

# EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)

 **Atena**  
Editora  
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)

# Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2019 Os Autores  
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora  
Editora Executiva: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira  
Diagramação: Natália Sandrini  
Edição de Arte: Lorena Prestes  
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

## Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

## Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

## Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
E24	Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2)  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-348-4 DOI 10.22533/at.ed.484192405  1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.  CDD 510.7
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
O ALGORITMO ESPECTRAL COMO ALTERNATIVA AO ALGORITMO K-MEANS EM CONJUNTO DE DADOS ARTIFICIAIS	
Luciano Garim Garcia Leonardo Ramos Emmendorfer	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924051</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>16</b>
NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza Hélio Magalhães De Oliveira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924052</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>24</b>
ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924053</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>32</b>
ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA	
Amanda Barretos Lima Garuth Brenda Anselmo Mendes Isabela Geraldo Reghin Rosângela Teixeira Guedes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924054</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>46</b>
DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	
Mariana Coelho Portilho Bernardi Adilandri Mércio Lobeiro Jeferson Rafael Bueno Thiago José Sepulveda da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924055</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>57</b>
MODELO MATEMÁTICO PARA AUXILIAR O PLANEJAMENTO DA MANUTENÇÃO PREVENTIVA DE MOTORES ELÉTRICOS	
Thalita Monteiro Obal Jonatas Santana Obal	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924056</b>	

<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>64</b>
PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE FLUXO EM AQUÍFERO CONFINADO	
<a href="#">João Paulo Martins dos Santos</a> <a href="#">Alessandro Firmiano de Jesus</a> <a href="#">Edson Wendland</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924057</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>83</b>
RESONANT ORBITAL DYNAMICS OF CBERS SATELLITES	
<a href="#">Jarbas Cordeiro Sampaio</a> <a href="#">Rodolpho Vilhena de Moraes</a> <a href="#">Sandro da Silva Fernandes</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924058</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>91</b>
TESTES ADAPTATIVOS ENVOLVENDO O CONTEÚDO DE DERIVADAS: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL	
<a href="#">Patrícia Liane Grudzinski da Silva</a> <a href="#">Claudia Lisete Oliveira Groenwald</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924059</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>104</b>
LOCALIZAÇÃO DE FALTAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO POR ANÁLISE DE SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO	
<a href="#">Danilo Pinto Moreira de Souza</a> <a href="#">Eliane da Silva Christo</a> <a href="#">Aryfrance Rocha Almeida</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240510</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>116</b>
MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA	
<a href="#">Gustavo Henrique Petrolí</a> <a href="#">Norberto Anibal Maidana</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240511</b>	
<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>133</b>
LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO	
<a href="#">Claudio Fuentealba</a> <a href="#">Edelmira Badillo</a> <a href="#">Gloria Sánchez-Matamoros</a> <a href="#">Andrea Cárcamo</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240512</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>143</b>
OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
<a href="#">Márcio Aurélio da Silva</a> <a href="#">Fran Sérgio Lobato</a> <a href="#">Aldemir Ap Cavalini Jr</a> <a href="#">Valder Steffen Jr</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240513</b>	

<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>156</b>
SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY	
Gino Gustavo Maqui Huamán	
Ulcilea Alves Severino Leal	
Geraldo Nunes Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240514</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>164</b>
VALIDAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA O ESCOAMENTO DE GRÃOS DE SOJA	
Rodolfo França de Lima	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Dirceu Lima dos Santos	
Adriano Pilla Zeilmann	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240515</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>181</b>
TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA	
Landy Sosa Moguel	
Guadalupe Cabañas-Sánchez	
Eddie Aparicio Landa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240516</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>192</b>
SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE	
Francisco Helmuth Soares Dias	
Jacques Aveline Loureiro da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240517</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>199</b>
SIMULAÇÃO 3D DO FLUXO DE AR DE UM SISTEMA REAL DE ARMAZENAGEM DE GRÃOS	
Vanessa Faoro	
Rodolfo França de Lima	
Aline Tampke Dombrowski	
Manuel Osório Binelo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240518</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>207</b>
CONTROLE ÓTIMO DO FLUXO DE ÁGUA EM UMA FÔRMA DE GELO	
Xie Jiayu	
João Luis Gonçalves	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240519</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>213</b>
CÓDIGOS CÍCLICOS DEFINIDOS POR ANULAMENTO	
Conrado Jensen Teixeira	
Osnel Broche Cristo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240520</b>	

