

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

 **Atena**
Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof^a Dr^a Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof.^a Dr.^a Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Dr.^a Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.^a Dr.^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof.^a Dr.^a Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof.^a Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
E24	Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2) Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-348-4 DOI 10.22533/at.ed.484192405 1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série. CDD 510.7
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
O ALGORITMO ESPECTRAL COMO ALTERNATIVA AO ALGORITMO K-MEANS EM CONJUNTO DE DADOS ARTIFICIAIS	
Luciano Garim Garcia Leonardo Ramos Emmendorfer	
DOI 10.22533/at.ed.4841924051	
CAPÍTULO 2	16
NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza Hélio Magalhães De Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.4841924052	
CAPÍTULO 3	24
ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza	
DOI 10.22533/at.ed.4841924053	
CAPÍTULO 4	32
ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA	
Amanda Barretos Lima Garuth Brenda Anselmo Mendes Isabela Geraldo Reghin Rosângela Teixeira Guedes	
DOI 10.22533/at.ed.4841924054	
CAPÍTULO 5	46
DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	
Mariana Coelho Portilho Bernardi Adilandri Mércio Lobeiro Jeferson Rafael Bueno Thiago José Sepulveda da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.4841924055	
CAPÍTULO 6	57
MODELO MATEMÁTICO PARA AUXILIAR O PLANEJAMENTO DA MANUTENÇÃO PREVENTIVA DE MOTORES ELÉTRICOS	
Thalita Monteiro Obal Jonatas Santana Obal	
DOI 10.22533/at.ed.4841924056	

CAPÍTULO 7	64
PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE FLUXO EM AQUÍFERO CONFINADO	
João Paulo Martins dos Santos Alessandro Firmiano de Jesus Edson Wendland	
DOI 10.22533/at.ed.4841924057	
CAPÍTULO 8	83
RESONANT ORBITAL DYNAMICS OF CBERS SATELLITES	
Jarbas Cordeiro Sampaio Rodolpho Vilhena de Moraes Sandro da Silva Fernandes	
DOI 10.22533/at.ed.4841924058	
CAPÍTULO 9	91
TESTES ADAPTATIVOS ENVOLVENDO O CONTEÚDO DE DERIVADAS: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL	
Patrícia Liane Grudzinski da Silva Claudia Lisete Oliveira Groenwald	
DOI 10.22533/at.ed.4841924059	
CAPÍTULO 10	104
LOCALIZAÇÃO DE FALTAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO POR ANÁLISE DE SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO	
Danilo Pinto Moreira de Souza Eliane da Silva Christo Aryfrance Rocha Almeida	
DOI 10.22533/at.ed.48419240510	
CAPÍTULO 11	116
MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA	
Gustavo Henrique Petrolí Norberto Anibal Maidana	
DOI 10.22533/at.ed.48419240511	
CAPÍTULO 12	133
LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO	
Claudio Fuentealba Edelmira Badillo Gloria Sánchez-Matamoros Andrea Cárcamo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240512	
CAPÍTULO 13	143
OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
Márcio Aurélio da Silva Fran Sérgio Lobato Aldemir Ap Cavalini Jr Valder Steffen Jr	
DOI 10.22533/at.ed.48419240513	

CAPÍTULO 14	156
SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY	
Gino Gustavo Maqui Huamán	
Ulcilea Alves Severino Leal	
Geraldo Nunes Silva	
DOI 10.22533/at.ed.48419240514	
CAPÍTULO 15	164
VALIDAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA O ESCOAMENTO DE GRÃOS DE SOJA	
Rodolfo França de Lima	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Dirceu Lima dos Santos	
Adriano Pilla Zeilmann	
DOI 10.22533/at.ed.48419240515	
CAPÍTULO 16	181
TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA	
Landy Sosa Moguel	
Guadalupe Cabañas-Sánchez	
Eddie Aparicio Landa	
DOI 10.22533/at.ed.48419240516	
CAPÍTULO 17	192
SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE	
Francisco Helmuth Soares Dias	
Jacques Aveline Loureiro da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.48419240517	
CAPÍTULO 18	199
SIMULAÇÃO 3D DO FLUXO DE AR DE UM SISTEMA REAL DE ARMAZENAGEM DE GRÃOS	
Vanessa Faoro	
Rodolfo França de Lima	
Aline Tampke Dombrowski	
Manuel Osório Binelo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240518	
CAPÍTULO 19	207
CONTROLE ÓTIMO DO FLUXO DE ÁGUA EM UMA FÔRMA DE GELO	
Xie Jiayu	
João Luis Gonçalves	
DOI 10.22533/at.ed.48419240519	
CAPÍTULO 20	213
CÓDIGOS CÍCLICOS DEFINIDOS POR ANULAMENTO	
Conrado Jensen Teixeira	
Osnel Broche Cristo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240520	

