

# EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)

 **Atena**  
Editora

Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)

# Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2019 Os Autores  
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora  
Editora Executiva: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira  
Diagramação: Natália Sandrini  
Edição de Arte: Lorena Prestes  
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

## Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

## Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

## Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
E24	Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2)  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-348-4 DOI 10.22533/at.ed.484192405  1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.  CDD 510.7
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
O ALGORITMO ESPECTRAL COMO ALTERNATIVA AO ALGORITMO K-MEANS EM CONJUNTO DE DADOS ARTIFICIAIS	
Luciano Garim Garcia Leonardo Ramos Emmendorfer	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924051</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>16</b>
NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza Hélio Magalhães De Oliveira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924052</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>24</b>
ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924053</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>32</b>
ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA	
Amanda Barretos Lima Garuth Brenda Anselmo Mendes Isabela Geraldo Reghin Rosângela Teixeira Guedes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924054</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>46</b>
DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	
Mariana Coelho Portilho Bernardi Adilandri Mércio Lobeiro Jeferson Rafael Bueno Thiago José Sepulveda da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924055</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>57</b>
MODELO MATEMÁTICO PARA AUXILIAR O PLANEJAMENTO DA MANUTENÇÃO PREVENTIVA DE MOTORES ELÉTRICOS	
Thalita Monteiro Obal Jonatas Santana Obal	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924056</b>	

<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>64</b>
PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE FLUXO EM AQUÍFERO CONFINADO	
<a href="#">João Paulo Martins dos Santos</a> <a href="#">Alessandro Firmiano de Jesus</a> <a href="#">Edson Wendland</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924057</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>83</b>
RESONANT ORBITAL DYNAMICS OF CBERS SATELLITES	
<a href="#">Jarbas Cordeiro Sampaio</a> <a href="#">Rodolpho Vilhena de Moraes</a> <a href="#">Sandro da Silva Fernandes</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924058</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>91</b>
TESTES ADAPTATIVOS ENVOLVENDO O CONTEÚDO DE DERIVADAS: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL	
<a href="#">Patrícia Liane Grudzinski da Silva</a> <a href="#">Claudia Lisete Oliveira Groenwald</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924059</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>104</b>
LOCALIZAÇÃO DE FALTAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO POR ANÁLISE DE SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO	
<a href="#">Danilo Pinto Moreira de Souza</a> <a href="#">Eliane da Silva Christo</a> <a href="#">Aryfrance Rocha Almeida</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240510</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>116</b>
MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA	
<a href="#">Gustavo Henrique Petrolí</a> <a href="#">Norberto Anibal Maidana</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240511</b>	
<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>133</b>
LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO	
<a href="#">Claudio Fuentealba</a> <a href="#">Edelmira Badillo</a> <a href="#">Gloria Sánchez-Matamoros</a> <a href="#">Andrea Cárcamo</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240512</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>143</b>
OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
<a href="#">Márcio Aurélio da Silva</a> <a href="#">Fran Sérgio Lobato</a> <a href="#">Aldemir Ap Cavalini Jr</a> <a href="#">Valder Steffen Jr</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240513</b>	

<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>156</b>
SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY	
Gino Gustavo Maqui Huamán	
Ulcilea Alves Severino Leal	
Geraldo Nunes Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240514</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>164</b>
VALIDAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA O ESCOAMENTO DE GRÃOS DE SOJA	
Rodolfo França de Lima	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Dirceu Lima dos Santos	
Adriano Pilla Zeilmann	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240515</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>181</b>
TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA	
Landy Sosa Moguel	
Guadalupe Cabañas-Sánchez	
Eddie Aparicio Landa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240516</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>192</b>
SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE	
Francisco Helmuth Soares Dias	
Jacques Aveline Loureiro da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240517</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>199</b>
SIMULAÇÃO 3D DO FLUXO DE AR DE UM SISTEMA REAL DE ARMAZENAGEM DE GRÃOS	
Vanessa Faoro	
Rodolfo França de Lima	
Aline Tampke Dombrowski	
Manuel Osório Binelo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240518</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>207</b>
CONTROLE ÓTIMO DO FLUXO DE ÁGUA EM UMA FÔRMA DE GELO	
Xie Jiayu	
João Luis Gonçalves	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240519</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>213</b>
CÓDIGOS CÍCLICOS DEFINIDOS POR ANULAMENTO	
Conrado Jensen Teixeira	
Osnel Broche Cristo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240520</b>	

<b>CAPÍTULO 21</b> .....	<b>216</b>
ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA	
Bruno Carlos Lugão	
Diego Campos Knupp	
Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues	
Antônio José da Silva Neto	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240521</b>	
<b>CAPÍTULO 22</b> .....	<b>225</b>
ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	
Ronaldo Mendes Evaristo	
Kelly Cristiane Iarosz	
Silvio Luiz Thomaz de Souza	
Ricardo Luiz Viana	
Moacir Fernandes de Godoy	
Antonio Marcos Batista	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240522</b>	
<b>CAPÍTULO 23</b> .....	<b>235</b>
CONSTRUÇÃO DE UM AEROMODELO DE MACARRÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA	
Alissan Sarturato Firão	
Ernandes Rocha de Oliveira	
Zulind Luzmarina Freitas	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240523</b>	
<b>SOBRE O ORGANIZADOR</b> .....	<b>239</b>

## MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA

**Gustavo Henrique Petrolí**

Universidade Federal do Mato Grosso,  
Departamento de Matemática  
Cuiabá – MT

**Norberto Anibal Maidana**

Universidade Federal do ABC, Centro de  
Matemática, Computação e Cognição.  
Santo André – SP

**RESUMO:** A cada ano agrícola, a população de mosca-branca (*Bemisia tabaci* biótipo B) vem aumentando consideravelmente. O manejo de *B. tabaci* biótipo B tem se tornado um grande desafio, pois a sua dispersão entre as culturas, seu alto potencial reprodutivo, o hábito polífago, a resistência aos inseticidas, viver na superfície abaxial das folhas e o seu comportamento de se alimentar constantemente contribuem para a complexidade e a dificuldade de seu controle. Este trabalho propõe um modelo matemático não linear para descrever a dinâmica da *Bemisia tabaci* na evolução de seus estádios, junto a incidência da propagação dos danos indiretos que o mesmo causa em uma plantação, a fim de avaliar estratégias de combate efetivo contra a praga.

**PALAVRAS-CHAVE:** Mosca-branca, Fumagina, Dinâmica de Populações, Modelagem Matemática.

**ABSTRACT:** In every agricultural year, the whitefly population (*Bemisia tabaci* biotype B) has increased considerably. The management of *B. tabaci* biotype B has become a major challenge because its dispersion among crops, its high reproductive potential, polyphagous habit, resistance to insecticides, to live on the abaxial surface of leaves and their eating behavior constantly contribute to the complexity and difficulty of their control. This work proposes a nonlinear mathematical model to describe the dynamics of *Bemisia tabaci* in the evolution of its stages, together with the incidence of the propagation of the indirect damages that cause the same in a plantation, in order to evaluate strategies of effective combat against the pest.

