EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 3

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Atena
Editora

Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 3

Atena Editora
2019

Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E24 Educação matemática e suas tecnologias 3 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 3)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-349-1
DOI 10.22533/at.ed.491192405

1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2.Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2019

APRESENTAÇÃO

A obra "Educação Matemática e suas tecnologias" é composta por quatro volumes, que vêem contribuir de maneira muito significante para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõe estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 22

EFEITO DE HARDWARE E SOFTWARE SOBRE O ERRO DE ARREDONDAMENTO EM CFD

Diego Fernando Moro
Engenharia Mecânica, Universidade Positivo
Curitiba - PR

Carlos Henrique Marchi
Departamento de Engenharia Mecânica,
Universidade Federal do Paraná
Curitiba - PR

RESUMO: Neste trabalho verifica-se o efeito do erro de arredondamento sobre soluções numéricas, pois este efeito não é bem conhecido em transferência de calor e dinâmica dos fluidos computacional. Para análise, foram utilizados dois problema de condução de calor e um de escoamento de fluidos compressíveis, ambos códigos computacionais foram escritos em Fortran 90. A condução de calor é resolvida utilizando-se o método de diferenças finitas com esquema de segunda ordem de acurácia e considerando: (1) uma e duas dimensões espaciais; (2) nove configurações diferentes de computadores (Intel e AMD); (3) precisões simples ou dupla; (4) sistemas operacionais Windows XP 32 bits, 64 bits e Linux 64 bits (Ubuntu); (5) três tipos de variáveis (globais e pontuais); (6) quatro tipos de compiladores: Microsoft 4.0, Compaq 6.6 e Intel 11.1 no Windows e gfortran no Linux; (7) diversas opções de compilação; (8) solver direto (1D), iterativo com Multigrid (2D) e (9) número de incógnitas de 2 a 67 milhões. Já o escoamento de fluidos compressíveis é resolvido com volumes finitos e esquema de primeira ordem de acurácia em dois sistemas operacionais (Windows e Linux) e dois tipos de solvers (ADI e MSI) com o compilador Intel 14.0. De todos os aspectos citados anteriormente apenas o compilador afetou o erro de arredondamento.

PALAVRAS-CHAVE: Erro de arredondamento, transferência de calor computacional, dinâmica dos fluidos computacional, erro numérico, verificação.

ABSTRACT: The rounding-off error effect over numerical solutions is verified, because this effect is not well known in computational heat transfer and computational fluid dynamics. In this analysis, two heat conduction problems and one compressible fluid flow problem were used, both computational codes were written in Fortran 90. The heat conduction is solved using finite difference method with scheme of second order of accuracy and considering: (1) one and two spatial dimensions; (2) nine different configurations of computer (Intel and AMD); (3) simple and double precision variables; (4) operational systems Windows XP 32 bits, 64 bits and Linux 64 bits (Ubuntu); (5) three types of variables (global and point); (6) four types of compilers: Microsoft 4.0, Compaq 6.6 and Intel 11.1 in Windows and gfortran in Linux; (7) varied

options of compilation; (8) direct solver (1D), iterative with Multigrid (2D) and (9) 2 to 67 million grid elements. The compressible flow is solved using finite volume method and scheme of first order of accuracy in two operational systems (Windows and Linux) and two types of solvers (ADI and MSI) with the compiler Intel 14.0. Of the numerous aspects quoted earlier only the compiler affected the rounding-off error.

KEYWORDS: Rounding-off error, computational heat transfer, computational fluid dynamics, numerical error, verification

1 I INTRODUÇÃO

Para resolver problemas de engenharia, pode-se optar por três tipos de métodos: (1) experimentais, (2) analíticos ou (3) numéricos.

Nos métodos experimentais (1) avalia-se o fenômeno físico diretamente, são empregados sistemas de medição para obter o valor das grandezas de interesse diretamente e os erros existentes nestes resultados devem-se às condições do experimento, aferição dos sistemas de medição, entre outras.

Nos métodos analíticos (2) utiliza-se uma representação matemática do fenômeno físico chamada modelo matemático, este modelo é então simplificado e resolvido. Apresentam erros de modelagem, ou seja, erros entre o modelo matemático e o fenômeno real.