<b>CAPÍTULO 21</b> .....	<b>216</b>
ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA	
Bruno Carlos Lugão	
Diego Campos Knupp	
Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues	
Antônio José da Silva Neto	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240521</b>	
<b>CAPÍTULO 22</b> .....	<b>225</b>
ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	
Ronaldo Mendes Evaristo	
Kelly Cristiane Iarosz	
Silvio Luiz Thomaz de Souza	
Ricardo Luiz Viana	
Moacir Fernandes de Godoy	
Antonio Marcos Batista	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240522</b>	
<b>CAPÍTULO 23</b> .....	<b>235</b>
CONSTRUÇÃO DE UM AEROMODELO DE MACARRÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA	
Alissan Sarturato Firão	
Ernandes Rocha de Oliveira	
Zulind Luzmarina Freitas	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240523</b>	
<b>SOBRE O ORGANIZADOR</b> .....	<b>239</b>

## ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

### Ronaldo Mendes Evaristo

Instituto Federal do Paraná, Telêmaco Borba, PR  
Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR (e-mail: antoniomarcosbatista@gmail.com)

### Kelly Cristiane Iarosz

Universidade de São Paulo, São Paulo, SP

### Silvio Luiz Thomaz de Souza

Universidade Federal de São João Del-Rei, Divinópolis, MG

### Ricardo Luiz Viana

Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR

### Moacir Fernandes de Godoy

Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto, São José do Rio Preto, SP

### Antonio Marcos Batista

Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR (e-mail: antoniomarcosbatista@gmail.com)

**RESUMO:** A evolução dos dispositivos processadores, das linguagens computacionais e de ações multidisciplinares permitem o uso de modelos matemáticos e inovações tecnológicas para complementar os métodos para avaliação do desempenho de um dos órgãos vitais do corpo humano, o coração. O crescente número de casos envolvendo doenças cardiovasculares motiva a comunidade científica a buscar novas técnicas, dentre as quais destacam-se análises

não invasivas, capazes de detectar patologias leves e moderadas. De modo a contribuir com estudos complementares, apresenta-se neste trabalho um modelo matemático que permite a simulação da morfologia de eletrocardiograma de adultos sadios e revela tacogramas que podem ser comparados com dados coletados de forma experimental.

**ABSTRACT:** The evolution of processing devices, computational languages, and multidisciplinary actions allow the use of mathematical models and technological innovations to improve the analyze of one of the vital organs of the human body, the heart. The increase of the number of cases involving cardiovascular diseases motivates the scientific community to research new techniques, mainly non invasive analyzes, capable of detecting mild and moderate pathologies. In this work, a mathematical model is presented. It allows the simulation of electrocardiogram morphology of healthy adults and reveals tachographs that can be compared with experimental data.

**PALAVRAS-CHAVE:** coração, variabilidade da frequência cardíaca, transformada wavelet discreta.

## 1 | INTRODUÇÃO

O coração humano é o órgão vital responsável por controlar a vida vegetativa (involuntária) enquanto é monitorado pelo sistema nervoso autônomo (SNA) (BEAR et al., 2008), tem a função de bombear sangue para o corpo (MOHRMAN e HELLER, 2008). O SNA é dividido em dois subsistemas: sistema nervoso simpático (SNS), responsável por controlar as situações de alerta como, por exemplo, susto, medo, exercícios físicos e estresse mental e o sistema nervoso parassimpático (SNP), responsável pelo controle do corpo em repouso (ACHARYA et al., 2006).