**KEYWORDS:** Whitefly, Sooty mold, Population Dynamics, Mathematical modeling.

### 1 | INTRODUÇÃO

A Mosca-branca (*Bemisia tabaci*) é uma das pragas mais conhecidas no mundo e está em praticamente todas as regiões agrícolas, principalmente em áreas de clima tropical e subtropical (STANSLY, et.al.,2010).

No Brasil, até o final da década de 60, vários vírus transmitidos pela mosca-branca já tinham sido determinados, mas todos considerados como causadores de doenças

secundárias, sem importância econômica, em razão com que ocorriam nas culturas (COSTA, 1975).

Mas em meados dos anos 90, mais precisamente no estado de São Paulo, foi constatado um elevadíssimo surto de *Bemisia tabaci* de biótipo B, também conhecido como *Bemisia argentifolli*, proveniente de plantas ornamentais importadas da Europa e dos Estados Unidos.

Após sua introdução no Brasil, *B. tabaci* biótipo B deslocou as populações de *B. tabaci* que aqui existiam (biótipo A), predominando atualmente nas áreas agrícolas do país. O biótipo A não era considerado importante como praga, apenas como vetor de vírus. Já o biótipo B, além de atuar como vetor de vírus, também é considerado uma praga pelos seus danos indiretos.

## 2 | BEMISIA TABACI BIÓTIPO B

### 2.1 Aspectos taxonômicos, biológicos e morfológicos

As Moscas-brancas pertencem à ordem Homóptera, subordem *Sternorrhyncha*, família *Aleyrodidae* e subfamília *Aleyrodinea*, (BÔAS, et. al., 2009). Dentre os biótipos conhecidos, o B é considerado um dos mais nocivos, por possuir ampla gama de hospedeiros e alta fecundidade (VIVAN, et.al.,2007).

São insetos pequenos, sendo a fêmea maior que o macho. Ambos possuem o dorso amarelo-pálido e as asas brancas (BÔAS, et.al., 1997), conforme vemos na figura 1.



Figura 1: Adulto de *Bemisia tabaci* biótipo B, medindo de 1 a 2 mm de comprimento e 0,36 a 0,51 mm de largura. Fonte: (STANSLY, et.al., 2010)

São sugadores de seiva, como os demais membros da subordem *Sternorrhyncha*, com aparelho digestivo diferenciado em “câmara-filtro”, que permite que o excesso de alimento sugado seja excretado como *honeydew*, uma espécie de melado (SOTORRIVA, 2010).

Os principais fatores que afetam o desenvolvimento do inseto são a planta hospedeira e a temperatura. As fêmeas ovipositam preferencialmente na face inferior

das folhas jovens e, após a eclosão, as ninfas se locomovem pela folha até um local adequado para sua fixação, durante um período que pode variar de uma até várias horas (BÔAS, et.al., 1997). Após inserirem seu aparelho bucal e atingirem o floema da planta, permanecem sésseis até a emergência dos adultos (SOTORRIVA, 2010).

Em relação a reprodução, uma fêmea pode colocar cerca de trinta a quatrocentos ovos durante seu ciclo de vida (BYRNE, 1991), sendo que a taxa de oviposição depende da temperatura e da planta hospedeira. Quando ocorre escassez de alimento, as fêmeas interrompem a postura.

As moscas-brancas apresentam metamorfose incompleta, ou seja, não precisam jejuar durante um longo período para evoluir, passando pelas fases de ovo, quatro estádios ninfaís, sendo o último também chamado de “pupa” ou pseudo-pupa, e adulto, conforme vemos na figura 2. No qual, o adulto é o único capaz de migrar até novas plantas.

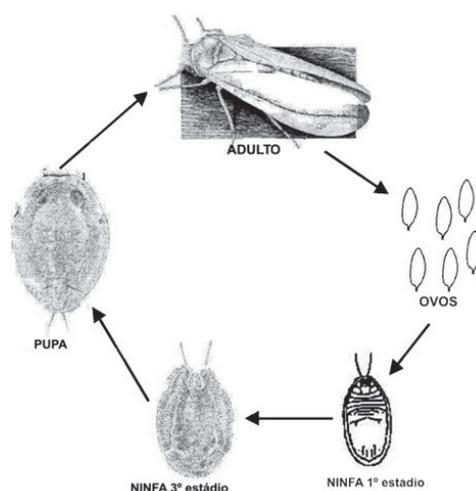


Figura 2: Ciclo biológico (adulto, ovo, ninfas e “pupa”) da mosca-branca *Bemisia tabaci* biótipo B. Fonte: (BÔAS, et.al., 2009).

## 2.2 Danos causados aos hospedeiros

A mosca-branca apresenta um grande número de plantas hospedeiras de interesse econômico, tais como hortaliças e também em plantas ornamentais (BÔAS, et. al., 1997). Destacam-se também várias espécies de plantas daninhas, o que significa que, na entressafra, esses insetos sobrevivem muitas vezes em alta população nas áreas de cultivo. Desta forma, não há interrupção no ciclo de vida da praga e, em um próximo cultivo, a pressão de mosca-branca sobre as plantas pode ser ainda maior que no cultivo anterior (VIVAN, et.al., 2007).

Por ser uma espécie de homóptera, ao sugar a seiva das plantas, os insetos nos estádios de ninfa e adulto podem causar injúrias como murchamento das plantas, amadurecimento irregular dos frutos e até a morte. Em adição, diversos fungos, coletivamente chamados de fumagina (*Capnodium ssp. Capnodiaceae*), devido à sua aparência negra, podem crescer sobre o *honeydew* (melado) excretado pelas moscas-

brancas, que é rico em açúcares que servem de substrato para o desenvolvimento desses fungos (VIVAN, et.al., 2007).

A fumagina pode impedir a luz solar de alcançar a superfície foliar, reduzindo a fotossíntese, além de prejudicar os frutos, quando incidir sobre eles, tornando-os não-comercializáveis (ISLAM, et.al., 2008). As perdas pela sucção da seiva e fumagina podem chegar de 50% a 100% da produção, quando ocorrerem altas infestações (BÔAS, et.al., 1997).

### 3 I MODELANDO A PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA

Diante de todo levantamento biológico realizado a partir da problemática envolvendo os estádios e a incidência da propagação de Fumagina em uma plantação, consideram-se no modelo os seguintes fatos:

- Para os insetos no estágio de Ovo, a dinâmica vital é dada por uma função logística;
- Na ausência de plantação, a sobrevivência da *B. tabaci* fica sustentada através das plantas daninhas que estão na região;
- A população de plantas suscetíveis possui um valor inicial que decrescerá no decorrer do tempo, assume-se no processo que elas serão colhidas ao término da safra ou sofrerão extinção em virtude ao dano causado pela mosca-branca;
- Uma planta suscetível se torna infectada no momento em que uma ninfa ou mosca adulta se alimenta da mesma e excreta *honeydew*, causando fumagina;
- Plantas infectadas não conseguem se recuperar dos danos causados pela fumagina.

