais, Códigos Corretores de Erros e Criptografia, entre outras, têm sido beneficiadas

com o uso de tais transformadas [3, 4]. Uma questão importante para a implementação de uma dada transformada é a complexidade multiplicativa necessária para sua computação. Muitos algoritmos têm sido desenvolvidos visando reduzir esta complexidade. Estes algoritmos, implementados em Processadores Digitais de Sinais (DSP), em FPGA ou em circuitos integrados de aplicação específica (ASIC), permitem o desenvolvimento de equipamentos capazes de processar informações em tempo real.

Recentemente, uma nova transformada definida sobre corpos finitos, a Transformada Numérica de Pascal (TNP), foi introduzida [5]. A TNP se baseia no triângulo de Pascal modular e apresenta propriedades, decorrentes de sua estrutura autossimilar, que podem ser usadas na concepção de algoritmos rápidos. Neste trabalho são propostos algoritmos rápidos para computar a TNP. Na Seção 2, a definição da TNP é apresentada. Nas Seções 3, 4 e 5 são desenvolvidos algoritmos rápidos para a computação da TNP de comprimentos $N = p$, $N = k_p$ e $N = p^r$, respectivamente. Na Seção 6 são apresentadas as conclusões do trabalho.

2 I PRELIMINARES

Existem, pelo menos, 12 definições para a matriz de Pascal, todas baseadas no triângulo de Pascal [2]. Neste artigo, foi adotada a definição a seguir, que emprega aritmética sobre o corpo finito GF(p).

Definição 2.1. A Transformada Numérica de Pascal (TNP) da sequência $v = (v_0, ..., v_{N-1})$, $v_i \in GF(p)$, é a sequência $V= V0, V1, ..., V_{N-1})$, $V_k \in GF(P)$, em que

$$V_k := \sum_{i=0}^{N-1} C_{i+k}^{i} v_i \ (mod\ p) \qquad (1)$$

A complexidade multiplicativa direta do cálculo da TNP de comprimento N, por meio da Definição 2.1, é $M(N) = N^2$. Pode-se mostrar [5] que, para $N = p$, a matriz da TNP é uma matriz triangular superior. Neste caso, a complexidade multiplicativa direta, incluindo-se as multiplicações triviais (multiplicações por ± 1), é

$$M(N) = \frac{p}{2}(p+1). \qquad (2)$$

É possível reduzir esta complexidade multiplicativa observando certas simetrias decorrentes da estrutura do triângulo de Pascal. Assim, inicialmente considera-se um

exemplo em que tais simetrias podem ser observadas e exploradas.

Exemplo 2.1. Considere a TNP de comprimento N = 7 da sequência v = $(v_0, \cdots, v_6)^T$, $v_i \in GF(7)$, $V = (V_0, V_1, \cdots, V_6)^T$, $V_k \in GF(7)$ em que

$$V_k := \sum_{i=0}^{6} C_{i+k}^{i} v_i \ (mod\ 7).$$

Em formato matricial, tem-se V= P_7v , ou seja,

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

Note que:

I. Os coeficientes não nulos da segunda linha da matriz P são congruentes, módulo 7, aos inteiros 1, 2, 3, -3, -2 e -1, respectivamente. Assim, V1 pode ser escrita como $V_1 = (v_0 - v_5) + 2(v_1 - v_4) + 3(v_2 - v_3)$, reduzindo-se de seis para três o número de multiplicações para sua computação. O mesmo raciocínio pode ser aplicado às outras linhas pares.

II. Os coeficientes não nulos das linhas ímpares são simétricos. Explorando-se esta simetria, V_2, por exemplo, pode ser computada como $V_2 = (v_0 + v_4) + 3(v_1 + v_3) + 6v_2$, reduzindo-se o número de multiplicações de cinco para três. O mesmo raciocínio pode ser empregado às outras linhas ímpares.