CAPÍTULO 21	216
ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA	
Bruno Carlos Lugão Diego Campos Knupp Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues Antônio José da Silva Neto	
DOI 10.22533/at.ed.48419240521	
CAPÍTULO 22	225
ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	
Ronaldo Mendes Evaristo Kelly Cristiane Iarosz Silvio Luiz Thomaz de Souza Ricardo Luiz Viana Moacir Fernandes de Godoy Antonio Marcos Batista	
DOI 10.22533/at.ed.48419240522	
CAPÍTULO 23	235
CONSTRUÇÃO DE UM AEROMODELO DE MACARRÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA	
Alissan Sarturato Firão Ernandes Rocha de Oliveira Zulind Luzmarina Freitas	
DOI 10.22533/at.ed.48419240523	
SOBRE O ORGANIZADOR	239

SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE

Francisco Helmuth Soares Dias

Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Aplicada
Porto Alegre – RS

Jacques Aveline Loureiro da Silva

Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
Departamento de Matemática
Porto Alegre – RS

RESUMO: Neste trabalho apresentamos um novo modelo metapopulacional com taxa de migração independente da densidade. Obtemos também um critério para a estabilidade do estado síncrono, baseado no cálculo do número de Lyapunov Transversal do atrator sincronizado.

PALAVRAS-CHAVE: Metapopulação, Estabilidade, Sincronismo, Número de Lyapunov.

ABSTRACT: In this work we present a new metapopulation model with density independent migration rate. We also obtain a criterion for the stability of the synchronous state, based on the calculation of the Transversal Lyapunov number of the synchronized attractor.

KEYWORDS: Metapopulation, Stability, Synchronism, Lyapunov number.

1 | INTRODUÇÃO

As pesquisas em dinâmicas populacionais têm crescido nas últimas décadas, principalmente aquelas que consideram que a população está dividida em pequenos fragmentos adequados para reprodução e sobrevivência da espécie, ditos sítios ou *patches*, e ao conjunto discreto deles denominado metapopulação, como pode ser visto em Jansen e Lloyd (2000) e Silva, Barrionuevo e Giordani (2010).

O termo metapopulação foi utilizado pioneiramente por Levins (1969), para descrever uma população de populações. Uma metapopulação em que todos os seus sítios possuem a mesma dinâmica local (reprodução e sobrevivência) é dita homogênea. Caso contrário, a metapopulação é dita heterogênea.

Os sítios estão cercados por um ambiente hostil e totalmente impróprio para reprodução e sobrevivência. A conexão entre eles ocorre através de movimentos migratórios. Neste trabalho, migração e dispersão terão o mesmo significado, e serão utilizadas para descrever o movimento dos indivíduos de um sítio para outro.

Com a movimentação entre os sítios, pode-se dar início a um outro processo muito importante, denominado sincronização. Segundo Earn, Levin e Rohani (2000) a

sincronização está fortemente correlacionada com a extinção da metapopulação. Uma dinâmica sincronizada ocorre quando todos os sítios da população, com condições iniciais diferentes, passam a ter o mesmo número de indivíduos num determinado instante de tempo, a partir do qual oscilam de maneira idêntica.

2 | O MODELO METAPOPOPULACIONAL

Consideremos uma metapopulação homogênea formada por n sítios enumerados de 1 até n . Em cada sítio existe uma população de uma única espécie, chamada população local ou subpopulação. Denotamos por x_t^i o número de indivíduos do sítio i no instante de tempo t e vamos supor que uma função f , suave em $[0, \infty)$ descreve o processo de dinâmica local. Então, na ausência de migração entre os sítios, a evolução de cada população é dada por

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), i = 1, 2, \dots, n, t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Exemplos para a função f podem ser encontrados em Hassel (1975).