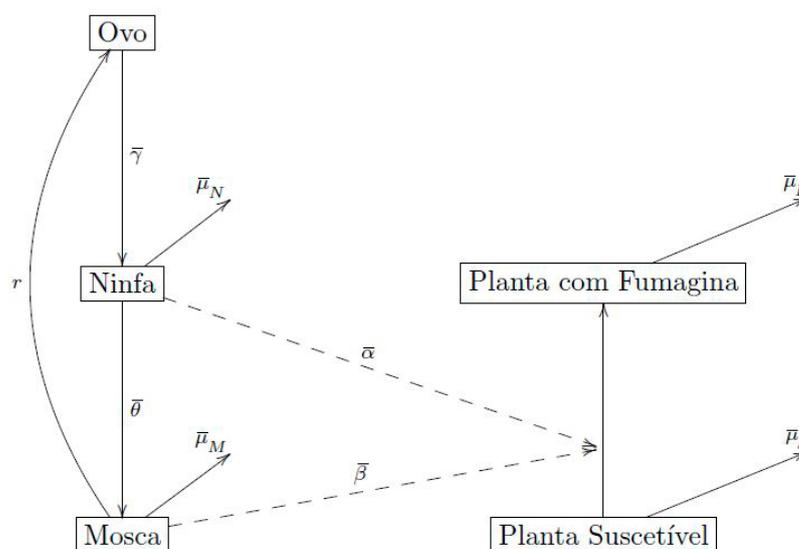


Figura 3: Diagrama da dinâmica da Fumagina.

Baseado nas hipóteses acima, o modelo é descrito como:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{O}}{d\bar{t}} = r\bar{M} \left( 1 - \frac{\bar{O}}{\epsilon k + \bar{a}\bar{S}} \right) - \bar{\gamma}\bar{O}, \\ \frac{d\bar{N}}{d\bar{t}} = \bar{\gamma}\bar{O} - \bar{\theta}\bar{N} - \bar{\mu}_N\bar{N}, \\ \frac{d\bar{M}}{d\bar{t}} = \bar{\theta}\bar{N} - \bar{\mu}_M\bar{M}, \\ \frac{d\bar{S}}{d\bar{t}} = -\bar{\alpha}\bar{N}\bar{S} - \bar{\beta}\bar{M}\bar{S} - \bar{\mu}_S\bar{S}, \\ \frac{d\bar{F}}{d\bar{t}} = \bar{\alpha}\bar{N}\bar{S} + \bar{\beta}\bar{M}\bar{S} - \bar{\mu}_F\bar{F}, \end{cases} \quad (3.1)$$

no qual as variáveis ,  $\bar{O}$ ,  $\bar{N}$  e  $\bar{M}$  correspondem a população total da *B.tabaci* nos estádios de Ovo, Ninfa e Mosca adulta, respectivamente.  $\bar{S}$  é a população de Planta Suscetível e  $\bar{F}$  refere-se a população de Planta com fumagina. O parâmetro  $r$  significa a oviposição per capita realizada pela Mosca adulta. O crescimento é dado por uma função logística, onde a oviposição é proporcional à quantidade de Moscas ( $r\bar{M}$ ) e é considerada uma saturação dada pela capacidade de suporte ( $\epsilon k + \bar{a}\bar{S}$ ), sendo  $k$  as plantas daninhas que fazem com que o inseto sobreviva na entressafra, a quantidade de ovos por planta daninha e  $\bar{a}$  a quantidade de ovos por Planta Suscetível.

Assim, consideramos então  $d = \epsilon k$ , número total de ovos viáveis na população de plantas daninhas. A taxa de eclosão do Ovo é dada por  $\bar{\gamma}$  e  $\bar{\delta}$  denota a taxa de evolução da Ninfa. Os parâmetros  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  são as taxas de contaminação da Planta suscetível pela fumagina gerada através do *honeydew* da Ninfa e da Mosca adulta, respectivamente. E por fim, a taxa de mortalidade da Ninfa é denotada por  $\bar{\mu}_N$ , da Mosca adulta por  $\bar{\mu}_M$ , da Planta suscetível por  $\bar{\mu}_S$  e da Planta com fumagina por  $\bar{\mu}_F$ .

### 3.1 Adimensionalização

Para se ter uma compreensão do comportamento previsto pelo modelo do sistema (3.1). Em primeiro lugar, consideramos o caso de um ambiente uniforme em que todos os parâmetros são constantes. Estamos interessados na dinâmica da população de plantas quando algumas moscas-branca são introduzidas em uma população livre de fumagina inicialmente estável.

No modelo, é instrutivo para introduzir quantidades não-dimensionais, escrever:

$$O = \frac{\bar{O}}{d}; N = \frac{\bar{N}}{d}; M = \frac{\bar{M}}{d}; S = \frac{\bar{S}}{S_0}; F = \frac{\bar{F}}{S_0}; t = \bar{t}r \quad (3.2)$$

Como consequência, temos os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\bar{\gamma}}{r}; & \theta &= \frac{\bar{\theta}}{r}; & a &= \frac{\bar{a}S_0}{d}; & \alpha &= \frac{\bar{\alpha}d}{r}; & \beta &= \frac{\bar{\beta}d}{r}; \\ \mu_N &= \frac{\bar{\mu}_N}{r}; & \mu_M &= \frac{\bar{\mu}_M}{r}; & \mu_S &= \frac{\bar{\mu}_S}{r}; & \mu_F &= \frac{\bar{\mu}_F}{r}. \end{aligned}$$

Isto nos permite determinar os agrupamentos de parâmetros efetivos no sistema, e obter uma compreensão qualitativa do sistema em termos dos mesmos.

Fazendo as devidas substituições de (3.2) no modelo (3.1), obtemos o modelo adimensionalizado:

$$\begin{cases} \frac{dO}{dt} = M \left( 1 - \frac{O}{1 + \alpha S} \right) - \gamma O, \\ \frac{dN}{dt} = \gamma O - \theta N - \mu_N N, \\ \frac{dM}{dt} = \theta N - \mu_M N, \\ \frac{dS}{dt} = -\alpha NS - \beta MS - \mu_S S, \\ \frac{dF}{dt} = \alpha NS + \beta MS - \mu_F F. \end{cases} \quad (3.3)$$

### 3.2 Pontos de equilíbrio e número de descendentes basal

Para o sistema (3.3), temos dois pontos de equilíbrio:

- $P_1 = (0,0,0,0,0)$  é o ponto de equilíbrio trivial;
- $P_2 = (O^*, N^*, M^*, S^*, F^*) = \left( 1 - \frac{1}{Q_0}, \frac{\gamma}{(\theta + \mu_N)} \left( 1 - \frac{1}{Q_0} \right), \gamma(Q_0 - 1), 0, 0 \right)$ ;

Para o ponto de equilíbrio  $P_2$  encontrado ser positivo, precisamos que:

$$Q_0 = \frac{\theta}{\mu_M(\theta + \mu_N)} > 1, \quad (3.4)$$

onde  $Q_0$  é dito *Número Básico de Descendentes* ou *Número de Descendentes Basal* em macroparasitas.

O Número de Descendentes Basal é um parâmetro adimensional simbolicamente representado por  $Q_0$  e é definido como sendo o número médio de descendentes que gera um parasita adulto ao atingir a idade reprodutiva. A reprodutibilidade basal é determinada por fatores biológicos inerentes ao agente e fatores do meio que intermedeiam a probabilidade de contatos efetivos.