Nos métodos numéricos (3) também utiliza-se o modelo matemático, no entanto sem as simplificações do método analítico, o que permite resolver problemas com equações, geometrias e condições de contorno mais gerais. No entanto é necessário o uso de computadores para obter as soluções numéricas e estas soluções além de apresentarem os erros de modelagem citados nos métodos analíticos, também apresentam erros numéricos (MARCHI, 2001).

Os erros numéricos podem ser causados por quatro fontes: (A) erros de truncamento, (B) erros de iteração, (C) erros de programação e (D) erros de arredondamento.

Os erros de truncamento (A) resultam das aproximações numéricas feitas na discretização do modelo matemático. Eles causam os erros de discretização (E) sobre as variáveis de interesse () que são modelados por

$$E(\phi) = C_1 h^{p_L} + C_2 h^{p_2} + C_3 h^{p_3} + \cdots \quad (1)$$

onde:

$p_L, p_2, p_3, \ldots$ = ordens verdadeiras de ;$E(\phi)$ geralmente números inteiros e positivos

ϕ = solução numérica sem erros de discretização, de iteração e de arredondamento

p_L = ordem assintótica de $E(\phi)$; $p_L \geq 1$ inclinação da curva de erro num gráfico log (|E|) versus log (h) para $h \rightarrow 0$

h = tamanho dos elementos da malha

Os erros de iteração (B) resultam de vários fatores: emprego de métodos iterativos para resolver um sistema de equações; problemas não lineares, onde os coeficientes do sistema de equações dependem da própria solução; modelos matemáticos constituídos por mais de uma equação, onde cada uma é resolvida separadamente, entre outros.

Os erros de programação (C) podem ser causados por: uso incorreto do modelo numérico na aproximação do modelo matemático; implementação incorreta do modelo numérico no programa computacional; pelo uso incorreto do programa computacional durante a obtenção da solução numérica; e por qualquer outra eventual fonte de erro.

Os erros de arredondamento (D) são causados pela representação finita das variáveis nas computações numéricas, que está ligada à precisão dos números apresentados pelo computador. O objetivo deste trabalho foi avaliar se este erro depende do software usado para gerar o código computacional e/ou do computador (hardware) empregado em sua execução. Os erros de arredondamento provocam perda de precisão dos números, que ocorre basicamente por dois motivos: um grande número de operações nos cálculos provoca perda de precisão no lado direito dos números e o cancelamento subtrativo nos cálculos que provoca perda de precisão no lado esquerdo dos números.

No entanto não há um trabalho específico que quantifique este efeito na solução de problemas de dinâmica dos fluidos computacional (CFD). Outra motivação para este trabalho foi o constante questionamento em bancas de mestrado/doutorado: se a precisão da solução numérica depende do computador utilizado? Pois acredita-se que em diferentes computadores os programas computacionais se comportam de maneira diferente, ao se usar linguagens de programação científica como C++ ou Fortran.

2 I METODOLOGIA

Foram utilizados dois problemas de condução de calor (1D e 2D) para realizar a análise do erro de arredondamento verdadeiro e um problema de escoamento de fluidos compressíveis cujo código é chamado Mach2D (MARCHI; ARAKI, 2009) para analisar a variação da solução numérica. O procedimento adotado para analisar o erro de arredondamento verdadeiro foi: discretizar a equação diferencial com diferenças finitas e aproximações de segunda ordem de acurácia, em seguida, aplicar condições de contorno tal que a solução gerada seja linear, desta forma, o modelo numérico resulta na solução analítica nos nós analisados, a qual é conhecida. No caso do Mach2D foi analisada a solução numérica obtida variando o sistema operacional e o solver utilizado para resolver o sistema de equações.

Todos os códigos computacionais foram compilados e executados no mesmo computador. Quando este procedimento não era adotado, resultados significativamente diferentes eram obtidos nos diferentes computadores testados, principalmente em problemas mais complexos. Sugere-se portanto que na execução de códigos computacionais siga esta mesma metodologia.

Em relação ao hardware, a Tab. 1 apresenta os computadores utilizados neste trabalho. Os resultados obtidos com cada um deles serão mencionados pelos seus respectivos nomes.

Em relação ao software, foram usados cinco compiladores diferentes da linguagem computacional utilizada nos códigos (Fortran), são eles: (1) Microsoft Fortran PowerStation 4.0, (2) Compaq Visual Fortran 6.6, (3) Intel Fortran Compiler 11.1, (4) GNU Fortran e (5) Intel Fortran Composer XE 2013 14.0.

