

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 3

**Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)**

 **Atena**
Editora

Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 3

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof^a Dr^a Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof.^a Dr.^a Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Dr.^a Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.^a Dr.^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof.^a Dr.^a Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof.^a Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
E24	Educação matemática e suas tecnologias 3 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 3) Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-349-1 DOI 10.22533/at.ed.491192405 1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série. CDD 510.7
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
YENDO MÁS ALLÁ DE LA LÓGICA CLÁSICA PARA ENTENDER EL RAZONAMIENTO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA	
Francisco Vargas Laura Martignon	
DOI 10.22533/at.ed.4911924051	
CAPÍTULO 2	7
APROXIMANDO A PROBABILIDADE DA ESTATÍSTICA: CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO SOBRE A CURVA NORMAL	
André Fellipe Queiroz Araújo José Ivanildo Felisberto de Carvalho	
DOI 10.22533/at.ed.4911924052	
CAPÍTULO 3	18
DESCOMPLICANDO FÓRMULAS MATEMÁTICAS	
Marília do Amaral Dias	
DOI 10.22533/at.ed.4911924053	
CAPÍTULO 4	26
REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS DE FUNÇÕES: O SOFTWARE SIMCALC E A ANÁLISE DE PONTOS MÁXIMOS E MÍNIMOS	
Paulo Rogério Renk Rosana Nogueira de Lima	
DOI 10.22533/at.ed.4911924054	
CAPÍTULO 5	36
UMA ANÁLISE PANORÂMICA E REFLEXIVA DOS OBJETOS DE APRENDIZAGEM DA PLATAFORMA SCRATCH PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	
Renato Hallal Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro Luiz Carlos Aires de Macêdo Eliziane de Fátima Alvaristo	
DOI 10.22533/at.ed.4911924055	
CAPÍTULO 6	49
LESSON STUDY: O PLANEJAMENTO COLABORATIVO E REFLEXIVO	
Renata Camacho Bezerra Maria Raquel Miotto Morelatti	
DOI 10.22533/at.ed.4911924056	
CAPÍTULO 7	60
FAMÍLIAS CONSISTENTES E A COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS	
Abel Rodolfo García Lozano Angelo Santos Siqueira Sergio Ricardo Pereira de Mattos Valessa Leal Lessa de Sá Pinto	
DOI 10.22533/at.ed.4911924057	

CAPÍTULO 8	70
BIBLIOTECA ESTATÍSTICA DESCRITIVA INTERVALAR UTILIZANDO PYTHON	
Lucas Mendes Tortelli	
Dirceu Antonio Maraschin Junior	
Alice Fonseca Finger	
Aline Brum Loreto	
DOI 10.22533/at.ed.4911924058	
CAPÍTULO 9	73
COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS EXATOS FATORAÇÃO LU DOOLITTLE E FATORAÇÃO DE CHOLESKY	
Matheus Emanuel Tavares Sousa	
Matheus da Silva Menezes	
Ivan Mezzomo	
Sarah Sunamyta da Silva Gouveia	
DOI 10.22533/at.ed.4911924059	
CAPÍTULO 10	79
HISTÓRIAS E JOGOS COMO POSSIBILIDADE DIDÁTICA PARA INTRODUIR O ESTUDO DE FRAÇÕES	
Cristalina Teresa Rocha Mayrink	
Samira Zaidan	
DOI 10.22533/at.ed.49119240510	
CAPÍTULO 11	93
HISTÓRIAS EM QUADRINHOS (HQ'S) NO CONTEXTO DE ENSINO: UMA PROPOSIÇÃO METODOLÓGICA PARA O SEU USO NA SALA DE AULA	
Rodiney Marcelo Braga dos Santos	
Maria Beatriz Marim de Moura	
José Nathan Alves Roseno	
Francisco Bezerra Rodrigues	
DOI 10.22533/at.ed.49119240511	
CAPÍTULO 12	111
MONDRIAN: APRECIÇÃO, REFLEXÕES E APROXIMAÇÕES – UM RELATO DE EXPERIÊNCIA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	
Dirceu Zaleski Filho	
DOI 10.22533/at.ed.49119240512	
CAPÍTULO 13	122
MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE APOIO À APRENDIZAGEM: UMA EXPERIÊNCIA COM O TEMA REFORMA DA PRAÇA	
Alcides José Trzaskacz	
Ronaldo Jacumazo	
Joyce Jaquelinne Caetano	
Laynara dos Reis Santos Zontini	
DOI 10.22533/at.ed.49119240513	
CAPÍTULO 14	135
MODELAGEM MATEMÁTICA, PENSAMENTO COMPUTACIONAL E SUAS RELAÇÕES	
Pedro Henrique Giraldo de Souza	
Sueli Liberatti Javaroni	
DOI 10.22533/at.ed.49119240514	

