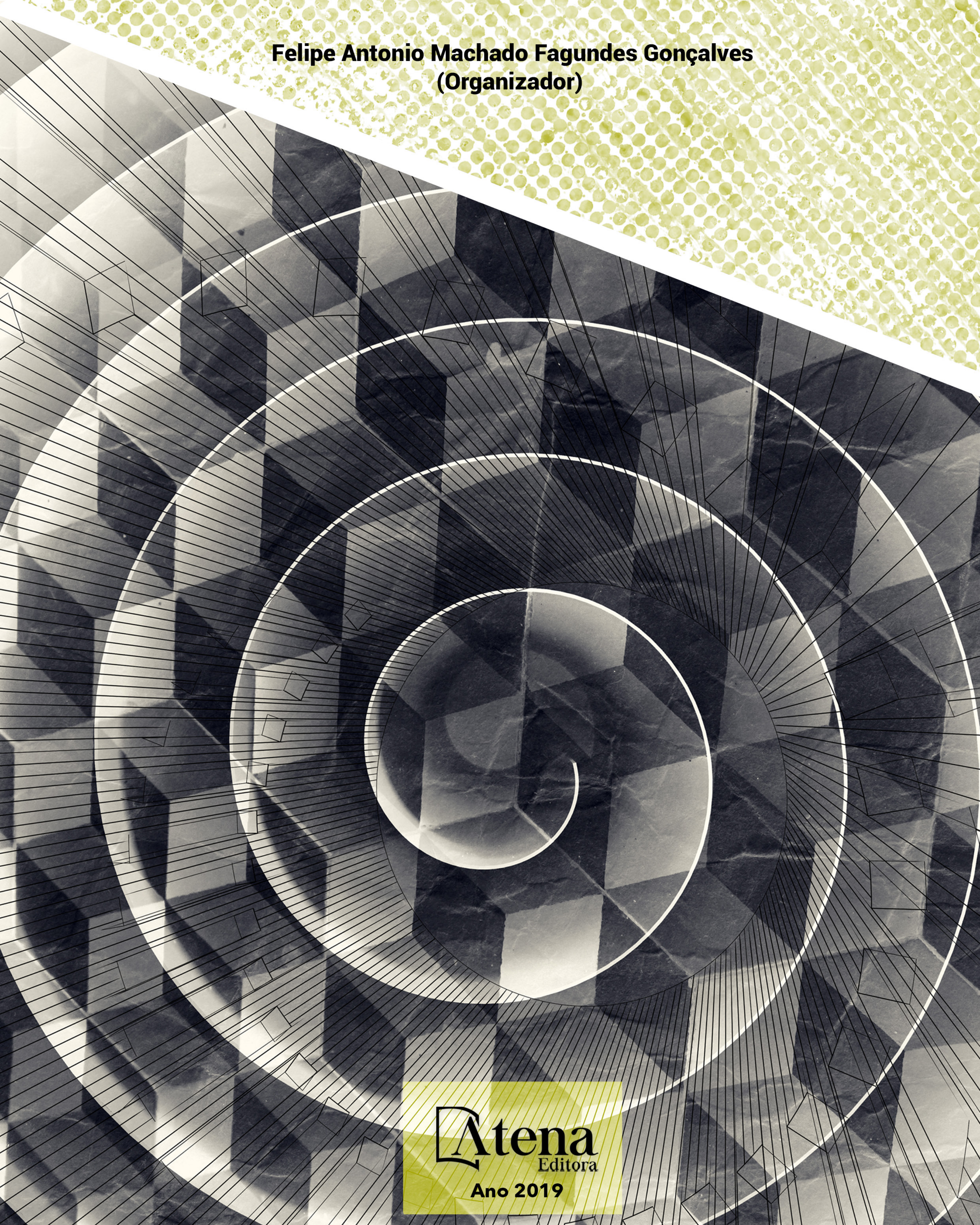
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)



Atena Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora
2019

2019 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Profª Drª Juliane Sant'Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar
Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.ª Dr.ª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias
Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico
Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof.ª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof.ª Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.ª Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E24 Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-348-4
DOI 10.22533/at.ed.484192405

1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2.Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2019

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêem contribuir de maneira muito significante para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõe estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 2

NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL

Arquimedes José De Araújo Paschoal
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco - Campus Caruaru – Departamento de Engenharia Mecânica
Caruaru – PE

Ricardo Menezes Campello De Souza
Universidade Federal de Pernambuco – Departamento de Eletrônica e Sistemas
Recife – PE

Hélio Magalhães De Oliveira
Universidade Federal de Pernambuco – Departamento de Estatística
Recife - PE

RESUMO: Neste artigo, a matriz de transformação da Transformada Numérica de Pascal (TNP) é investigada e novas relações baseadas na decomposição desta matriz, por meio do produto de Kronecker de duas matrizes de Pascal, são propostas com aplicações na implementação da TNP.