Terminado o processo de dinâmica local em cada sítio, ocorre o processo de migração. A cada passo de tempo, uma fração μ de indivíduos, $\mu \in [0, 1]$, deixa um dado sítio e migra para outros sítios mais próximos. Dos indivíduos que migram dos sítios vizinhos j , uma fração c_{ij} chegará ao sítio i . Por se tratar de um processo de curta duração, supomos que não há perdas durante essa movimentação, ou seja, $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1, j = 1, \dots, n$. Assumimos ainda que $c_{ii} = 0$. Os elementos c_{ij} formam a matriz de conexão $C = [c_{ij}], i, j = 1, 2, \dots, n$.

Uma vez que existe a dispersão, precisamos definir a topologia da rede. Como queremos evitar efeitos de fronteira, utilizaremos redes unidimensionais em forma de anéis cíclicos. Neste caso, a matriz de conexão para um anel cíclico de conexão local e para um anel cíclico de conexão global são matrizes circulantes de ordem n , dadas respectivamente por

$$C = \text{circ} \left(0, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2} \right), \quad (2)$$

e

$$C = \text{circ} \left(0, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1} \right). \quad (3)$$

Levando em conta as considerações anteriores, podemos escrever um sistema de equações que descreve a dinâmica metapopulacional, dado por

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \mu \sum_{j=1}^n c_{ij} \frac{f(x_t^i)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} f(x_t^k)} f(x_t^j), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

3 | SINCRONIZAÇÃO

A sincronização do sistema (4) é obtida quando todos os sítios apresentam a mesma densidade populacional em cada tempo t . Isto significa que $x_t^i = x_t$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Substituindo isso em (4) obtemos

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t) + \mu \frac{f(x_t) \sum_{j=1}^n c_{ij}}{f(x_t) \sum_{k=1}^n c_{kj}} f(x_t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Já sabemos que $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1$, $j = 1, \dots, n$. Supondo que $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, n$, obtemos que a matriz C é duplamente estocástica, e por consequência a expressão acima torna-se

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

que é exatamente a dinâmica de um sítio isolado dada em (1). Portanto, a dinâmica de cada sítio no estado sincronizado satisfaz a dinâmica de um sítio isolado.

Consideremos a órbita sincronizada $s_t = (x_t, x_t, \dots, x_t) \in \mathbb{R}^n$ do sistema (4). Queremos determinar se as órbitas que iniciam próximas do estado sincronizado, serão atraídas para este estado. Com este objetivo, linearizamos o sistema (4) em torno da órbita sincronizada. Para isso, calculamos a matriz Jacobiana e aplicamos ela na órbita sincronizada, obtendo

$$J(s_t) = \Omega f'(x_t), \tag{5}$$

onde $\Omega = I_n - \mu B$ com I_n a matriz identidade de ordem n e $B = [b_{ij}]$ a matriz quadrada de ordem n definida por

$$b_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n c_{ik}^2, & \text{se } i = j, \\ \sum_{k=1}^n c_{ik}c_{jk} - c_{ij}, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \tag{6}$$

Temos que a matriz B é circulante. Logo, existe uma matriz F que diagonaliza a matriz B (Davis, 1979). Mais precisamente, $B = FDF^{-1}$, onde $F = [f_{ij}]$ é a matriz de Fourier, definida por $f_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\exp(-\frac{2\pi}{n} \sqrt{-1}) \right)^{(i-1)(j-1)}$, $i, j = 1, \dots, n$, e $D = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ sendo $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, os autovalores da matriz B .

Uma vez que $\sum_{j=1}^n b_{ij} = 0$, segue que $\lambda_0 = 0$ é um autovalor simples da matriz B associado ao autovetor $v = (1, 1, \dots, 1)$, já que $Bv = (0, 0, \dots, 0)^T = 0v$. Portanto, a matriz Ω toma a forma

$$\Omega = F \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & I_{n-1} - \mu \bar{D} & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} F^{-1}, \tag{7}$$

onde $\bar{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$.