Tal valor é considerado um limiar para garantir a existência dos pontos de equilíbrio e estabilidade do sistema.

Partindo da condição para que o ponto de equilíbrio não trivial seja biologicamente viável, reescrevendo (3.4) com os parâmetros originais, temos:

$$Q_0 = \frac{\bar{\theta}}{(\bar{\theta} + \bar{\mu}_N)} \times \frac{r}{\bar{\mu}_M} = \left[ \frac{1}{\frac{\bar{\mu}_M}{r}} \right] \times \left[ \frac{1}{\frac{(\bar{\theta} + \bar{\mu}_N)}{\bar{\theta}}} \right]. \quad (3.5)$$

Dessa forma podemos encontrar uma relação biológica entre os parâmetros envolvidos.

Entende-se por  $\frac{1}{\bar{\theta}}$  como tempo médio de vida de ninfa e  $\frac{1}{\bar{\theta} + \bar{\mu}_N}$  como a sobrevivência no estágio de ninfa, então  $\frac{\bar{\theta}}{(\bar{\theta} + \bar{\mu}_N)}$  representa a probabilidade de uma ninfa sobreviver e se tornar uma mosca adulta, que por sua vez sobrevivem por um período  $\frac{1}{\bar{\mu}_M}$  e geram em média  $\frac{r}{\bar{\mu}_M}$  ovos viáveis durante sua vida adulta. Com isso o limiar de infestação de mosca ocorre quando uma fêmea gera em média uma outra fêmea ( $Q_0 = 1$ ).

### 3.3 Análise de estabilidade de local

A estabilidade local dos pontos de equilíbrio é determinada através do estudo dos sinais da parte real dos autovalores da matriz jacobiana do sistema (3.3), calculada em cada ponto de equilíbrio. Considerando as equações do sistema (3.3), como sendo:

$$\begin{aligned} f_1(O, N, M, S, F) &= M \left( 1 - \frac{O}{1 + aS} \right) - \gamma O, \\ f_2(O, N, M, S, F) &= \gamma O - \theta N - \mu_N N, \\ f_3(O, N, M, S, F) &= \theta N - \mu_M M, \\ f_4(O, N, M, S, F) &= -\alpha NS - \beta MS - \mu_S S, \\ f_5(O, N, M, S, F) &= \alpha NS + \beta MS - \mu_F F. \end{aligned}$$

Onde a matriz jacobiana é dada por:

$$J(O, N, M, S, F) = \begin{bmatrix} -\frac{m}{(1+aS)} - \gamma & 0 & 1 - \frac{O}{1+aS} & \frac{aMO}{(1+aS)^2} & 0 \\ \gamma & -\theta - \mu_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & -\mu_M & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha S & -\beta S & -\alpha N - \beta M - \mu_S & 0 \\ 0 & \alpha S & \beta S & \alpha N + \beta M & -\mu_F \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

#### 3.3.1 Estabilidades de equilíbrio trivial e não-trivial

A estabilidade dos pontos de equilíbrio será determinada pelas raízes da equação característica da matriz jacobiana (3.6), calculada em P1 E P2. Foram gerados os seguintes teoremas:

**Teorema 1.** O ponto de equilíbrio trivial,  $P1 = (0,0,0,0,0)$  do sistema (3.3) é localmente assintoticamente estável se  $Q_0 < 1$ . E, instável se  $Q_0 > 1$ .

**Teorema 2.** Se  $Q_0 > 1$  o ponto de equilíbrio não trivial,  $P2 = (0^*, N^*, M^*, S^*, F^*)$  do sistema (3.3) existe e é localmente assintoticamente estável.

Dos quais por possuírem grande similaridade no processo de demonstração entre eles, optamos aqui por demonstrar o Teorema 1.

Demonstração (Teorema 1). Seja  $J(0,0,0,0,0)$ , a matriz jacobiana dada por:

$$J(0,0,0,0,0) = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma & -\theta - \mu_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & -\mu_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_F \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

A equação característica da matriz (3.7) é:

$$P(\lambda) = (\mu_F + \lambda)(\mu_S + \lambda)(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0$$

Onde,

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma + \theta + \mu_N + \mu_M, \\ a_2 &= \gamma\theta + \gamma\mu_N + \gamma\mu_M + \mu_N\mu_M, \\ a_3 &= \gamma\theta\mu_M + \gamma\mu_N\mu_M - \gamma\theta. \end{aligned}$$

Inicialmente temos que  $\lambda_1 = -\mu_F < 0$  e  $\lambda_2 = -\mu_S < 0$ .

Agora, utilizando o critério de Routh-Hurwitz na verificação da estabilidade do ponto, para que todas as raízes do termo  $(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0$  da equação tenham  $\text{Re}\lambda < 0$ , temos as seguintes condições necessárias e suficientes:

- (i)  $a_1 > 0$ ;
- (ii)  $a_3 > 0$ ;
- (iii)  $a_1a_2 - a_3 > 0$ .

Atente-se que a condição (i)  $a_1 = \gamma + \theta + \mu_N + \mu_M > 0$  é satisfeita.

Para a condição (ii) ser satisfeita temos que,

$$\gamma\theta\mu_M + \gamma\mu_N\mu_M - \gamma\theta > 0.$$

O que implica que:

$$\frac{\theta}{\mu_M(\theta + \mu_N)} < 1,$$

Ou seja,  $Q_0 < 1$

Agora, para que a condição (iii) se faça satisfeita, vamos analisar  $a_1a_2 - a_3$ :

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_3 &= (\gamma + \theta + \mu_N + \mu_M)(\gamma\theta + \gamma\mu_N + \gamma\mu_M + \mu_N\mu_M) - (\gamma\theta\mu_M + \gamma\mu_N\mu_M \\ &\quad - \gamma\theta) \end{aligned}$$

No qual, ao realizarmos algumas mudanças algébricas, temos:

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_3 &= \gamma(\gamma\theta + \gamma\mu_N + \gamma\mu_M + \mu_N\mu_M) + \mu_N(\gamma\theta + \gamma\mu_N + \theta\mu_M + \mu_N\mu_M) \\ &\quad + (\theta + \mu_M)(\gamma\theta + \gamma\mu_N + \gamma\mu_M + \theta\mu_M + \mu_N\mu_M) + \gamma\theta > 0. \end{aligned}$$

Assim, segue que  $a_1a_2 - a_3 > 0$ . Portanto, se  $Q_0 < 1$  temos, pelo critério de Routh-Hurwitz, que a equação (3.3) tem todas as raízes com parte real negativa, e portanto, o ponto de equilíbrio trivial será localmente assintoticamente estável. Contudo, se  $Q_0 > 1$ , temos na condição (ii) que  $a_3 < 0$ . Devido tal fato, quando  $\lambda = 0$ , obtemos na equação característica que  $P(0) = a_3 < 0$ , ou seja, o polinômio de quinto grau corta a parte negativa do eixo das ordenadas. Como  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P(\lambda) = +\infty$ , nos asseguramos que ele corta pelo menos uma vez o eixo das abscissas com um valor  $\lambda = k$ , onde  $k > 0$ , conseqüentemente  $k$  será uma raiz de  $P(\lambda)$ . Logo, a matriz jacobiana do sistema (3.3)

tem ao menos um autovalor positivo, fazendo assim, com que o ponto de equilíbrio trivial seja instável.