PALAVRAS –CHAVE: Transformada Numérica de Pascal, Triângulo de Pascal Modular, Corpos Finitos, Produto de Kronecker.

ABSTRACT: In this paper, the Pascal Number Theoretic Transform (PNTT) matrix is investigated and new relationships based on the decomposition of this matrix, by means of the Kronecker Product of two Pascal matrices, are proposed with applications on the PNTT implementation.

KEYWORDS: Pascal Number-Theoretic Transform, Modular Pascal Triangle, Finite Fields, Kronecker Product.

1 I PRELIMINARES

Uma das principais razões de se pesquisar transformadas numéricas é o fato das mesmas não apresentarem o chamado erro de arredondamento ou truncagem, uma vez que toda a aritmética se efetua em um corpo finito. Tais transformadas tem sido aplicadas em algumas áreas da Engenharia Eletrônica, tais como Processamento Digital de Sinais, Códigos Corretores de Erros e Criptografia, entre outras [4, 5]. Recentemente foi introduzida a Transformada Numérica de Pascal (TNP) [8]. Definida sobre o corpo finito com um número primo de elementos, *GF(p)* (do inglês, *Galois Field*), e baseada no triângulo de Pascal modular, esta transformada apresenta o interessante aspecto de que seu comprimento e a característica do corpo são independentes, o que não acontece nas demais transformadas numéricas conhecidas na literatura [2, 3, 4, 5]. Neste cenário, uma questão relevante, de um modo geral, é a complexidade aritmética (entendida aqui como o número de multiplicações e adições) necessária ao cálculo da transformada. Muitos algoritmos eficientes têm sido desenvolvidos visando reduzir esta complexidade aritmética [2]. A utilização do triângulo de Pascal [1] na definição da TNP permite que sejam exploradas relações bem conhecidas, o que leva a implementações eficientes da mesma [9].

Definição 1.1. A Transformada Numérica de Pascal (TNP) da sequência v = (v_0,...,v_{N-1}), V_l є GF (p) é a sequência V = V_0, V_1, ..., V_{N-1}), V_k є GF (p) em que

$$V_k := \sum_{i=0}^{N-1} C_{i+k}^{i} v_i \ (mod\ p). \tag{1}$$

Em formato matricial, tem-se V = P_nv, em que os elementos de P_N são $[P_N]_{i,k}$:= $C_{i+k}^{i},\ i,k = 0,1,\cdots,N-1.$

Teorema 1.1. (Transformada Inversa) A TNP inversa da sequênciaV = (V_0, V_1, ..., V_{N-1}) é a sequência v = (v_0, ..., v_{N-1}) em que

$$v_i = \sum_{i=0}^{N-1} \left[(-1)^{i+k} \sum_{j=Max(i,k)}^{N-1} C_j^i C_j^k \right] V_k. \tag{2}$$

Algumas propriedades da TNP de comprimento , sobre , podem ser verificadas [8]:

I. A TNP de um impulso v = (1,0, ... , 0) é uma constante.
II. A TNP de uma constante é um impulso deslocado.
III. Uma dada componente V_k depende apenas das componentes v_i 0 ≤ i ≤ p - 1 - k
IV. A inversa da matriz P_p é triangular inferior em relação à diagonal secundária. Seus elementos são os mesmos de P_p porém aparecem refletidos em relação a esta diagonal.
V. A soma dos elementos das linhas de P_p, com exceção da última linha, é congruente a zero módulo p
VI. As complexidades multiplicativa e aditiva para se computar a TNP são, respectivamente,

$$M(N) = \frac{p(p+1)}{2}, \qquad A(N) = \frac{p(p-1)}{2}. \tag{3}$$

2 I DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ DE PASCAL MODULAR

A matriz de Pascal sobre GF (p) pode ser decomposta como o produto de Kronecker de duas matrizes de Pascal, quando a ordem desta matriz puder ser fatorada como o produto N = Lp Esta importante propriedade, demonstrada no Teorema a seguir, tem relação com a autoestrutura da TNP.

Teorema 2.1. A matriz de Pascal P_N, em que N = Lp, sobre o corpo finito GF (p), pode ser obtida a partir do produto de Kronecker $P_N = P_L \otimes P_p$ em que P_L e P_p são matrizes de Pascal de ordem L e p, respectivamente.