No coração, o regime sinusal o ritmo cardíaco é controlado pelo SNP, considerado normal quando o indivíduo apresenta aproximadamente 72 batimentos por minuto (bpm) e bombeia 0,07 litros de sangue por contração (CURTIS, 1997; HALL, 2016). Caso o indivíduo seja submetido a alguma situação de alerta, o aumento da atividade cardíaca é controlado pelo SNS (BEAR et al., 2008). Uma das formas mais comuns de avaliar a atividade elétrica do coração é conhecido como eletrocardiograma (ECG). Essa forma de registro foi introduzida Willem Eithovem em 1902 (DUBIN, 1996), um registro de dados da relaxação e contração do coração, que normalmente é apresentado em forma gráfica com linhas que indicam o comportamento ao longo do tempo. Os pontos coletados durante a evolução temporal da atividade elétrica permitem avaliar o ritmo, a quantidade e a velocidade dos batimentos cardíacos (FERREIRA et al., 2010).

Na Figura 1 (a) é representada graficamente a atividade cardíaca durante 4 segundos. Três formas básicas de onda são mostradas e descritas pela sequência simbólica P, QRS e T (SCHMIDT et al., 1999). Onde a onda P representa a despolarização (contração) dos átrios. Neste momento, o sangue passa dos átrios para os ventrículos. Na sequência observa-se a onda QRS, este complexo representa a contração ventricular (sístole), onde o sangue é forçado para fora dos ventrículos, sentido aos pulmões e ao resto do corpo. Por fim, tem-se a onda T representando a repolarização dos ventrículos (diástole), momento em que o sangue venoso (não oxigenado) entra no átrio direito, enquanto o sangue oxigenado (arterial) oriundo dos pulmões entra no átrio esquerdo, ficando o coração preparado para o próximo ciclo (DUBIN, 1996). A Figura 1 (b) permite a observação da evolução temporal ( $n=1000$  batimentos cardíacos) da atividade elétrica ( $r[n][s]$ ) de um coração. Na representação gráfica tem-se uma grande quantidade de pontos que dão a característica visual de um ECG e é conhecida como tacograma e pode ser estudada por meio da variabilidade da frequência cardíaca (VFC).

Um estudo detalhado deste tipo de imagem pode ser realizado observando características da evolução temporal. A detecção de patologias leves e moderadas associadas ao SNA como arritmias, bradicardias e taquicardias, além de distúrbios na relação entre os SNS e SNP pode ser realizada por meio do estudo da VFC (VANDERLEI et al., 2009) via ECG, um método não invasivo e coerente nas respostas. Além disso, modelos matemáticos vêm sendo estudados com finalidade de compreender

o funcionamento fisiológico do sistema cardiovascular (SCV). Alguns modelos são baseados na equação clássica de Van der Pol (VAN DER POL, 1926). Gois e Savi (GOIS e SAVI, 2009), por exemplo, consideraram três osciladores de Van der Pol modificados, conectados por um acoplamento com atraso de tempo para descrever o comportamento do ritmo cardíaco.

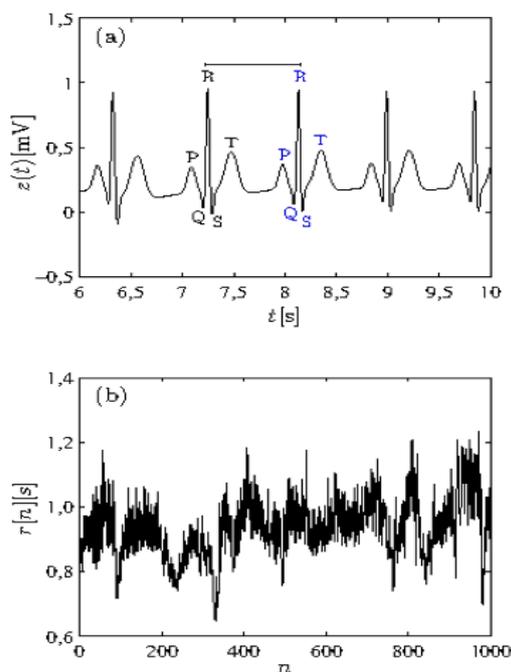


Figura 1: Evolução temporal da atividade elétrica permite avaliar o ritmo, a quantidade e a velocidade dos batimentos cardíacos. Em (a) representa-se um padrão de eletrocardiograma (ECG) com sequência simbólica das principais ondas em (b) encontra-se a amostra gráfica de um tacograma.