3 I A TNP DE COMPRIMENTO PRIMO

As simetrias do triângulo de Pascal modular [1], observadas no Exemplo 2.1, levam ao resultado mostrado a seguir.

Proposição 3.1. A TNP de comprimento N=p, em que p é um número primo ímpar, pode ser computada por meio de um algoritmo de complexidade multiplicativa dada por

$$M(N) = M(p) = \left(\frac{p^2 - 4p + 3}{4}\right). \quad (3)$$

Prova. Se $M(p) = M_{par}(p) + M_{impar}(p)$ denotam, respectivamente, as complexidades multiplicativas associadas às linhas pares e às linhas ímpares no cálculo da TNP de comprimento , então pode-se escrever $M_{par}(p)$ e $M_{impar}(p)$, em que

$$M_{par}(p) = 1 + 2 + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right) = \left(\frac{p^2-1}{8}\right),$$
$$M_{impar}(p) = 1 + 2 + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right) + p = \left(\frac{p^2-1}{8}\right) + p.$$

Uma vez que a primeira linha somente requer multiplicações triviais, e cada uma das (p-1) linhas subsequentes possui pelo menos uma multiplicação trivial, resulta

$$M(p) = M_{par}(p) + M_{impar}(p) - p - (p-1) = \left(\frac{p^2-4p+3}{4}\right).$$

O valor para M(p) indicado na Eq.(3) é uma cota superior para a complexidade multiplicativa, uma vez que existe a possibilidade de se ter outras multiplicações triviais na matriz da TNP. Para se obter uma expressão que não inclua multiplicações triviais, é necessário contabilizar quantos termos são congruentes a ± 1 módulo p na matriz P_N. Assim, por exemplo, para o caso N = 11 tem-se, pela Eq.(3),M (11) = 20 Todavia, uma análise da matriz P_{11} revela que o número de multiplicações não triviais é 17. Na Tabela 3.1 são apresentadas as complexidades multiplicativas para o cálculo da TNP, cujo comprimento N é um número primo ímpar, considerando-se os métodos: i) Método direto (Eq.(2)); ii) Método rápido baseado na Proposição 3.1 (Eq.(3)).

	Comprimento						
Método	7	11	13	17	19	23	29
Eq.(2)	28	66	91	153	190	276	435
Eq.(3)	6	20	30	56	72	110	182

Tabela 3.1: Comparativo da complexidade multiplicativa da TNP de comprimento , sobre , de acordo com as Equações (2) e (3).

4 I A TNP DE COMPRIMENTO N = kp

Quando a matriz da TNP possui uma ordem do tipo N = kp,k >1 então é possível decompor esta matriz como o produto de Kronecker $P_N = P_k \otimes P_p$ [6].

Exemplo 4.1. Considere a matriz da TNP sobre GF(5) de comprimento N= 15

$$P_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que P_{15} pode ser escrita como

$$P_{15} = \begin{bmatrix} P_5 & P_5 & P_5 \\ P_5 & 2P_5 & 3P_5 \\ P_5 & 3P_5 & P_5 \end{bmatrix}$$

e a complexidade multiplicativa para a TNP de comprimento N = 15, sobre GF(5), pode ser expressa em função da complexidade da TNP para N+5. Assim,

$$V = \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_5 & P_5 & P_5 \\ P_5 & 2P_5 & 3P_5 \\ P_5 & 3P_5 & P_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix},$$

em que $\hat{V}_0 = (V_0, V_1, \cdots, V_4), \hat{V}_1 = (V_5, V_6, \cdots, V_9), \hat{V}_2 = (V_{10}, V_{11}, \cdots, V_{14}), \hat{v}_0 = (v_0, v_1, \cdots, v_4), \hat{v}_1 = (v_5, v_6, \cdots, v_9), \hat{v}_2 = (v_{10}, v_{11}, \cdots, v_{14}).$

No cálculo de $\hat{V}_0$ as parcelas $(P_5\hat{v}_0, P_5\hat{v}_1 e P_5\hat{v}_2)$ foram computadas e armazenadas, de modo que, na computação das componentes , não é necessário efetuar nenhuma outra multiplicação por , mas apenas multiplicações para cada termo binomial.