Prova. Pela definição do produto de Kronecker, tem-se que os elementos da matriz $A \otimes B$, em que A é uma matriz m x n e B é uma matriz p x q, são obtidas multiplicando-se cada elemento da matriz A pela matriz B, obtendo-se uma matriz mp x nq. Como as matrizes de Pascal são quadradas, tem-se que m = n = L e p = q. Então, a matriz resultante do produto de Kronecker possui ordem Lp Considere o produto de Kronecker $P_N = P_L \otimes P_p$, em que

$$P_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_L^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_L^{L-1} & \cdots & C_{2L-2}^{L-1} \end{bmatrix} \text{ e } P_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_p^{p-1} & \cdots & C_{2p-2}^{p-1} \end{bmatrix}.$$

Tem-se,

$$P_N = P_L \otimes P_p = \begin{bmatrix} P_p & P_p & \cdots & P_p \\ P_p & C_2^1 P_p & \cdots & C_L^1 C_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_p & C_L^{L-1} P_p & \cdots & C_{2L-2}^{L-1} P_p \end{bmatrix}.$$

Sejam r e s os índices que identificam os blocos formados pelas cópias da matriz P_p multiplicada pelos termos binomiais de P_L Então, r,s = 0,1, ...L -1 e $[P_L]$ r,s = C^r_{r+s}. A matriz $P_N = P_L \otimes P_p$ é formada pelos elementos obtidos pela multiplicação $C_{r+s}^{r} C_{\hat{\imath}+\hat{\jmath}}^{\hat{\jmath}}$, em que $\hat{\imath}, \hat{\jmath} = 0, 1, \cdots, p-1$ Note que os índices das linhas (i) e das colunas (j) da matriz P_N são dados por

$$i = \hat{\imath} + rp, \quad j = \hat{\jmath} = sp,$$

em que $r = \left\lfloor \frac{i}{p} \right\rfloor^{1}$ e $s = \left\lfloor \frac{j}{p} \right\rfloor$ e . Assim,

$$\left(P_L \otimes P_p\right)_{i,j} = C_{r+s}^{r} C_{i+j}^{j} \,(mod\ p) = \frac{(r+s)!}{r!\,s!} \cdot \frac{[(i+j)-(r+s)p]!}{(i-rp)!\,(j-sp)!}$$

Deseja-se provar que

$$\left(P_L \otimes P_p\right)_{i,j} = C_{r+s}^{r} C_{i+j}^{j} \,(mod\ p) = \frac{(r+s)!}{r!\,s!} \cdot \frac{[(i+j)-(r+s)p]!}{(i-rp)!\,(j-sp)!} = C_{i+j}^{i} (mod\ p). \tag{4}$$

Fixando-se os valores de r e s, a prova é feita por indução em i. Por simetria, a prova por indução em j é semelhante.

I. Passo base: i = 0 → r = 0 Então

$$\frac{(0+s)!}{0!\,s!} \cdot \frac{[(0+j)-(0+s)p]!}{(0-0p)!\,(j-sp)!} = 1 = C_{0+j}^{0}.$$

II. Passo da Indução:

$$\left(P_L \otimes P_p\right)_{i+1,j} = \frac{[(i+1+j)-(r+s)p]}{(i+1-rp)} \cdot \frac{(r+s)!}{r!\,s!} \cdot \frac{[(i+j)-(r+s)p]!}{(i-rp)!\,(j-sp)!}. \tag{6}$$

Supondo que a Equação (4) é verdadeira, então

$$\left(P_L \otimes P_p\right)_{i+1,j} = \frac{[(i+1+j)-(r+s)p]}{(i+1-rp)} \cdot C_{i+j}^{i} \equiv C_{i+j+1}^{i+1} \,(mod\ p). \tag{7}$$

Este teorema tem consequências que derivam das propriedades do produto de Kronecker, a saber, se A e B são duas matrizes quaisquer, então

1. Associatividade: $A \otimes B \otimes C = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.
2. Se A e B são matrizes triangulares então $A \otimes B$ é uma matriz triangular.
3. Se A e B são matrizes simétricas então $A \otimes B$ é uma matriz simétrica.
4. Se $\lambda_i \mu_j$ são os autovalores de A e μ_j são os autovalores de B , então $\lambda_i \mu_j$ são os autovalores de $A \otimes B$. Esta propriedade auxilia na determinação da autoestrutura da TNP.