#### 4 | ANÁLISES NUMÉRICAS

Na metodologia usada para as simulações, considerou-se a temperatura constante, em aproximadamente 25°C, usando uma cultura de soja (*Glycine max (L.) Merrill*), cultivar Msoy 8001, como planta hospedeira.

Nos cenários com plantação, assumiu-se uma área de um hectare, para a população inicial de plantas no modelo, segundo dados fornecidos pela Embrapa (Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária), temos como população padrão de soja aproximadamente, 320 mil plantas por hectare.

A duração média de uma safra é de aproximadamente 125 dias, onde as simulações da interação entre *B. tabaci* biótipo B e cultura de soja ocorrem após o 10º dia do início do plantio, referentes ao tempo médio para a planta entrar em estágio emergencial.

O propósito das simulações apresentadas nesta seção é observar o que acontece com as trajetórias do modelo formulado, afim de facilitar sua compreensão, avaliar estratégias de combate efetivo contra a praga e manifestar o interesse do problema a pesquisadores de várias áreas do conhecimento.

A tabela 1 a seguir contempla os valores para os parâmetros utilizados na modelagem do problema:

Parâmetros	Interpretação biológica	Valor
$r$	oviposição per capita realizada pela Mosca adulta	4,4379 dias <sup>-1</sup>
$k$	plantas daninhas que fazem com que o inseto sobreviva na entressafra	40
$\epsilon$	quantidade de ovos por planta daninha	10
$\bar{a}$	quantidade de ovos por Planta Suscetível	50
$\bar{\gamma}$	taxa de eclosão do Ovo	0,1190 dias <sup>-1</sup>
$\bar{\theta}$	taxa de evolução da ninfa	0,786 dias <sup>-1</sup>
$\bar{\alpha}$	taxa de contaminação da Planta Suscetível pela Fumagina gerada através do Honeydew da Ninfa	0,00028
$\bar{\beta}$	taxa de contaminação da Planta Suscetível pela Fumagina gerada através do Honeydew da Mosca adulta	0,00028
$\bar{\mu}_N$	taxa de mortalidade da Ninfa	0,0476 dias <sup>-1</sup>
$\bar{\mu}_M$	taxa de mortalidade da Mosca adulta	0,0296 dias <sup>-1</sup>
$\bar{\mu}_S$	taxa de mortalidade da Planta Suscetível	0,0078 dias <sup>-1</sup>
$\bar{\mu}_F$	taxa de mortalidade da Planta com Fumagina	0,0061 dias <sup>-1</sup>

Tabela 1: Descrição dos parâmetros do modelo e interpretação biológica.

Agora, considerando o modelo (3.3) para a propagação de Fumagina com base nos valores da tabela 1, temos que o Número de Descendentes Basal fornecido é  $Q_0 \approx 141,37$ .

Para o entendimento inicial da estrutura do controle de *B. tabaci* biótipo B, foram considerados os seguintes cenários:

- Cenário 1:

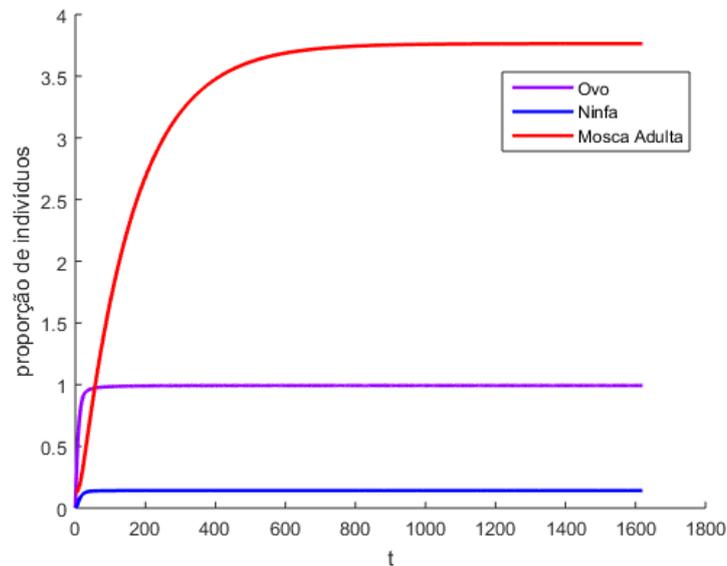


Figura 4: Simulação da dinâmica populacional de *B. tabaci* biótipo B ao longo de um ano, na ausência de cultura agrícola, considerando  $k = 40$ .

A figura 4 mostra a simulação da dinâmica populacional de *B. tabaci* biótipo B, ao longo de um ano, na ausência de culturas agrícola e estratégias de controle. Para a condição inicial do sistema, considerou-se 50 moscas adultas distribuídas homogeneamente em um hectare, com 40 plantas daninhas, sendo considerado um campo limpo.

Pode-se observar que as moscas adultas de *B. tabaci* biótipo B atingem a estabilidade populacional no tempo  $t = 887,58$  que correspondem, em unidades dimensionais, à 200 dias. Sua população alcança 376,38% da capacidade máxima no estágio de ovo, no qual, voltando em unidades dimensionais, refletem à aproximadamente 1500 indivíduos adultos. Já a população de ovos e ninfas, tornam-se estáveis no tempo aproximado de  $t = 66,56$  (15 dias).

Isso se dá devido à pressão que o meio exerce sobre os insetos, onde a taxa de oviposição sofre uma saturação na função logística, em razão da limitação do espaço.

- Cenário 2:

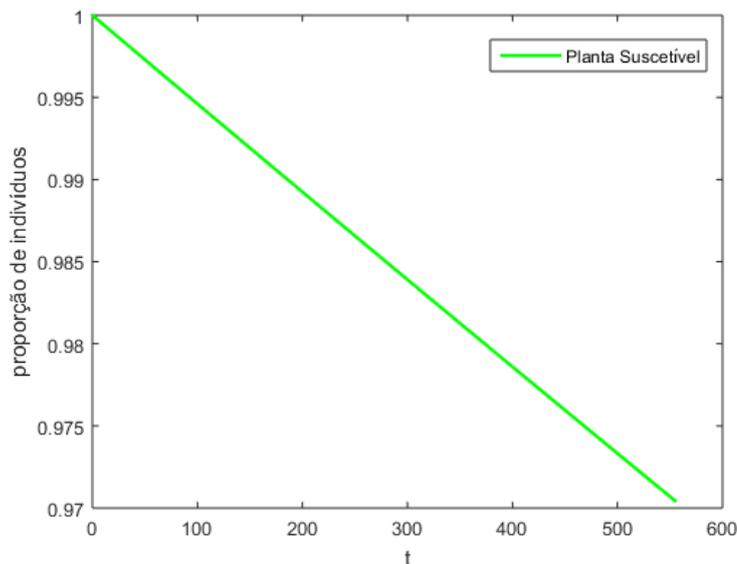


Figura 5: Simulação da dinâmica populacional da cultura de soja, na ausência de *B. tabaci* biótipo B, considerando  $k=40$ .