Teorema 4.1. A TNP de comprimento , em que é um número primo ímpar, pode ser computada por meio de um algoritmo de complexidade multiplicativa dada por

$$M(N) = M(kp) = \left(\frac{p^2 - 4p + 3}{4}\right) + p(k-1)^2. \quad (4)$$

Prova. Note que quando p = 2 ou p=3 só existem multiplicações triviais. A prova

deste Teorema pode ser feita considerando-se , ou seja,

$$V = \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \vdots \\ \hat{V}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_p & P_p & \cdots & P_p \\ P_p & C_2^1 P_p & \cdots & C_k^1 P_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_p & C_k^{k-1} P_p & \cdots & C_{2k-2}^{k-1} P_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_{k-1} \end{bmatrix},$$

Note que o vetor coluna v possui k componentes, em que cada uma possui dimensão p. Armazenando-se todos os produtos resultantes da multiplicação da primeira linha da matriz P_N pelo vetor v, evitam-se multiplicações adicionais no cálculo das outras componentes de V. Cada produto requer M(p) multiplicações, conforme Eq.(3). Note a existência de uma submatriz (k -1) X (k-1) em que as únicas multiplicações necessárias são pelos termos binomiais e envolve p multiplicações cada. O resultado segue.

Na Tabela 4.1 é apresentada a complexidade multiplicativa M(N), dada pela Eq.(4), para o cálculo da TNP de comprimento N= kp. Para efeito de comparação é mostrada a complexidade multiplicativa direta, bem como a redução nesta complexidade proporcionada pelo algoritmo rápido.

N	10	15	20	30	35
M(N)	9	26	53	137	194
N^2	100	225	400	900	1225
Redução (%)	91	88,44	86,75	84,77	84,16

Tabela 4.1: Complexidade multiplicativa da TNP de comprimento N = 5k,k >1.

5 I A TNP DE COMPRIMENTO N = p^r

Quando o comprimento da transformada é do tipo N = p^r, então é possível usar o fato de que a matriz da TNP pode ser decomposta como $P_N = P_p \otimes P_{p^{r-1}}$

Teorema 5.1. A TNP de comprimento N = p^r, em que é um número primo ímpar, pode ser computada por meio de um algoritmo de complexidade multiplicativa dada por

$$M(p^r) = p^{r-1}M(p) + (r-1)p^{r-1}\left(\frac{p^2 - 3p + 2}{2}\right), \quad (5)$$

em que M(p) é dado pela Eq.(3).

Prova. A prova é feita por indução em r.

Passo Base: Fazendo-se r = 1, na Eq.(5), resulta em M(p) = M(p)

Passo da Indução: Considera-se a Eq.(5) verdadeira e faz-se N= p^{r+1}.

Expressando P_{pr+1} na forma $P_{pr+1}= P_p \otimes P_{p^r}$, tem-se

$$V = \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \vdots \\ \hat{V}_{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{p^r} & P_{p^r} & \cdots & P_{p^r} & P_{p^r} \\ P_{p^r} & 2P_{p^r} & \cdots & (P-1)P_{p^r} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{p^r} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_{p-1} \end{bmatrix},$$

em que os vetores $\hat{V}_k$ e $\hat{v}_i$ possuem p^r componentes, i, k = 0,1 ..., p-1. Observe que

$$\hat{V}_0 = P_{p^r}\hat{v}_0 + P_{p^r}\hat{v}_1 + \cdots + P_{p^r}\hat{v}_{p-1},$$

em que cada uma das p parcelas contribui com $M(p^r)$ multiplicações, resultando em uma quantidade de multiplicações igual a $pM(p^r)$. As linhas restantes só contêm multiplicações por coeficientes binomiais. Devido à estrutura triangular superior da matriz P_{pr+1}, a quantidade de coeficientes binomiais é dada por