Exemplo 2.1. A matriz da TNP de comprimento N = 5 possui 1 autovalor no corpo base GF (5) e 4 autovalores no corpo de extensão GF (5^2) Então, é possível determinar de que forma os autovalores da TNP de comprimento N = 25 estão distribuídos em relação a GF (5) e a GF (5^2). O produto de autovalores no corpo base produz autovalores no corpo base e o produto de um autovalor no corpo base por um autovalor no corpo de extensão produz um autovalor no corpo de extensão. O produto de autovalores no corpo de extensão pode produzir autovalores no corpo de extensão ou no corpo base. Neste caso, o produto de autovalores pertencentes a GF (5^2) produz metade dos autovalores em GF (5^2) e metade em GF (5). Dos 25 autovalores, 9 estão em e 16 em

Observação. Apesar de existir a TNP para qualquer comprimento, a fatoração da matriz da TNP por meio de um produto de Kronecker só existe nas condições do Teorema 2.1.

A Proposição 2.1 permite identificar quais as potências de um elemento primitivo do corpo de extensão que produzem elementos no corpo base.

Proposição 2.1. Se $\beta = \alpha^{\left(\frac{p^m-1}{p-1}\right)}$, em que α é um elemento primitivo do corpo de extensão GF (p^m), então, β є GF (p) Ademais, os elementos β^k, em que k = 1,2, ..., p -1, pertencem a GF(p)

Prova. Observe que

$$\beta^{(p-1)} = \alpha^{p^m-1} = 1,$$

e, portanto, β є GF (p) . Como as potências de um elemento no corpo base estão no corpo base, e os elementos do corpo base possuem ordens que são divisores de (p -1), segue-se que β^k є GF (p), k = 1,2, ... , p-1

Proposição 2.2. Se π (x)é o polinômio gerador de GF (p^m), então, pelas Relações de Girard pode-se identificar qual o valor da primeira potência do elemento primitivo que se encontra no corpo base, a saber

$$\beta = \alpha^{\left(\frac{p^m-1}{p-1}\right)} = (-1)^m \pi(0) \tag{8}$$

Prova. Seja $\pi(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ o polinômio gerador de GF (p^m), em que α_m = 1. Então se e os seus conjugados são as raízes de π (x) pelas relações de Girard tem-se

$$\alpha\alpha^p \cdots \alpha^{p^{m-1}} = (-1)^m \pi(0),$$

$$\alpha^{1+p+p^2+\cdots+p^{m-1}} = \alpha^{\left(\frac{p^m-1}{p-1}\right)} = (-1)^m \pi(0)$$

e o resultado segue.

3 I OS AUTOVALORES DISTINTOS DA MATRIZ Pp^r

Nesta seção os autovalores distintos da matriz de transformação da TNP de ordem p^r são encontrados. As operações realizadas a seguir são feitas módulo p

Proposição 3.1. A matriz de transformação da TNP sobre GF(p), em que p é um primo ímpar, cuja ordem é $N = p^r$ satisfaz $P_N^2 = LP_NL$, , em que I_N é a matriz identidade de ordem N

Prova. A matriz de transformação da TNP cujo comprimento é $N = p^r$ satisfaz

$$P^2_N = LP_NL, \tag{9}$$

em que

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $L_2 = I_N$, então $P_N^4 = LP_NLLP_NL = LP_N^2L$. Mas

$$LP_N^2L = LLP_NLL = P_N$$

e assim

$$P_N^4 = P_N \Rightarrow P_N^3 = I_N.$$

Proposição 3.2. Os autovalores associados à matriz de transformação da TNP de ordem $N = p^r$ sobre GF (p) em que p é um primo ímpar, satisfazem $\Lambda^3 = 1$.

Prova. Se v é uma autosequência da TNP com autovalor associado Λ, então $P_N v = \Lambda v$ Da Proposição 3.1 pode-se escrever e o resultado segue.

Uma decorrência da Proposição 3.2 é que todos os autovalores da matriz de transformação da TNP de ordem p^r estão no corpo base GF(p) se, e somente se, 3 é um divisor de (p -1). O exemplo a seguir ilustra de que forma estes resultados podem ser usados para encontrar os autovalores da TNP.

Exemplo 3.1. Considere a TNP de comprimento N = 25, sobre GF(5) Note que como $3 \nmid (p-1)$, então, o único autovalor sobre GF(5) é Λ = 1 Os autovalores sobre são α^8 e α^{16} em que α é um elemento primitivo do corpo. Esses autovalores (1, α^8 E α^{16}) possuem multiplicidades 9, 8 e 8, respectivamente.

Exemplo 3.2. Sobre (GF(7) a matriz de transformação da TNP de comprimento $N= 7^2$ possui todos os seus autovalores em GF(7) Esses autovalores {1,2 e 4} possuem multiplicidades 17, 16 e 16, respectivamente.