A figura 5 mostra a simulação da dinâmica populacional da Planta Suscetível, ao longo de uma safra, na ausência da praga. Para a condição inicial do sistema, considerou-se  $S(0)$ , que equivale à 320.000 plantas de soja, distribuídas homogeneamente em um hectare.

Ao final do tempo  $t = 554,74$  (125 dias), observa-se a perda de aproximadamente 3% da produção total devido ao debulho natural que a planta sofre ao decorrer da safra (SCHANOSKI, et.al., 2011).

- Cenário 3:

A figura 6 mostra a simulação da dinâmica populacional de *B. tabaci* biótipo B interagindo com a população de plantas, a partir do décimo dia do início da safra.

Para a condição inicial do sistema, temos  $O(0) = 0, N(0) = 0, M(0) = 0,125, S(0) = 1$  e  $F(0) = 0$ . Utilizou-se os dados da tabela 1, sendo  $k = 40$ , equivalendo biologicamente à 50 moscas adultas distribuídas homogeneamente em um hectare de plantação de soja com 320.000 unidades, sem estratégias de controle. Assim, obtivemos que quando  $Q_0 > 1$ , todas as trajetórias do modelo (3.3) convergem para o ponto de equilíbrio  $P2 = (O^*, N^*, M^*, S^*, F^*) \approx (0,9929, 0,1417, 3,7638, 0, 0)$ .

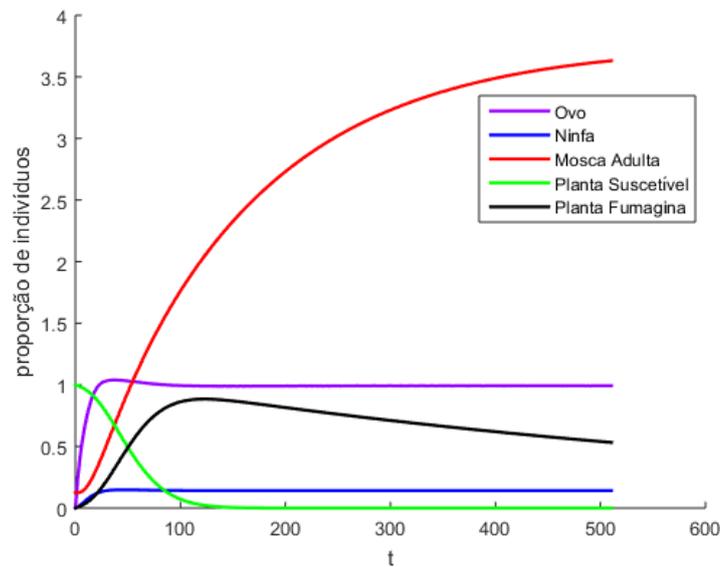


Figura 6: Simulação da dinâmica populacional da cultura de soja, infestada por *B. tabaci* biótipo B, considerando  $k=40$ .

Se analisarmos no sentido de produção, observamos que ao final da safra, restaram aproximadamente apenas 53% de plantas infectadas com fumagina para serem colhidas, gerando um grande prejuízo econômico.

O fato de as simulações aqui apresentadas não considerarem invasões contínuas de moscas adultas na plantação servem como uma simplificação da realidade, isso facilita o entendimento do funcionamento básico da dinâmica populacional desta espécie e da sua interação com a cultura plantada, mostrando assim os grandes danos teóricos que *B. Tabaci* biótipo B pode causar a uma produção.

#### 4.1 Estratégias de controle combinadas

Um dos métodos numéricos para propor estratégias de controle a pragas é realizando uma análise quantitativa do Número de Descendentes Basal, afim de avaliar quais variações de parâmetros tornam mais sensível a mudança do mesmo.

De modo geral, concluiu-se a partir da análise qualitativa que  $Q_0$  é mais sensível a taxa de oviposição e as taxas de mortalidade, tanto da ninfa, quanto da mosca adulta.

No entanto, o controle isolado de cada parâmetro não é o mais indicado, uma vez que a praga possui grande capacidade de desenvolver resistência a diferentes tipos de combate (BÔAS, et.al., 1997). Isso reforça que usos de estratégias combinadas como forma de diminuir ou até mesmo erradicar a praga.

A seleção e o emprego inteligente de diversas táticas de controle asseguram resultados positivos, como a preservação do meio-ambiente e dos mecanismos naturais de controle, gerando resultados econômicos favoráveis ao agricultor.

Por serem estratégias viáveis a serem aplicadas, optamos por analisar três táticas de controle combinadas:

- Variação nos parâmetros  $r$  e  $\overline{\mu_N}$ , correspondendo o uso de óleos e deter-

gentes de baixa concentração para a redução da oviposição e aumento na mortalidade de ninfas;

- Variação nos parâmetros  $\overline{\mu}_N$  e  $\overline{\mu}_M$ , representando o uso de inseticidas como do grupo químico “Piretróide” que reduzem a população de ninfas e moscas adulta (BÔAS, et. al., 2009);
- Variação nos parâmetros  $r$  e  $\overline{\mu}_M$ , retratando o uso de inseticidas como do grupo químico “Neonicotinóide” que inibe a alimentação, voo e movimentação da mosca adulta, reduzindo a oviposição (BÔAS, et. al., 2009).

Para essas simulações foram utilizados os dados da tabela 1, com população inicial de 50 moscas adultas em uma cultura de 320.000 plantas de soja.

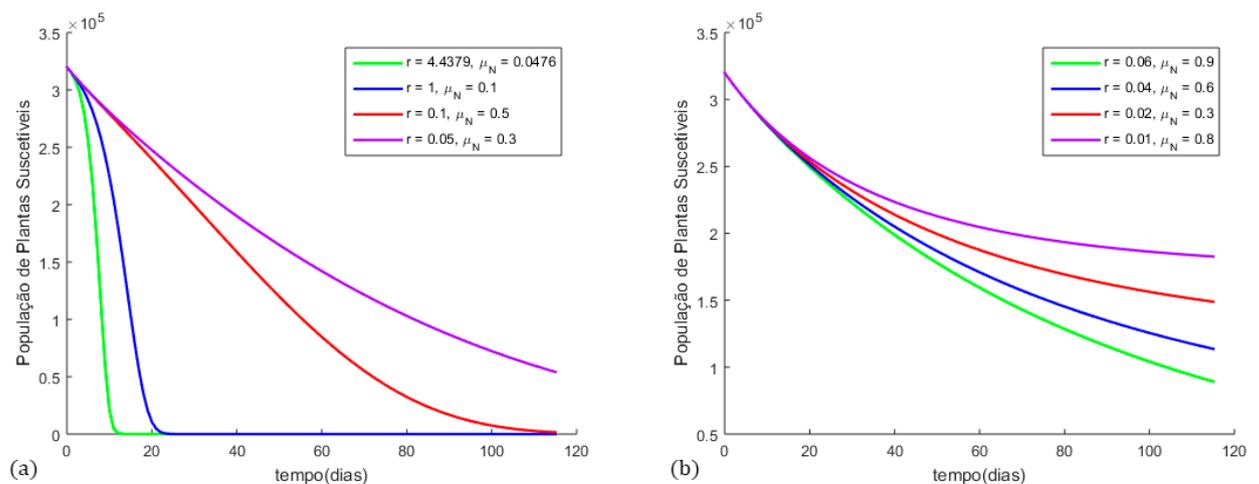


Figura 7: Gráfico da flutuação da população de Plantas Suscetíveis considerando variação simultânea de  $r$  e  $\overline{\mu}_N$ , com  $k = 40$ . Em (a) temos  $Q_0 > 1$  e em (b) temos  $Q_0 < 1$ .