Esta análise é feita por meio da avaliação do intervalo entre ondas R consecutivas (Figura 1 (a)). O sinal de tempo discreto, derivado de ECG, denotado por  $r[n]$ , com  $0 \leq n \leq N-z$ , é conhecido como espectro do tacograma ou simplesmente tacograma. A Figura 1 (b) mostra um exemplo de tacograma (KITNEY e ROMPELMAN, 1980).

Acharya e colaboradores (ACHARYA et al., 2006), apresentam uma revisão de várias técnicas para análise do tacograma, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Os autores apresentam uma descrição detalhada sobre as relações entre a VFC para indivíduos que fazem parte de grupos de risco (consumidores de álcool e cigarro, uso de medicamentos, diabetes, entre outros). No domínio da frequência, o espectro do tacograma possui duas bandas principais (ACHARYA et al., 2006): no intervalo de  $0,04 \leq f \leq 0,15\text{Hz}$  encontram-se as baixas frequências (BF), enquanto no intervalo  $0,04 \leq f \leq 0,4\text{Hz}$  estão as altas frequências (AF). As atividades dos SNP e SNS são associadas, respectivamente, às bandas AF e BF.

Avalia-se que durante o exame os indivíduos permanecem acordados em posição de repouso, espera-se somente a atuação do SNP. Desta forma, um indivíduo sadio deve possuir baixa atividade em BF e alta em AF, além do que, com o espectro de energia da transformada wavelet discreta (TWD) (DAUBECHIES, 1992 e VIDAKOVIC,

1996) o tacograma pode ser melhor aproximado por um processo estocástico autorregressivo (AR) do que por meio dos espectros gaussianos.

A estrutura apresentada neste trabalho tem a seguinte forma: na Seção 2 apresenta-se o modelo matemático para simulação do batimento cardíaco; na Seção 3, trata-se da transformada wavelet discreta (TWD); na Seção 4 mostra-se os resultados obtidos e na última Seção as conclusões são apresentadas.

## 2 | MODELO MATEMÁTICO PARA BATIMENTOS CARDÍACOS

Neste trabalho, é utilizado um modelo matemático de três equações diferenciais acopladas introduzidas por McSharry e colaboradores (McSHARRY et al., 2003),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \omega y \\ \dot{y} &= \alpha y + \omega x \\ \dot{z} &= z_0 - z - \sum_i \alpha_i \Delta\theta_i e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\theta_i}{b_i} \right)^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

com  $i \in \{P, Q, R, S, T\}$ ,  $\alpha = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\Delta\theta_i = (\theta - \theta_i) \bmod 2\pi$ ,  $\theta = \arctan 2(y, x)$   
 $z_0(t) = A \sin(2\pi f_2 t)$  onde a amplitude é dada por  $A = 0,15 \text{ mV}$  e considera-se a frequência de respiração do indivíduo  $f_2 = 0,25 \text{ Hz}$ . A velocidade angular  $\omega$  pode ser encontrada efetuando-se o cálculo de  $\omega(t) = 2\pi / r(t)$ , onde  $r(t)$  é a conversão discreto-contínua do tacograma  $r[n]$  (OPPENHEIM et al., 2010). Na Tabela 1, apresentam-se os demais parâmetros do modelo.

Índice (i)	Tempo [s]	$e_i$ [rad]	$\alpha_i$	$b_i$
P	- 0,2	$-\pi/3$	1,2	0,25
Q	- 0,05	$-\pi/3$	-5	0,1
R	0	0	30	0,1
S	0,05	$\pi/12$	-7,5	0,1
T	0,3	$\pi/2$	0,75	0,4

Tabela 1: Parâmetros do modelo apresentado por McSharry e colaboradores.