3.1 Uma forma alternativa da matriz de transformação inversa da TNP

Novas relações na matriz de transformação da TNP foram obtidas, as quais permitem uma implementação mais simples da TNP inversa proposta em [8]. Este resultado tem aplicação no cálculo desta inversa (Eq.(2)).

Proposição 3.3. (*Transformada de Pascal Inversa para $N = p^r$*)A matriz de transformação da TNP inversa de comprimento $N = p^r$ é a matriz de elementos

$$[P_N^{-1}]_{i,j} = \sum_{k=0}^{p^r-1} C_{i+k}^{i} C_{j+k}^{j} \equiv C_{2(p^r-1)-(i+j)}^{(p^r-1)-i} \qquad (10)$$

Prova. Uma consequência imediata da Proposição 3.1 é que A partir da Definição 1.1, observa-se que os elementos da matriz P_N^2 são dados por

$$[P_N^2]_{i,j} = \sum_{k=0}^{p^r-1} C_{i+k}^{i} C_{j+k}^{j}. \qquad (11)$$

A ação da matriz L na Eq.(9) é mapear a posição (i,j) da matriz P_N^2 na posição (p^r - 1- i, p^r - 1 - j) da matriz P_N^2; assim, o resultado segue.

A proposição 3.3 permite reescrever a expressão da TNP inversa, Eq.(2), para o caso em que $N = p^r$, na forma

$$v_i = \sum_{k=0}^{N-1} C_{2(p-1)-(i+k)}^{p-1-i} V_k. \qquad (12)$$

4 I CONCLUSÕES

Neste trabalho novas relações na matriz de transformação da TNP são apresentadas, com aplicações na Transformada Numérica de Pascal (TNP). Mostra-se que, para ordens que são múltiplas da característica do corpo, é possível decompor a matriz de Pascal modular como o produto de Kronecker de matrizes de Pascal de ordens iguais aos fatores envolvidos nesta fatoração. Como consequência direta das propriedades do produto de Kronecker, segue-se que os autovalores da matriz de Pascal original podem ser encontrados a partir dos autovalores das matrizes envolvidas na fatoração. Uma nova expressão para a TNP inversa de comprimento foi apresentada. Aplicações da TNP nas áreas de sistemas de comunicação multiusuário, codificação de canal e criptografia estão sendo investigadas.

REFERÊNCIAS

[1] Birregah, B; Dobb, P. K.; Adjallah, K. H. A systematic approach to matrix forms of the Pascal triangle: The twelve triangular matrix forms and relations, **European Journal of Combinatorics**, 31:1205-1216,2010. DOI: 10.1016/j.ejc.2009.10.009.

[2] Blahut, R. E. **Fast Algorithms for Signal Processing**, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2010.

[3] Campello de Souza, R. M.; De Oliveira, H. M. Hartley number-theoretic transforms, **IEEE International Symposium on Information Theory**, ISIT, Washington DC, 2001. DOI: 10.1109/ISIT.2001.936073.

[4] Lima, J. B.; Campello de Souza, R. M. Finite Field Trigonometric Transforms. **Applicable Algebra in Engineering, communication and computing**, v. 22, p. 393-411, December 2011. DOI: 10.1007/s00200-011-0158-0.

[5] Lima, J. B.; Campello de Souza, R. M. Fractional cosine and sine transforms over finite fields. **Linear Algebra and its applications**, v. 438, n. 8, p. 3217-3230, 2013. DOI: 10.1016/j.laa.2012.12.021.

[6] Lima, J. B.; Novaes, L. F. G. Image encryption based on the fractional Fourier transform over finite fields, **European Journal of Combinatorics**, 94:521-530,2014. DOI: 10.1016/j.sigpro.2013.07.020.

[7] Lima, P. H. E. S.; Lima, J. B.; Campello de Souza, R. M. Fractional Fourier, Hartley, cosine and sine number-theoretic transforms based on matrix functions, **Circuits, Systems and Signal Processing**, 36:2893-2916, 2017. DOI: 10.1007/s00034-016-0447-8.

[8] Paschoal, A. J. A. Paschoal; Campello de Souza, R. M.; De Oliveira. H. M. A transformada numérica de Pascal, In: **XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações** – *SBrT 2015,* p. 59-62, Setembro 2015.

[9] Paschoal, A. J. A. Paschoal; Campello de Souza, R. M. Algoritmos rápidos para a transformada numérica de Pascal, In: **XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional** – *CNMAC 2017.* DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0310

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-348-4
9 788572 473484