Na figura 7 podemos observar como se comporta a população de Plantas Suscetíveis à medida que  $Q_0$  diminui com a variação dos parâmetros  $r$  e  $\overline{\mu}_N$ .

$r$	$\overline{\mu}_N$	$Q_0$	Plantas Suscetíveis
4,4379	0,0296	141,36	0
1	0,1	29,97	0
0,1	0,5	2,06	1.510
0,05	0,3	1,22	54.170
0,06	0,9	0,94	89.300
0,04	0,6	0,76	113.710
0,02	0,3	0,48	148.920
0,01	0,8	0,16	182.660

Tabela 2: Comportamento de  $r$  e  $\overline{\mu}_N$  e das Plantas Suscetíveis com a variação de  $r$  e  $\overline{\mu}_N$ .

Estamos interessados também qual será a repercussão na população de plantas suscetíveis quanto as maneiras de controle aqui propostas, pois sabemos que independente do tempo, para valores de  $Q_0 > 1$  a população de *B. tabaci* tende

a aumentar até atingir sua estabilidade e quando  $Q_0 < 1$ , tende a extinção da espécie na lavoura.

Analisando a figura 7 em conjunto com os dados fornecidos na tabela 2, constatamos que mesmo fazendo um intenso controle na oviposição e taxa de mortalidade da ninfa, a população de plantas suscetíveis decai expressivamente no decorrer da safra. Como exemplo disso temos a variação de  $r = 0,01$  e  $\bar{\mu}_N = 0,8$ , onde  $Q_0 = 0,16$  e mesmo assim acaba gerando uma perda teórica de aproximadamente 42,9%.

Dando continuidade aos métodos de controle propostos, do mesmo modo que anteriormente, temos agora a variação nos parâmetros  $\bar{\mu}_N$  e  $\bar{\mu}_M$ , representando o uso de inseticidas como do grupo químico “Piretróide” que reduzem a população de ninfas e moscas adulta.

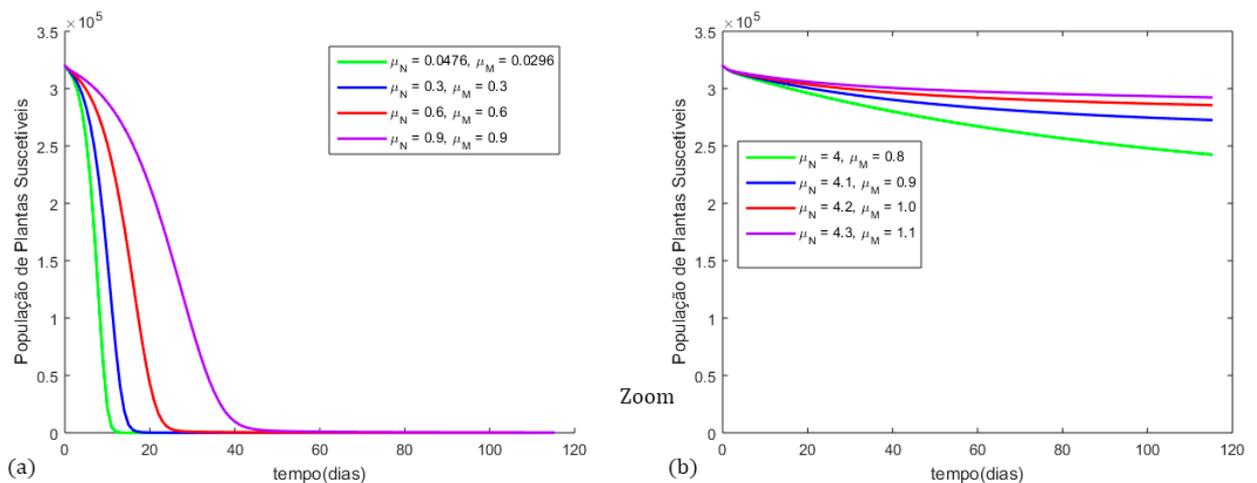


Figura 8: Gráfico da flutuação da população de Plantas Suscetíveis considerando variação simultânea de  $\bar{\mu}_N$  e  $\bar{\mu}_M$ , com  $k = 40$ . Em (a) temos  $Q_0 > 1$  e em (b) temos  $Q_0 < 1$ .

Na figura 8 podemos observar como se comporta a população de Plantas Suscetíveis na medida que  $Q_0$  diminui com a variação dos parâmetros  $\bar{\mu}_N$  e  $\bar{\mu}_M$ .

$\bar{\mu}_N$	$\bar{\mu}_M$	$Q_0$	Plantas Suscetíveis
4,4379	0,0476	141,36	0
0,3	0,3	10,70	0
0,6	0,6	4,19	0
0,9	0,9	2,29	10
4	0,8	0,91	242.370
4,1	0,9	0,79	272.590
4,2	1	0,69	285.580
4,3	1,1	0,62	292.330

Tabela 3: Comportamento de  $Q_0$  e das Plantas Suscetíveis com a variação de  $\bar{\mu}_N$  e  $\bar{\mu}_M$ .

Apesar de conseguir aproximadamente 91,35% de plantas suscetíveis ao fim

da safra quando  $\overline{\mu}_N = 4,3$ ,  $\overline{\mu}_M = 1,1$  e  $Q_0 = 0,62$ , não podemos cogitar que a técnica de controle é mais efetiva que a primeira, pois precisou-se de valores elevados nas taxas de mortalidade para que  $Q_0 < 1$ . Isso faz com que o custo de inseticida seja muito alto devida a várias aplicações, além de poder gerar uma seleção natural de moscas-brancas resistentes a esses tipos de inseticidas, fato que vem preocupando pesquisadores da área (BÔAS, et. al., 2009).

Passando para a última estratégia de controle proposta, temos a variação nos parâmetros  $r$  e  $\overline{\mu}_M$ , retratando o uso de inseticidas como do grupo químico “Neonicotinóide”.

Na figura 9 podemos observar como se comporta a população de Plantas Suscetíveis à medida que  $Q_0$  diminui com a variação dos parâmetros  $r$  e  $\overline{\mu}_M$ .