CAPÍTULO 15	145
MATEMÁTICA LÚDICA: CONSIDERAÇÕES DOS JOGOS DESENVOLVIDOS PELO GEMAT-UERJ PARA A SALA DE AULA	
Marcello Amadeo Luiza Harab Flávia Streva	
DOI 10.22533/at.ed.49119240515	
CAPÍTULO 16	153
O ENSINO DE ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL: COMO É ABORDADO EM DOCUMENTOS?	
Flávia Luíza de Lira Liliane Maria Teixeira Lima de Carvalho	
DOI 10.22533/at.ed.49119240516	
CAPÍTULO 17	165
O USO DO MATERIAL GEOBASES PARA A FORMAÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Francikelly Gomes Barbosa de Paiva Francileide Leocadio do Nascimento Fabiana Karla Ribeiro Alves Gomes	
DOI 10.22533/at.ed.49119240517	
CAPÍTULO 18	171
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA E CÔNICA COMO APLICAÇÃO DE CONTEÚDOS NA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR	
Rogério dos Reis Gonçalves Vera Lúcia Vieira de Camargo André do Amaral Penteado Biscaro	
DOI 10.22533/at.ed.49119240518	
CAPÍTULO 19	179
UM ESTUDO SOBRE MULTICORREÇÃO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA	
Rafael Filipe Novôa Vaz Lilian Nasser	
DOI 10.22533/at.ed.49119240519	
CAPÍTULO 20	189
JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA	
Angela Cássia Biazutti Lilian Nasser	
DOI 10.22533/at.ed.49119240520	
CAPÍTULO 21	198
JOGOS COOPERATIVOS: UMA EXPERIÊNCIA LÚDICA DE CONVIVER JUNTO NA EDUCAÇÃO INFANTIL	
Ana Brauna Souza Barroso Antônio Villar Marques de Sá	
DOI 10.22533/at.ed.49119240521	

CAPÍTULO 22 206

EFEITO DE HARDWARE E SOFTWARE SOBRE O ERRO DE ARREDONDAMENTO EM CFD

Diego Fernando Moro
Carlos Henrique Marchi

DOI 10.22533/at.ed.49119240522

CAPÍTULO 23 218

O USO DO JOGO CORRIDA DE OBSTÁCULOS PARA O DESENVOLVIMENTO DE IDEIAS MATEMÁTICA EM UM LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA DE UM MUSEU

Leonardo Lira de Brito
Erick Macêdo Carvalho
Silvanio de Andrade

DOI 10.22533/at.ed.49119240523

SOBRE O ORGANIZADOR..... 228

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA E CÔNICA COMO APLICAÇÃO DE CONTEÚDOS NA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR

Rogério dos Reis Gonçalves

rogerio.goncalves@unemat.br

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas -
UNEMAT, Sinop, MT, Brasil

Vera Lúcia Vieira de Camargo

vera.camargo@unemat.br

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas -
UNEMAT, Sinop, MT, Brasil

André do Amaral Penteadó Biscaro

andre.biscaro@unemat.br

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas -
UNEMAT, Sinop, MT, Brasil