No trabalho apresentado originalmente por McSharry et al. (McSHARRY et al., 2003), o tacograma  $r[n]$  (Figura 2(a)) é determinado pela transformada inversa de Fourier (OPPENHEIM et al., 2010) do espectro  $H_G(f) = |H_G(f)|e^{i\Phi}$ , com módulo

$$|H_G(f)| = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi}c_1^2} e^{\frac{1}{2} \left( \frac{f-f_1}{c_1} \right)^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{2\pi}c_2^2} e^{\frac{1}{2} \left( \frac{f-f_2}{c_2} \right)^2}}, \quad (2)$$

fase  $\Phi$  aleatória uniformemente distribuída entre  $-\pi$  e  $\pi$  e  $f_1 = 0,1 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 0,25 \text{ Hz}$ ,  $c_1 = c_2 = 0,01$  e  $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 0,5$ . O modelo dinâmico descreve a geração de sinais sintéticos

de eletrocardiograma. Esse modelo é baseado em um conjunto de três equações diferenciais ordinárias onde são incorporadas as ondas de Mayer e a arritmia sinusal respiratória (ASR) por meio de um espectro bimodal consistindo da soma de duas funções gaussianas (McSHARRY et al., 2003).

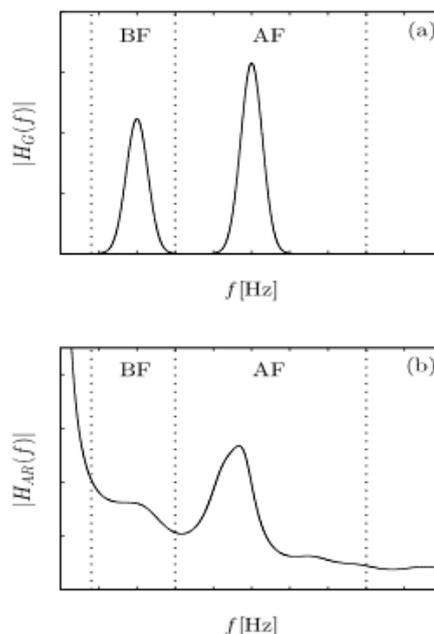


Figura 2: Representação do espectro gaussiano (a) e espectro autorregressivo (b), com suas respectivas faixas de baixa frequência (BF) e alta frequência (AF).

Como comentado anteriormente, o procedimento de geração do tacograma foi alterado em relação ao espectro. Ao invés da Equação (2), relacionada a uma distribuição gaussiana, a sequência  $r[n]$  é tomada como sendo uma realização de um processo AR,

$$R[n] = \sum_{l=1}^p d_l R[n-l] + \varepsilon[n], \quad (3)$$

onde  $\varepsilon[n]$  é um ruído branco com média zero e variância unitária. A ordem do modelo é  $p = 16$ , com base no trabalho de Boardman et al. (BOARDMAN et al., 2002), e os coeficientes utilizados são apresentados na Tabela 2:

$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$
-0,9099	0,5188	-0,2840	-0,2063	0,0382	0,0709
$d_7$	$d_8$	$d_9$	$d_{10}$	$d_{11}$	$d_{12}$
0,0305	-0,1533	0,0009	-0,0070	-0,0218	0,0043
	$d_{13}$	$d_{14}$	$d_{15}$	$d_{16}$	
	0,0316	0,0155	-0,0591	0,0252	

Tabela 2: Coeficientes do tacograma para o processo estocástico autorregressivo.

O espectro da Equação (3) é obtido por

$$|H_{AR}(f)| = \frac{1}{|1 - \sum_{l=1}^p a_l e^{-i2\pi fl}|}, \quad (4)$$

e apresentado na Figura 2(b) com suas respectivas faixas de frequências.