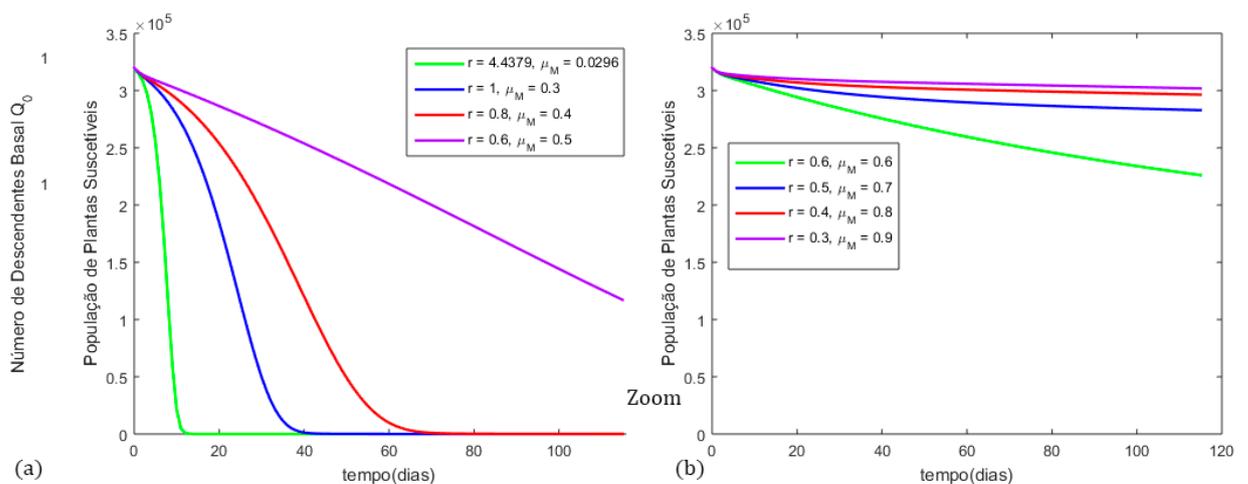


Figura 9: Gráfico da flutuação da população de Plantas Suscetíveis considerando variação simultânea de  $r$  e  $\overline{\mu}_M$ , com  $k = 40$ . Em (a) temos  $Q_0 > 1$  e em (b) temos  $Q_0 < 1$ .

Conforme visto acima, vemos que  $Q_0$  é mais sensível quando combinamos variações na oviposição e taxa de mortalidade da mosca adulta. Tal fato é confirmado no momento em que variamos  $r = 0,3$  e  $\overline{\mu}_M = 0,9$  conseguindo uma perda teórica de aproximadamente 5,6% nas plantas suscetíveis, conforme Tabela 4.

$r$	$\overline{\mu}_M$	$Q_0$	Plantas Suscetíveis
4,4379	0,0296	141,36	0
1	0,3	3,14	0
0,8	0,4	1,88	0
0,6	0,5	1,13	116.970
0,6	0,6	0,94	226.140
0,5	0,7	0,67	282.860
0,4	0,8	0,47	296.420
0,3	0,9	0,31	301.810

Tabela 4: Comportamento de  $Q_0$  e das Plantas Suscetíveis com a variação de  $r$  e  $\overline{\mu}_M$ .

Outro fato importante, é que esse tipo de produto inibe o voo e a movimentação da mosca adulta, controlando a dispersão na lavoura, conseqüentemente fazendo com que o combate seja mais eficaz.

## 5 | DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

De maneira geral, nossa expectativa é que este trabalho possa contribuir no entendimento qualitativo mais aprofundado sobre as estruturas básicas das dinâmicas populacionais de *B.tabaci*, e auxiliar em uma tomada de decisão cada vez mais eficientes, visto que a partir da análise de sensibilidade de  $Q_0$  através das variações dos parâmetros, encontramos resultados interessantes, como a efetividade na quebra do ciclo de vida da *B.tabaci* através da redução de oviposição e taxa de mortalidade da mosca adulta.

O modelo ganha mais validade ainda quando comparamos com os dados encontrados na literatura, onde na atualidade, os inseticidas eficientes no controle de mosca-branca são os do grupo químico “Neonicotinóides” (VIVAN, et.al.,2007).

Encontramos na literatura, que alguns inseticidas do grupo químico “Piretróides” e “Organofosforados” perderam sua eficácia para o controle de mosca-branca. No qual, devido a aplicações sucessivas com o mesmo produto ou com inseticidas que tem o mesmo modo de ação geraram níveis de resistência elevados na mosca-branca (VIVAN, et.al., 2007), reforçando os resultados não satisfatórios encontrados no controle por variação de  $\overline{\mu_N}$  e  $\overline{\mu_M}$ , simultaneamente.

Outra prática importante a ser adotada é a manutenção da lavoura no limpo, eliminando-se as plantas daninhas hospedeiras de mosca-branca antes do plantio e nos primeiros dias do estabelecimento da lavoura (BÔAS, et. al., 2009), onde conforme visto nas simulações, a erradicação das plantas daninhas é necessária, mas não suficiente para o controle da Mosca-branca.

## REFERÊNCIAS

BÔAS, G.L.V.; BRANCO, M.C. **Manejo Integrado da Mosca-Branca (*Bemisia tabaci* biótipo B) em Sistema de Produção Integrada de Tomate Industrial (PITI)**. Circular técnica. Embrapa Hortaliças. 2009, vol.70. INNS:1415-3033.

BÔAS, G.L.V.; FRANÇA, F.H.; ÁVILA A.C.; BEZERRA, I.C. **Manejo Integrado de mosca branca *Bemisia argentifolli***. Circular técnica. Embrapa Hortaliças. 1997, vol.9.

BYRNE, D.N.; BELLOWS JUNIOR, T.S. **Whitefly biology**. Annual Review of Entomology. 1991, v. 36, p.431-457.

BYRNE, D.N.; MILLER, W.B. **Carbohydrate and amino acid composition of phloem sap and honeydew by *Bemisia tabaci***. Journal of Insect Physiology. 1991, vol.36. p.431-457.

COSTA, A.S. **Increase in the populational density of *Bemisia tabaci* a threat of widespread virus infection of legume crops in Brazil**. J. Bird & K Maramorosch. Tropical Diseases of Legumes, 1975.

p.27-50.

ISLAM, M.T.; SHUNXIANG, R. **Development and reproduction of *Bemisia tabaci* on three tomato varieties.** *Journal of Entomology*. 2008, vol.4. p.10-16.

SCHANOSKI, R.; RIGHI, E.Z.; WERNER, V. **Perdas na colheita mecanizada de soja (*Glycine max*) no município de Maripá - PR.** *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*. 2011, v.15, n.11. p.1206-1211.

SOTORRIVA, L.M. **Aspectos biológicos de *Bemisia tabaci* biótipo B em plantas infestantes.** 2010. 49 f. Dissertação (Mestrado em Agricultura Tropical e Subtropical) - Instituto Agronômico, Campinas, SP, 2010.

STANSLY, P. A.; NARANJO, S. E. ***Bemisia*: Bionomics and Management of a Global Pest.** Springer Science+Business Media B.V. Springer Netherlands, 2010.

VIVAN, L.M.; ROFRIGUES, S.M.M. **A Mosca-Branca (*Bemisia tabaci* Biótipo B) no Mato-Grosso.** Circular técnica. Embrapa Algodão. 2007, vol.111. INSS: 0100-6460.

## **SOBRE O ORGANIZADOR**

**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES** Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-348-4