RESUMO: Este trabalho visa apresentar uma proposta de abordagem para o ensino da Álgebra Linear (AL) por meio da resolução de problemas como aplicação de conteúdos, ou seja, ensinar determinados conceitos matemáticos para se resolver problemas. Será proposta a resolução de um problema de programação quadrática com restrições quadráticas (PQRQ) para que sejam determinados os modelos equivalentes na sua forma matricial e posteriormente associados com a respectiva notação de norma. Conceitos de norma, operações com matrizes, matriz semidefinida positiva, determinantes, autovalores, autovetores, cálculo da matriz inversa e diagonalização são utilizados para a resolução do problema equivalente determinado. Além disso, do problema equivalente na

forma matricial com notação de norma é possível encontrar também o seu equivalente de programação cônica de segunda ordem (PCSO). Para resolvê-los, optamos em utilizar a linguagem de modelagem matemática AMPL [3], com o uso dos solvers comerciais CPLEX [5] e KNITRO [1]. Esta escolha é importante, pois contribuirá nas diversas discussões que apresentamos no decorrer deste trabalho. Esta proposição se justifica à medida que julgamos fundamental no processo de ensino e aprendizagem que os alunos da graduação vivenciem situações-problema com diferentes métodos de resolução aliado ao uso de recursos computacionais apropriados.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino, Resolução de problemas, Álgebra linear, Programação quadrática, Programação cônica, Linguagem de Modelagem Matemática AMPL.

1 | INTRODUÇÃO

A disciplina de AL está presente na maioria dos currículos dos cursos superiores nas ciências exatas, tendo em vista a vasta quantidade de aplicações de seus conceitos em outras áreas do conhecimento. Diante da importância dessa disciplina encontramos na literatura alguns trabalhos desenvolvidos tratando dos aspectos que envolvem o ensino e

aprendizagem da AL, entre eles, destacamos o trabalho de [4] que investigou em que medida um tratamento geométrico e a articulação entre registros de representação (algébrico, gráfico e geométrico), auxiliado pelo ambiente Cabri-Géomètre, influenciam nas concepções de estudantes e de [2] que pesquisou sobre as contribuições dos vídeos digitais e da metodologia de aula reversa para a conceitualização em AL. Segundo [2] há também outras pesquisas nesta área, dentre elas, o estudo sobre as concepções de estudantes sobre a AL, levantamento de registros do ensino e aprendizagem na década de 90, compreensão de alunos acerca de determinados temas desta área e registros de representação em livros didáticos. Pelo apresentado, não há trabalhos desenvolvidos visando verificar as contribuições para o ensino e aprendizagem desta disciplina ao se utilizar os conceitos da AL em sala de aula para se resolver problemas de otimização. Com o intuito de contribuir com o ensino e aprendizagem desta área é que propomos uma atividade de ensino a ser desenvolvida a partir de problemas de otimização matemática junto com o uso de recursos computacionais.

2 | PROBLEMA MODELO DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA COM RESTRIÇÕES QUADRÁTICAS

Definição 2.1. *Um problema de otimização é chamado de programação quadrática (PQ) se a função objetivo é quadrática e as restrições são funções afins. A PQ pode ser expressa na forma*

$$\min X^T P X + 2q^T X + r \quad (1)$$

s. a.

$$G X \leq h \quad (2)$$

$$A X = b, \quad (3)$$

onde $P \in S_+^n$, $G \in R^{m \times n}$, $A \in R^{p \times n}$ e $X \in R^n$.

Após apresentar a definição de um problema de PQ, o professor deve solicitar aos alunos que verifiquem se os produtos de matrizes estão bem definidos na função objetivo (1) e nas restrições (2) e (3). Além disso, os alunos deverão exibir exemplos de um problema de PQ a fim de familiarizar-se com a notação utilizada. Nessa etapa, é importante verificar se em cada problema a matriz P é semidefinida positiva e discutir sua relevância na PQ.

Definição 2.2. *Um problema de otimização é chamado de PQRQ se for um problema de PQ e as restrições de desigualdades são quadráticas. A programação quadrática com restrições quadráticas pode ser expressa na forma*

$$\min X^T P_0 X + 2q_0^T X + r_0 \quad (4)$$

s. a.

$$X^T P_i X + 2q_i^T X + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$AX = b, \quad (6)$$

onde $P_i \in S_+^n, i = 1, \dots, m.$.