Nome	**Modelo**	**Processador**	**Threads**	**Clock**	**RAM**	**OS**
CFD-1	Intel	Pentium III	1	0,75	0,77	Win. XP
CFD-2	Intel	Pentium IV	1	2,40	1,00	Win. XP
CFD-5	Intel	Pentium IV	1	3,41	3,00	Win. XP
CFD-7	Intel	Core 2 6700	2	2,66	3,50	Win. XP
CFD-10	Intel	Xeon X5355	8	2,66	2,49	Win. XP
CFD-13	Intel	Core Q6600	4	2,40	3,25	Win. XP
CFD-14	AMD	Athlon 4200+	2	2,20	1,75	Win. XP
CFD-19	AMD	Athlon 5200B	2	2,69	3,76	Win. XP
CFD-20	Intel	Core E7500	2	2,93	2,00	Ubuntu
CFD-21	Intel	Xeon X5690	24	3,46	192	Ubuntu e Win. XP

Tabela 1 Hardware utilizado nas simulações

onde: Clock é dado em GHz, RAM é dado em GB e OS é os sistemas operacionais disponíveis

2.1 Equação de laplace, condução de calor unidimensional e bidimensional em regime permanente sem geração de calor

A equação de Laplace pode modelar entre outros problemas, a condução de calor em regime permanente sem geração de calor. Para estas simplificações tem-se a Eq. (2), que é a equação diferencial que modela o problema 1D e a Eq. (3) que modela o problema 2D.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2T}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

onde: T é o campo de temperaturas ao longo do domínio e x e y são as direções coordenadas

O domínio 1D é uma barra com uma unidade de medida de comprimento e o 2D é uma placa quadrada com uma unidade de medida de aresta. As condições de contorno no problema 1D são as seguintes: $T(0) = 0$ e $T(1) = 1$ e no problema 2D:

T(0,y) = T(x,0) = 0 ; *T(1,y) = y* e *T(x,1) = x*. Isto permite obter soluções analíticas lineares para a incógnita dos problemas: no 1D *T(x) = x* e no 2D *T(x,y) = x y*.

Os dados numéricos além dos citados no início do capítulo são: as condições de contorno são aplicadas nos nós dos contornos; no problema 1D, foi utilizado o solver TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm) (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007), tem-se portanto a solução direta do sistema de equações. Já no problema 2D a parada do processo iterativo se dá com base num número fixo de iterações externas igual a 100, de forma a garantir que o processo iterativo termine no dobro de iterações necessárias para chegar ao erro de máquina. Isto ocorre pois utiliza-se o solver Gauss-Seidel com multigrid (BRIGGS *et al.*, 2000) para resolver o problema 2D. No problema 1D, foi avaliado o erro de arredondamento verdadeiro em 9 malhas distintas: 2, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7 e $2{,}5.10^7$ nós. Já no 2D foi avaliado em 5 malhas: 32^2, 128^2, 512^2, 2048^2 e 8192^2 nós.

As variáveis analisadas nos problemas 1D e 2D: Temperatura Central T_c, variável primária local. Solução analítica: $T_{c,1D}(x=0{,}5) = 0{,}5$ e $T_{c,2D}(x=0{,}5, y=0{,}5) = 0{,}25$; Temperatura Média $\overline{T}$, variável secundária global. Solução analítica: $\overline{T}_D = 0{,}5$ e $\overline{T}_{DD} = 0{,}25$. E Inclinação em x=1, variável secundária local. Solução analítica: $I_{1D}(x=1) = 1$.

2.2 Avaliação da variação da solução obtida com o código mach2d

O código computacional Mach2D utiliza o método dos volumes finitos para a resolução das equações diferenciais de conservação da massa, quantidade de movimento linear axial e transversal, a conservação da energia térmica e a equação de estado dos gases perfeitos. As equações citadas estão apresentadas abaixo:

$$\frac{c_p \partial(\rho u_k T)}{\partial x_k} = u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad \frac{c_p \partial(\rho u_k u_i)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0 \qquad p = \rho R T \tag{5}$$

onde:

p: Massa específica do gás; u_k: Componente da velocidade na direção k; x_k: Direção k; u_i: Componente da velocidade relativa a quantidade de movimento linear na direção *i*; *p*: pressão do gás; c_p: Calor específico a pressão constante do gás; *T*: Temperatura do gás e *R*: Constante do gás (Lei dos gases ideais).