Observemos que $\omega = 1$ é um autovalor simples de Ω e seu correspondente autoespaço é exatamente a diagonal do espaço de fase que é precisamente o estado sincronizado. Isto significa, que as perturbações nesse espaço podem ocorrer

livremente. Já as perturbações no espaço gerado pelos autovalores de $I_{n-1} - \mu\bar{D}$ são transversais ao estado sincronizado e deverão tender a zero para obtermos estabilidade assintótica.

Como o objetivo é verificar o crescimento das perturbações transversais à órbita sincronizada, basta considerar

$$J(s_t) = F[(I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_t)]F^{-1},$$

e analisar a evolução da equação de perturbação, dada por

$$\Delta_{t+1} = (I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_t)\Delta_t,$$

onde Δ_t é um vetor perturbação em \mathbb{R}^{n-1} .

Escolhendo uma perturbação inicial Δ_0 qualquer, obtemos

$$\Delta_t = (I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_{t-1}) \dots (I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_1)(I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_0)\Delta_0.$$

Desta forma a perturbação tenderá a zero quando $t \rightarrow \infty$ se, e somente se,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \dots P_1 P_0\|^{\frac{1}{\tau}} < 1, \quad (8)$$

onde $P_t = (I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_t)$, com $t = 0, 1, 2, \dots$

Podemos escrever

$$\|P_{\tau-1} \dots P_1 P_0\|^{\frac{1}{\tau}} = \|(I_{n-1} - \mu\bar{D})^\tau \prod_{t=0}^{\tau-1} f'(x_t)\|.$$

Portanto, temos que

$$L_\perp(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \dots P_1 P_0\|^{\frac{1}{\tau}} = L(x_0)\Lambda,$$

onde

$$L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)|)^{\frac{1}{\tau}}, \quad (9)$$

é o número de Lyapunov com órbita iniciando em x_0 e Λ é o raio espectral de $(I_{n-1} - \mu\bar{D})$, ou seja,

$$\Lambda = \max_{1 \leq i \leq n-1} \{ |1 - \mu\lambda_i| \}. \quad (10)$$

Considerando que a função f preserva a medida natural p , aplicando o logaritmo natural em $(\prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)|)^{\frac{1}{\tau}}$ e utilizando o Teorema de Birkoff, presente em Díaz e Jorge (2007), podemos escrever (9) na forma

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |f'(x_t)| = \int_0^\infty \ln |f'(x)| d\rho(x),$$

para todo x_0 , a menos de um conjunto de medida p nula. Consequentemente, o número de Lyapunov é dado por

$$L = e^{\int_0^{\infty} \ln |f'(x)| d\rho(x)}.$$

Podemos assim, a menos de um conjunto de medida p nula, eliminar a dependência do número de Lyapunov de x_0 e estabelecer $L_{\perp} = L\Lambda < 1$ como critério para a estabilidade assintótica do atrator sincronizado.

4 | APLICAÇÕES

Para a conexão local temos que a matriz C é dada por (2) e a matriz B (para $n \geq 6$) torna-se $B = \text{circ} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right)$. Como a matriz é circulante seus autovalores são da forma

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} b_j (\xi_k)^j, \quad (11)$$

com $\xi_k = \exp \left(\frac{2\pi k}{n} \sqrt{-1} \right)$, $k = 0, \dots, n-1$. Com alguns cálculos chegamos que

$$\lambda_k = \cos^2 \left(\frac{2\pi k}{n} \right) - \cos \left(\frac{2\pi k}{n} \right).$$

Para $k=0$ temos $\lambda_k = 0$, que é o autovalor associado a diagonal do espaço de fase. Estamos interessados nas perturbações transversais à diagonal do espaço de fase. Dessa forma,

$$\Lambda = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ \left| 1 - \mu \left[\cos^2 \left(\frac{2\pi i}{n} \right) - \cos \left(\frac{2\pi i}{n} \right) \right] \right| \right\}.$$

Portanto,

$$L_{\perp} = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ \left| 1 - \mu \left[\cos^2 \left(\frac{2\pi i}{n} \right) - \cos \left(\frac{2\pi i}{n} \right) \right] \right| \right\} L$$