Uma análise análoga ao problema de PQ deve ser feita com o problema de PQRQ. Para trabalhar em sala de aula, propomos o seguinte problema de PQRQ definido nas equações (7)-(9).

$$\min f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 + 6 \quad (7)$$

s. a.

$$4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 36 \quad (8)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (9)$$

O próximo passo que o professor deverá propor aos alunos é o reconhecimento de que o problema (7)-(9) é de PQRQ. Dessa forma, após discussões sobre o modelo acima, os alunos deverão encontrar elementos P_0, q_0, r_0, P_1, q_1 e r_1 e escrever o modelo acima conforme mostrado nas equações (10)-(13).

$$\min X^T P_0 X + 2q_0^T X + r_0 \quad (10)$$

s. a.

$$X^T P_1 X + 2q_1^T X + r_1 \leq 0 \quad (11)$$

$$P_0, P_1 \in S_+^n \quad (12)$$

$$X \geq 0 \quad (13)$$

A saber, $P_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $q_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r_0 = 6$, $P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r_1 = -36$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Utilizando a norma euclidiana usual, o problema (10)-(13) pode ser reescrito por meio das equações (14)-(16).

$$\min \|P_0^{1/2} X + P_0^{-1/2} q_0\|^2 + r_0 - q_0^T P_0^{-1} q_0 \quad (14)$$

s. a.

$$\|P_1^{1/2} X + P_1^{-1/2} q_1\|^2 + r_1 - q_1^T P_1^{-1} q_1 \leq 0 \quad (15)$$

$$X \geq 0 \quad (16)$$

A transposição do problema (10)-(13) para o problema (14)-(16) é relativamente difícil. Desse modo, o professor deve apresentar este e pedir para que os alunos verifiquem sua equivalência com aquele. No entanto, é necessário primeiramente que os alunos determinem $P_0^{1/2}, P_0^{-1/2}, P_0^{-1}, P_1^{1/2}, P_1^{-1/2}, P_1^{-1}$, conforme apresentado nas seções 2.1 e 2.2.

2.1 Cálculo de $P_0^{1/2}, P_0^{-1/2}$ e P_0^{-1}

A notação $P_0^{1/2}$ representa a raiz quadrada de P_0 .

Definição 2.3. Uma matriz B com entradas reais é denominada raiz quadrada real de uma matriz A se $B^2 = A$.

Sabe-se que se uma matriz de ordem n é diagonalizável e todos os seus autovalores são não-negativos, então ela possui uma raiz quadrada. Assim, fica evidente que P_0 admite raiz quadrada, visto que P_0 é simétrica e, portanto, diagonalizável e seus autovalores são não-negativos, pois $P_0 \in S_+^n$. Como P_0 é diagonalizável, existe uma matriz diagonal D , cujas entradas na diagonal são os autovalores de P_0 (neste caso, os autovalores são não-negativos), e uma matriz M cujos vetores coluna (autovetores) formam uma base para P_0 , tais que $P_0 = MDM^{-1}$.

Os conceitos apresentados no parágrafo anterior devem ser lembrados em sala de aula com os alunos. A partir daí o professor deve propor que mostrem porque $M\sqrt{D}M^{-1}$ é raiz quadrada de A . Eles devem notar que $(M\sqrt{D}M^{-1})^2 = (M\sqrt{D}M^{-1})(M\sqrt{D}M^{-1}) = MDM^{-1} = A$.

Após constatar que P_0 possui raiz quadrada, os alunos devem calcular seus autovalores, isto é, determinar as raízes do polinômio característico $p(\lambda) = \det(P_0 - \lambda I_2)$, em que I_2 denota a matriz identidade de ordem 2.

De $P_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, segue que $P_0 - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$. Assim, tem-se $p(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 1$. Logo, $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 3$. Desse modo, os autovalores de P_0 são 1 e 3 e, portanto, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

O próximo passo é determinar uma base para P_0 .