A Eq. (5) à esquerda representa a conservação da massa, a Eq. (4) à direita representa a conservação da quantidade de movimento linear em qualquer direção x_k, a Eq. (4) à direita representa a conservação da energia e a Eq. (5) à direita representa a equação de estado.

O código Mach2D foi utilizado neste trabalho para a simulação de escoamento interno invíscido de fluido compressível, contínuo, não reativo, termicamente perfeito, bidimensional axissimétrico e o esquema numérico é de primeira ordem de acurácia.

No caso deste trabalho foi simulado uma tubeira de motor-foguete e a variável analisada foi o coeficiente de descarga (C_d), definido pela razão entre o fluxo de massa numérico 2D (obtido pelo código computacional) e o fluxo de massa teórico 1D (SUTTON, 1992).

Os solvers utilizados para comparação da variação do erro de arredondamento foram o ADI (PEACEMAN; RACHFORD, 1955), que consiste em utilizar alternadamente o método TDMA em uma direção com a outra implícita e vice-versa e o MSI (SCHNEIDER; ZEDAN, 1981) que utiliza uma decomposição LU parcial do sistema de equações para resolver o sistema linear para a correção da variável dependente.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em relação ao hardware, foram realizados simulações com o problema 1D e o problema 2D em todos os computadores mostrados na Tab. 1, com precisão simples e dupla. Não houve diferenças no erro de arredondamento obtido para o mesmo compilador utilizado (Microsoft Powerstation 4.0).

Em relação ao software, foram realizadas simulações no computador CFD-19 com o problema 1D, modificando as opções de compilação (Debug, Release, otimização ou não). Estas opções não influenciaram no erro de arredondamento obtido.

Ainda no software, foram realizadas simulações com o problema 1D e 2D alterando-se os compiladores utilizados e a precisão dos cálculos empregada.

No problema 1D, utilizando-se precisão simples, em dois computadores testados (CFD-19 e CFD-13) houve diferenças no erro de arredondamento obtido para os diferentes compiladores utilizados; na Fig. 1 é possível analisar o comportamento do erro de arredondamento em função do número de nós da malha utilizada para a variável $\dot{T}_{1D}$ comparando diversos compiladores. O erro mostrado na figura é qualitativamente análogo para as outras três variáveis. Já na precisão dupla, não houve diferenças no erro de arredondamento obtido.