### 3 | TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

As wavelets são funções localizadas no tempo utilizadas para analisar outras funções em posição e escala (frequência) (GROSSMANN e MORLET, 1984). Os parâmetros de uma wavelet são o tempo, a dilatação e a translação. Existem dois tipos principais de transformadas wavelets (TW): contínua (TWC) e discreta (TWD), que por sua vez pode ser de tempo contínuo ou discreto. Neste trabalho utilizamos a TWD. Trata-se de uma forma de decomposição em multibandas baseada em bancos de filtros espelhados em quadratura de dois canais (OPPENHEIM et al., 2010), conforme mostra a Figura 3.

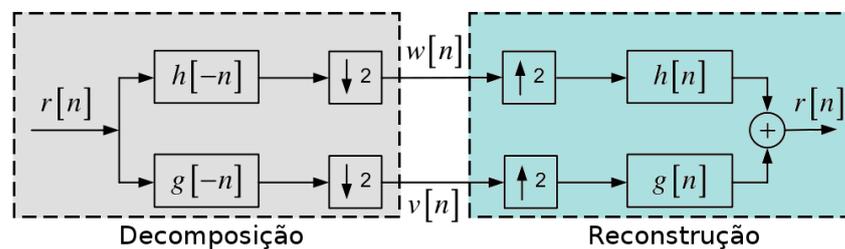


Figura 3: Banco de filtros utilizado pela transformada wavelet discreta.

Onde os filtros wavelet  $h[n]: n=0, \dots, L-1$  e escala  $g[n]: n=0, \dots, L-1$  são construídos de acordo com a família de wavelets utilizada, sendo  $L$  o comprimento do filtro (VIDAKOVIC et al., 1999).

Para o presente trabalho a família escolhida denomina-se Daubechies (DAUBECHIES, 1992) com  $L=80$ , para este caso, não foram considerados aspectos de reconstrução.

Os coeficientes  $w[n]$  e  $v[n]$  são obtidos por convoluções circulares de  $r[n]$  com as versões reversas dos filtros  $h[n]$  e  $g[n]$  seguidas de decimação por fator dois. A Figura 4 mostra a decomposição em quatro níveis utilizada neste estudo. Os sinais são representados por matrizes, visto que possuem comprimento finito.

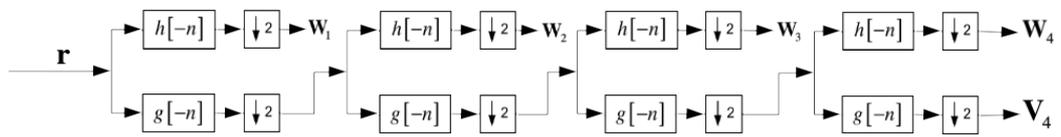


Figura 4: Esquema representativo da decomposição de um tacograma em quatro níveis pela transformada wavelet discreta.

A decomposição permite que sejam definidas bandas para o domínio wavelet, na Figura 5 mostra-se a relação entre os coeficientes wavelet e suas respectivas bandas de frequências: wavelet baixa frequência (wBF), intervalo  $1/32 \leq f \leq 1/8$  Hz; wavelet alta frequência (wAF), intervalo  $1/8 \leq f \leq 1/2$  Hz.

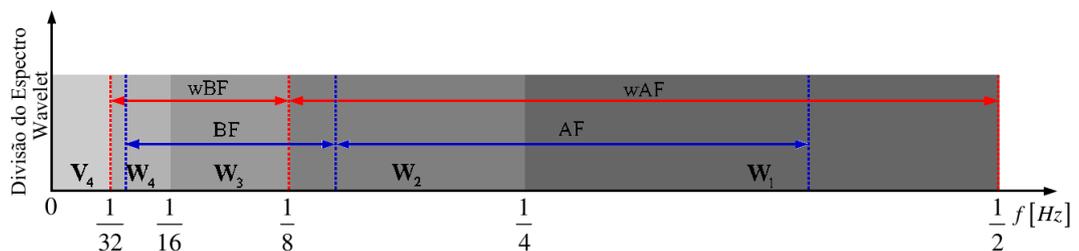


Figura 5: Representação esquemática do espectro de frequências feito pela transformada wavelet discreta.