$$1 + 2 + \cdots + (p-2) = \left(\frac{p^2 - 3p + 2}{2}\right),$$

com p^r multiplicações para cada componente. Assim, resulta

$$\begin{aligned} M(p^{r+1}) &= pM(p^r) + p^r\left(\frac{p^2 - 3p + 2}{2}\right) \\ &= p^r M(p) + (r-1)p^r\left(\frac{p^2 - 3p + 2}{2}\right) + p^r\left(\frac{p^2 - 3p + 2}{2}\right) \\ &= p^r M(p) + rp^r\left(\frac{p^2 - 3p + 2}{2}\right). \end{aligned}$$

e o resultado segue.

Na Tabela 5.1 é apresentada a complexidade multiplicativa M(N), dada pela Eq.(5), para o cálculo da TNP de comprimento $N = P^R$, em que p é um primo maior do que 3. Para efeito de comparação é mostrada a complexidade multiplicativa direta, bem como a redução nesta complexidade proporcionada pelo algoritmo rápido.

N	25	125	625	3.125	15.625
M(N)	40	350	2.500	16.250	100.000
$5^r\left(\frac{5^r+1}{2}\right)$	325	7.875	195.625	4.884.375	122.078.125
Redução (%)	87,69	95,55	98,72	99,66	99,92

Tabela 5.1: Complexidade multiplicativa da TNP de comprimento $N = 5^r$, $r > 1$

6 I CONCLUSÕES

Neste trabalho são apresentados algoritmos rápidos para computar a Transformada Numérica de Pascal. O fato da TNP usar uma matriz de Pascal modular, trazendo consigo todo um conjunto de propriedades e de simetrias, produz um cenário promissor para a construção de algoritmos rápidos para sua computação. Tendo em vista que a matriz da TNP é triangular superior, quando sua ordem N é uma potência de um número primo p, foram propostos algoritmos rápidos para a computação de transformadas de comprimentos $N = kp$ e $N = p^r$. Os algoritmos propostos resultaram em uma redução de complexidade multiplicativa entre 84% e 99,9%. Em relação a esta complexidade, os melhores resultados são obtidos quando o comprimento da TNP é uma potência de um primo.

REFERÊNCIAS

[1] Bacher, R.; Chapman, R. Symmetric Pascal matrices modulo , **European Journal of Combinatorics**, 25: 459-473, 2004. DOI: 10.1016/j.ejc.2003.06.001.

[2] Birregah, B.; Dobb, P. K.; Adjallah, K. H. A systematic approach to matrix forms of the Pascal triangle: The twelve triangular matriz forms and relations, **European Journal of Combinatorics**, 31:1205-1216, 2010. DOI: 10.1016/j.ejc.2009.10.009.

[3] Lima, J. B.; Novaes, L. F. G. Image encryption based on the fractional Fourier transform over finite fields, **European Journal of Combinatorics**, 94:521-530,2014. DOI: 10.1016/j.sigpro.2013.07.020.

[4] Lima, P. H. E. S.; Lima, J. B.; Campello de Souza, R. M. Fractional Fourier, Hartley, cosine and sine number-theoretic transforms based on matrix functions, **Circuits, Systems and Signal Processing**, 36:2893-2916, 2017. DOI: 10.1007/s00034-016-0447-8.

[5] Paschoal, A. J. A., Campello de Souza, R. M.; De Oliveira, H. M. A transformada numérica de Pascal, In: **XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações** – *SBrT 2015,* p. 59-62, setembro 2015.

[6] Paschoal, A. J. A.; Campello de Souza, R. M. Algoritmos rápidos para a transformada numérica de Pascal, In: **XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional** – *CNMAC 2017.* Vol 6, n.1, p. 010310-1: 010310-7, DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0310.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-348-4