Para $\lambda = 1$ temos, $P_0 X = \lambda X$ se, e somente se, $(P_0 - \lambda I_2)X = 0$ se, e somente se $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, se, e somente se, $x_1 = x_2$. Assim, $(1, 1)$ é um autovetor de P_0 .

Para $\lambda = 3$, temos, $P_0 X = \lambda X$ se, e somente se, $(P_0 - \lambda I_2)X = 0$ se, e somente se, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se, e somente se, $x_1 = -x_2$. Assim, $(1, -1)$ é um autovetor de P_0 .

Portanto, $\{(1, 1), (1, -1)\}$ representa uma base para P_0 formada por autovetores. Logo, M pode ser dada por $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e, conseqüentemente, sua inversa é $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

Como $P_0^{1/2} = M\sqrt{D}M^{-1}$, segue que $P_0^{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ e, portanto, as inversas de $P_0^{1/2}$ e P_0 são dadas por:

$$P_0^{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} & \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

2.2 Cálculo de $P_1^{1/2}$, $P_1^{-1/2}$ e P_1^{-1}

Note que $P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, e uma matriz diagonal definida positiva, logo $P_1^{1/2}$ está bem definida e claramente, tem-se

$$P_1^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$P_1^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

O cálculo das matrizes $P_0^{1/2}$, $P_0^{-1/2}$, P_0^{-1} , $P_1^{1/2}$, $P_1^{-1/2}$, P_1^{-1} muito importante, pois contempla aplicações de vários temas estudados na disciplina de AL.

3 | PROBLEMA EQUIVALENTE DE PROGRAMAÇÃO CÔNICA DE SEGUNDA ORDEM

Definição 3.1. Um problema de otimização é chamado de programação cônica de segunda ordem (PCSO) se ele pode ser expresso na forma

$$\min c^T X \tag{17}$$

s. a.

$$\|A_i X + b_i\| \leq c_i^T X + d_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{18}$$

$$AX = b \tag{19}$$

onde $c \in R^n$, $A_i \in R^{n_i \times n}$, $b_i \in R^{n_i}$ e $A \in R^{p \times n}$.

A representação do problema proposto de PQRQ por meio das equações (14)-(16) é interessante, pois a partir dele, obtém-se o equivalente problema de PCSO representado pelas equações (20)-(23).

$$\min t \tag{20}$$

$$\text{s. a.} \tag{21}$$

$$\|P_0^{1/2} X + P_0^{-1/2} q_0\| \leq t \tag{22}$$

$$\|P_1^{1/2} X + P_1^{-1/2} q_1\| \leq (q_1^T P_1^{-1} q_1 - r_1)^{1/2} \tag{22}$$

$$X \geq 0 \tag{23}$$

Vale ressaltar que para obter o modelo cônico, foi necessário adicionar a variável t . Esta estratégia transforma o problema bidimensional de PQRQ em um equivalente cônico tridimensional. Conforme definição 3.1, tem-se que (20)-(23) é um problema de PCSO. O professor deve propor aos alunos para que determinem no último modelo os parâmetros c , A_i , b_i e A , apresentados na definição 3.1.

O valor ótimo do problema de PQRQ é dado por $p^{*2} + r_0 - q_0^T P_0^{-1} q_0$, em que p^* é o valor ótimo do problema de PCSO. Isto pode ser verificado facilmente comparando os modelos (14)-(16) e (20)-(23).

O próximo passo proposto aos alunos é a representação, na forma explícita, do modelo (20)-(23). Os alunos deverão encontrar o modelo representado pelas equações (24)-(27).

$$\min t \tag{24}$$

$$s. a. \tag{25}$$

$$\sqrt{2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 + 6} \leq t$$

$$4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 36 \tag{26}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \tag{27}$$

Muitas análises interessantes podem ser feitas a partir do modelo acima, e algumas serão discutidas na Seção 4.

4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste trabalho os modelos propostos foram implementados na linguagem de modelagem matemática AMPL [3] e resolvidos usando os solvers comerciais CPLEX [5] e KNITRO [1]. É importante ressaltar que o primeiro solver foi desenvolvido para resolver problemas de programação linear, enquanto o segundo, problemas de programação não linear.