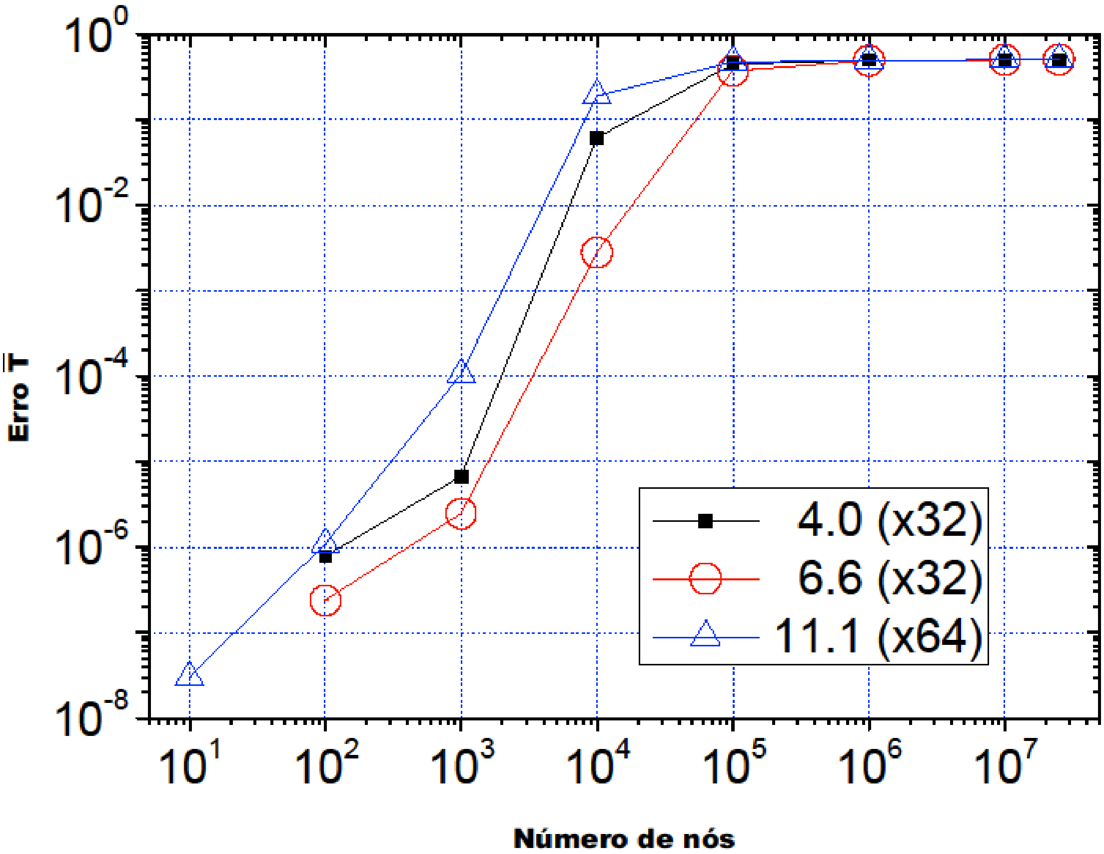

Figura 1 Erro de arredondamento, variável , precisão simples

Ainda na Fig. 1, o maior erro de arredondamento é devido ao compilador 11.1 da Intel seguido pelo 4.0 da Microsoft e o menor erro de arredondamento é dado pelo compilador 6.6 da Compaq.

No problema 2D, utilizando-se precisão simples, foram obtidos erros de arredondamentos diferentes para os compiladores testados. A Fig. 2 mostra o comportamento da variável global temperatura média.