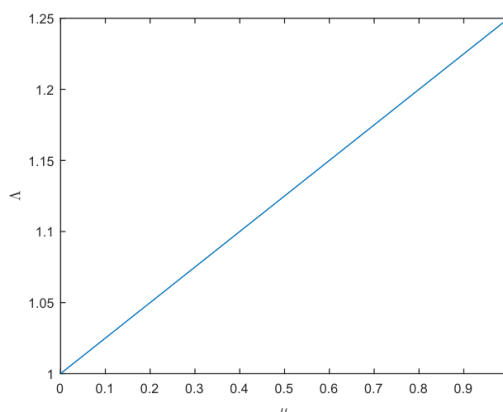


Figura 1: Λ em função de μ .

Por sua vez, considerando a rede global, representada pela matriz (3), temos que a matriz B é dada por $B = \text{circ} \left(\frac{1}{n-1}, -\frac{1}{(n-1)^2}, \dots, -\frac{1}{(n-1)^2} \right)$. Da mesma forma, que no caso anterior, os autovalores de B são dados por (11). Para $k=0$ temos o autovalor

$\lambda_k = 0$, o qual está associado ao estado síncrono e não nos interessa. Já para $k \neq 0$,

$$\lambda_k = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{j=1}^{n-1} (\xi_k)^j.$$

Mas $\sum_{j=1}^{n-1} (\xi_k)^j = -1$, logo,

$$\lambda_k = \frac{n}{(n-1)^2}, k = 1, \dots, n-1.$$

Consequentemente,

$$\Lambda = \left| 1 - \mu \frac{n}{(n-1)^2} \right|,$$

e dessa maneira,

$$L_{\perp} = \left| 1 - \mu \frac{n}{(n-1)^2} \right| L.$$

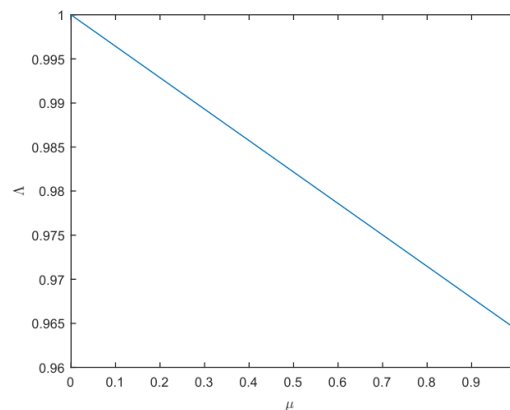


Figura 2: Λ em função de μ .

5 | CONCLUSÕES

Desenvolvemos um critério para a análise da estabilidade local assintótica da solução sincronizada do sistema (4). Conluímos que quando o número de Lyapunov Transversal $L_{\perp} < 1$, ocorre estabilidade local do estado síncrono e para $L_{\perp} > 1$ ocorre instabilidade local do estado síncrono. Podemos notar ainda, que em ambas as redes local e global, o número de Lyapunov transversal é calculado como o produto de uma componente associada à rede e à taxa de migração, e outra componente dependente da dinâmica local.

REFERÊNCIAS

DAVIS, P. J. **Circulant Matrices**. John Wiley & Sons Inc, 1979.

DÍAZ, L. J.; JORGE, D. **Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

EARN, D. J. D.; LEVIN, S. A.; ROHANI, P. **Coherence and conservation**. Science, v. 290, p. 1360-1364, 2000.

HASSEL, M. P. **Density-dependence in single-species populations**. J. Anim. Ecology, v. 44, p. 283-295, 1975.

JANSEN, V. A. A.; LLOYD, A. L. **Local stability analysis of spatially homogeneous solutions of multi-patch systems**. J. Math Biol., v. 41, p. 232-252, 2000.

LEVINS, R. **Some demographic and genetic consequences of environmental heterogeneity for biological control**. Bulletin of Entomological Society of America, v. 15, p. 237-240, 1969.

SILVA, J. A. L.; BARRIONUEVO, J. A.; GIORDANI, F. T. **Synchronism in population networks with non linear coupling**. Nonlinear Analysis: Real World Applications, v. 11, p. 1005-1016, 2010.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-348-4