A energia do tacograma pode ser calculada por  $\|r\|^2 = \|V_4\|^2 + \sum_{j=1}^4 \|W_j\|^2$ , com  $\|r\|^2 = r^T r$  (VIDAKOVIC et al., 1999). Já, as energias nas bandas wBF e wAF podem ser determinadas por,  $\|W_{AF}\|^2 = \|W_1\|^2 + \|W_2\|^2$  e  $\|W_{BF}\|^2 = \|W_3\|^2 + \|W_4\|^2$ .

## 4 | RESULTADOS

Baseando-se em trabalhos anteriores foi realizado um estudo do espectro a fim de se obter a velocidade angular utilizada em um conjunto de equações diferenciais e consequentemente o ECG. Durante as simulações foram criados 124 sinais teóricos de ECG, sendo metade (62) gerados por meio de espectro gaussiano e 62 pelo espectro autorregressivo.

Os resultados das simulações obtidas foram apresentados em forma de tacogramas e comparados com 62 tacogramas experimentais (N= 100 batimentos) de adultos saudáveis. Esses dados, assim como todos os demais dados experimentais utilizados neste trabalho foram coletados na Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto pelo grupo do Prof. Dr. Moacyr Fernandes de Godoy.

Para cada tacograma são calculadas as energias da Equação (5) e obtidas  $\|W_{BF}\|_G^2$ ,  $\|W_{BF}\|_{AR}^2$ ,  $\|W_{BF}\|_{exp}^2$  para baixa frequência (Figura 6(a)) e  $\|W_{AF}\|_G^2$ ,  $\|W_{AF}\|_{AR}^2$ ,  $\|W_{AF}\|_{exp}^2$  para alta frequência (Figura 6(b)). Os índices se referem aos tacogramas obtidos pelos espectros gaussiano (G), autorregressivo (AR) e experimental (EXP).

Nas Figuras 6(a) e 6(b), observam-se as bandas (wBF e wAF), e a energia obtida do tacograma autorregressivo se aproximando, em média, da energia do tacograma experimental em relação ao tacograma gaussiano.

Quanto a variabilidade das energias experimentais, apresentam-se maiores. Esse efeito é comumente observado nos ECG, visto que, o coração possui a habilidade de responder a vários estímulos e situações de alerta pelo qual o corpo passa durante o dia, além de possíveis desordens induzidas por doenças.

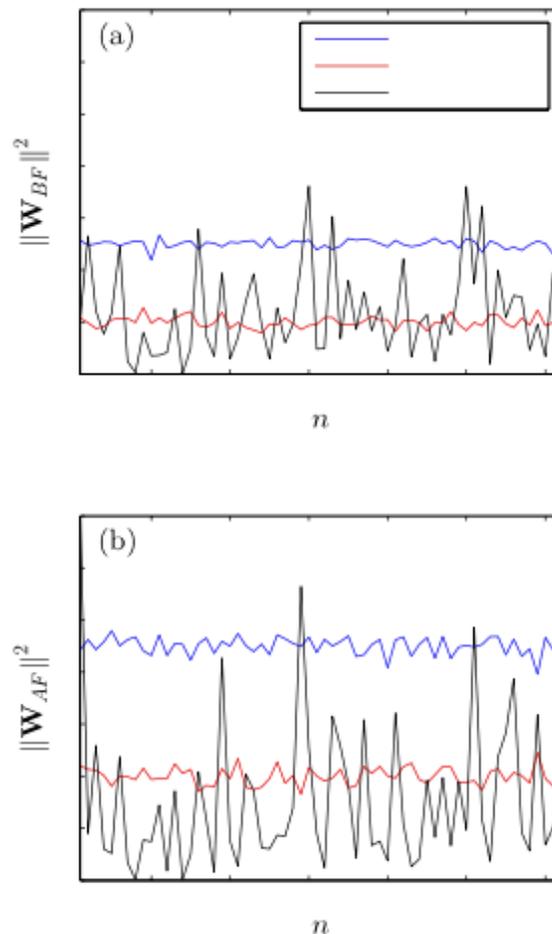


Figura 6: Energia dos tacogramas nas bandas (a) wBF e (b) wAF. Em azul, o gaussiano; em vermelho o autorregressivo; em verde o experimental.