Vimos que os modelos matemáticos (14)-(16) e (20)-(23) são equivalentes aos modelos (7)-(9) e (24)-(27), respectivamente. Visto que a implementação no AMPL é próxima da linguagem matemática usual, foram implementados estes dois últimos a fim de obter os resultados.

A solução do problema (7)-(9) é dada por $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, portanto, o valor da função objetivo é igual a 15. Ambos os solvers encontraram esta solução. Note que o problema proposto é um problema de programação não linear, pois a função objetivo (7) e/ou a restrição (8) são não lineares. No entanto, são quadráticas e estão associadas a matrizes hessianas semidefinidas positivas. O CPLEX também resolve este tipo de problema.

Em se tratando do problema (24)-(27), o CPLEX acusou restrição não linear

não quadrática, devido à restrição (25) e essa é uma condição suficiente para não resolubilidade do modelo. Por outro lado, este foi resolvido com o uso do KNITRO e a solução encontrada foi igual ao do seu equivalente de PQRQ (a menos de erros de aproximações). Neste caso, o valor da função objetivo está em função da nova variável t adicionada no problema original. O valor encontrado para essa variável foi igual a 2,44949. Após determinar este valor, o professor deverá propor ao aluno a encontrar o valor da função objetivo. O aluno deverá perceber que para isso, basta verificar o “papel” da expressão $p^{*2} + r_0 - q_0^T P_0^{-1} q_0$.

Outra discussão muito interessante em sala de aula é propor aos alunos se é possível utilizar o CPLEX para resolver o modelo de PCSO. O aparecimento da raiz quadrada na Equação (25) é determinante para limitar seu uso, mas o que acontece se elevarmos ao quadrado tal equação? Claramente teremos uma restrição quadrática não linear. Nesse momento, gera-se uma falsa expectativa de que com estes ajustes o problema seja contornado, o que não ocorrerá, visto que a hessiana associada possui autovalor negativo e, portanto, não é semidefinida positiva. Essa discussão também é essencial para que o aluno tenha uma maior compreensão sobre a hessiana e perceba sua importância.

5 | CONCLUSÕES

O estudo de problemas de PQRQ é muito importante, pois nele o aluno vivencia situações em que, para se resolver este tipo de problema, é necessário lançar mão de vários conceitos da disciplina de AL, tais como, norma de um vetor, multiplicação e cálculo da inversa de matrizes, determinantes, autovalores, autovetores, matriz simétrica, matriz definida positiva (e não negativa), diagonalização, dentre outros. Acreditamos que este tipo de atividade pode se revelar bastante promissora para favorecer a aprendizagem dos alunos e desenvolver atitudes favoráveis frente a Matemática ao perceber as possíveis conexões entre diferentes ramos da matemática e outras áreas do conhecimento.

Outras discussões a partir dessa proposta podem ser adicionadas pelo professor. Este trabalho foi escrito para auxiliá-los na disciplina de AL e, assim, espera-se que a aprendizagem e o ensino ocorram de modo interativos.

REFERÊNCIAS

- [1] R. H. Byrd, J. Nocedal and R. A. Waltz, KNITRO: an integrad package for nonlinear optimization. Large-Scale Nonlinear Optimization. New York: Springer, Nonconvex Optimization and its Applications, volume 83, chapter 8, pages 35-59, 2006.
- [2] V. C. Cardoso, Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear: Uma Discussão Acerca de Aulas Tradicionais, Reversas e de Vídeos Digitais, Tese de Doutorado, Unicamp, 2014.
- [3] R. Fourer, D. M. Gay and B. W. Kernighan. A modeling language for mathematical programmin.

Pacific Grove: Brooks/Cole-Thomson Learning, 2003.

[4] M. V. D. França, Conceitos Fundamentais de Álgebra Linear: Uma Abordagem Integrando Geometria Dinâmica, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

[5] ILOG. CPLEX Optimization subroutine library guide and reference, version 11.0. Incline Village: ILOG, 2008.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-349-1