## 5 | CONCLUSÕES

Estudou-se um modelo matemático dado por equações diferenciais acopladas que descrevem sinais de eletrocardiograma. Estabeleceu-se comparações entre tacogramas teóricos gerados por espectros gaussianos e autorregressivos com tacogramas experimentais de 62 pacientes sadios. Conclui-se que os tacogramas obtidos de processos autorregressivos levam a resultados mais realistas, quando comparadas suas energias no espectro da Transformada Wavelet Discreta.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES, CNPq, Fundação Araucária e FAPESP (2015/07311-7, 2018/03211-6).

## REFERÊNCIAS

- ACHARYA, U. R.; JOSEPH, K. P.; KANNATHAL, N.; LIM, C. M.; SURI, J. S. Heart rate variability: a review. **Med. Bio. Eng. Comput.**, vol. 44, p. 1031-1051, 2006.
- BEAR, M. F.; CONNORS, B. W.; PARADISO, M. A. **Neurociências: Desvendando o Sistema Nervoso**. Artmed, Porto Alegre, 2008.
- BOARDMAN, A.; SCHLINDWEIN, F. S.; ROCHA, A. P.; LEITE, A. A study on the optimum order of autoregressive models for heart rate variability. **Physiological Measurement**, vol. 23, p. 325-336, 2002.
- CURTIS, H. **Biologia**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1997.
- DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets**. SIAM, Philadelphia, 1992.
- DUBIN D. **Interpretação rápida do ECG**. EPUB, São Paulo, 1996.
- FERREIRA, M. T.; MESSIAS, M.; VANDERLEI, L. C. M.; PASTRE, C. M. Caracterização do comportamento caótico da variabilidade da frequência cardíaca (VFC) em jovens saudáveis, **TEMA: Tend. Mat. Apl. Comput.**, vol. 11, p. 141-150, 2010.
- GOIS, S. R. F. S. M.; SAVI, M. A. **An Analysis of Heart Rhythm Dynamics using a Three-Coupled Oscillator Model**. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 41, p. 2553-2565, 2009.
- GROSSMANN, A.; MORLET, J. **Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape**. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 15, p. 723-736, 1984.
- HALL, J. E. **Guyton & Hall Tratado de Fisiologia Médica**. 13. ed. São Paulo: Elsevier, 2016.
- KITNEY, R. I.; ROMPELMAN, O. (Eds.). The assessment of fluctuations in heart rate. In: Kitney, R. I., Rompelman, O. (Eds.), *The Study of heart-rate variability*, pp. 59-77, Oxford, England, Clarendon Press, 1980.
- McSHARRY, P. E.; CLIFFORD, G. D.; TARASSENKO, L.; SMITH, L. A. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals. **IEEE Trans. Biomed. Eng.**, vol. 50, p. 289-294, 2003.
- MOHRMAN, D. E.; HELLER, L. J. **Fisiologia Cardiovascular**. 6. ed. Porto Alegre: Mc-Graw-Hill, 2008.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Discrete-Time Signal Processing**. 3. ed., Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2010.
- SCHMIDT, G., SCHNEIDER, R., BARTHEL, P. "Heart Rate Turbulence", *Cardiac Electrophysiology Review*, v. 3, pp. 297-301, 1999.
- VANDERLEI, L. C. M.; PASTRE, C. M.; HOSHI, R. A.; CARVALHO, T. D.; GODOY, M. F. Noções básicas de variabilidade da frequência cardíaca e sua aplicabilidade clínica, **Rev. Bras. Cir. Cardiovasc.**, vol. 24, p. 205-217, 2009.

VAN DER POL, B. **On Relaxation Oscillations**. *Philosophical Magazine*, v. 2, p. 978-992, 1926.

VIDAKOVIC, B. **Statistical Modeling by Wavelets**. John Wiley & Sons, New York, 1999.

## **SOBRE O ORGANIZADOR**

**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES** Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-348-4