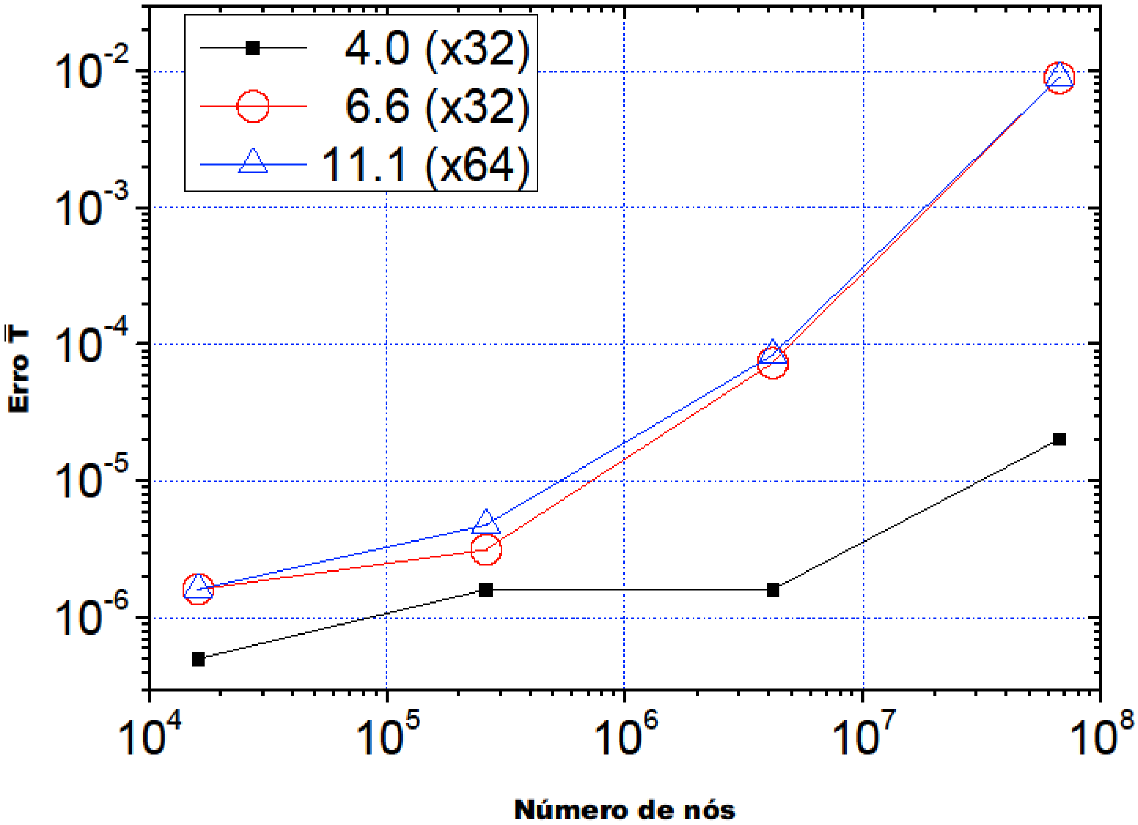

Figura 2 Erro de arredondamento, variável $T_{c,2D,}$ precisão simples

Na Fig. 2, há um comportamento diferente, o compilador que apresentou o maior erro é o 11.1 da Intel, seguido pelo 6.6 da Compaq e o menor erro é dado pelo compilador 4.0 da Microsoft.

Ainda no problema 2D a Fig. 3 mostra o comportamento da variável pontual temperatura central, percebe-se um comportamento estocástico, não sendo possível analisar qual seria o compilador que apresenta maior ou menor erro de arredondamento.

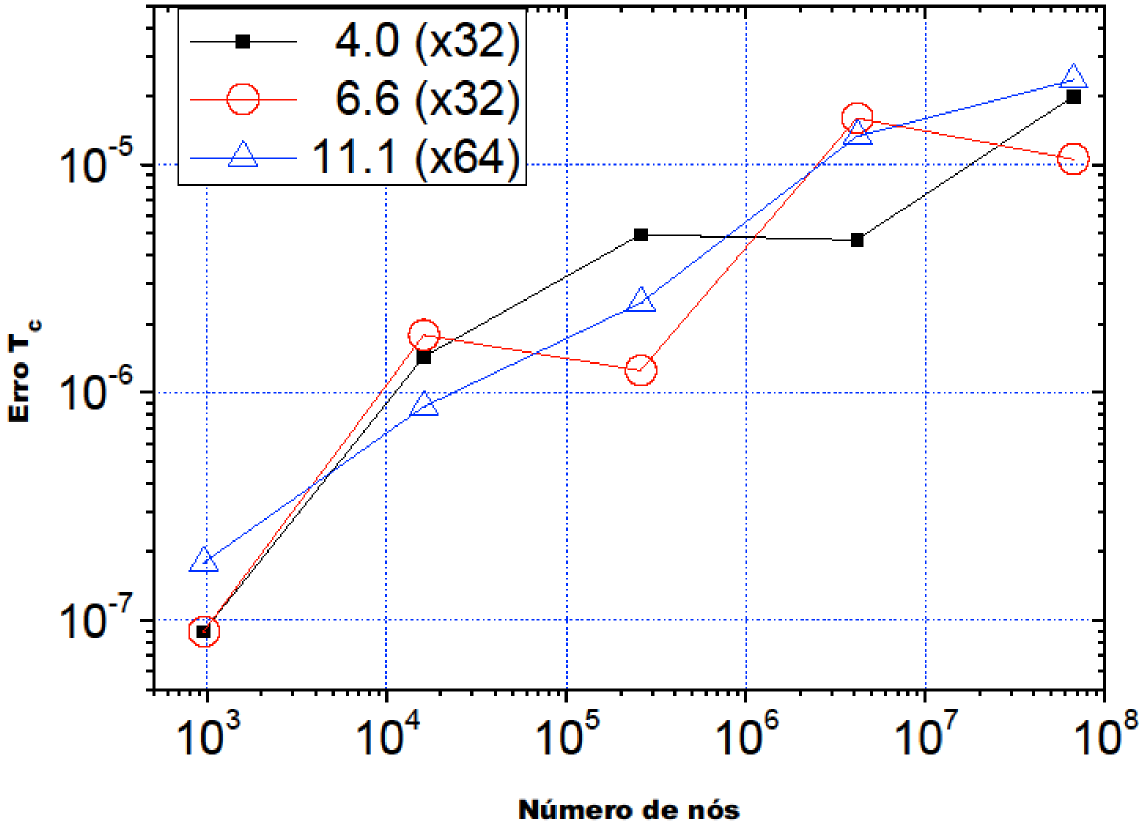

Figura 3 Erro de arredondamento, variável $T_{c,2D,}$ precisão simples

Já na precisão dupla, das duas variáveis avaliadas, apenas a temperatura central apresentou diferença no erro de arredondamento e apenas no compilador Microsoft Fortran Powerstation 4.0, com mostrado na Fig. 4.

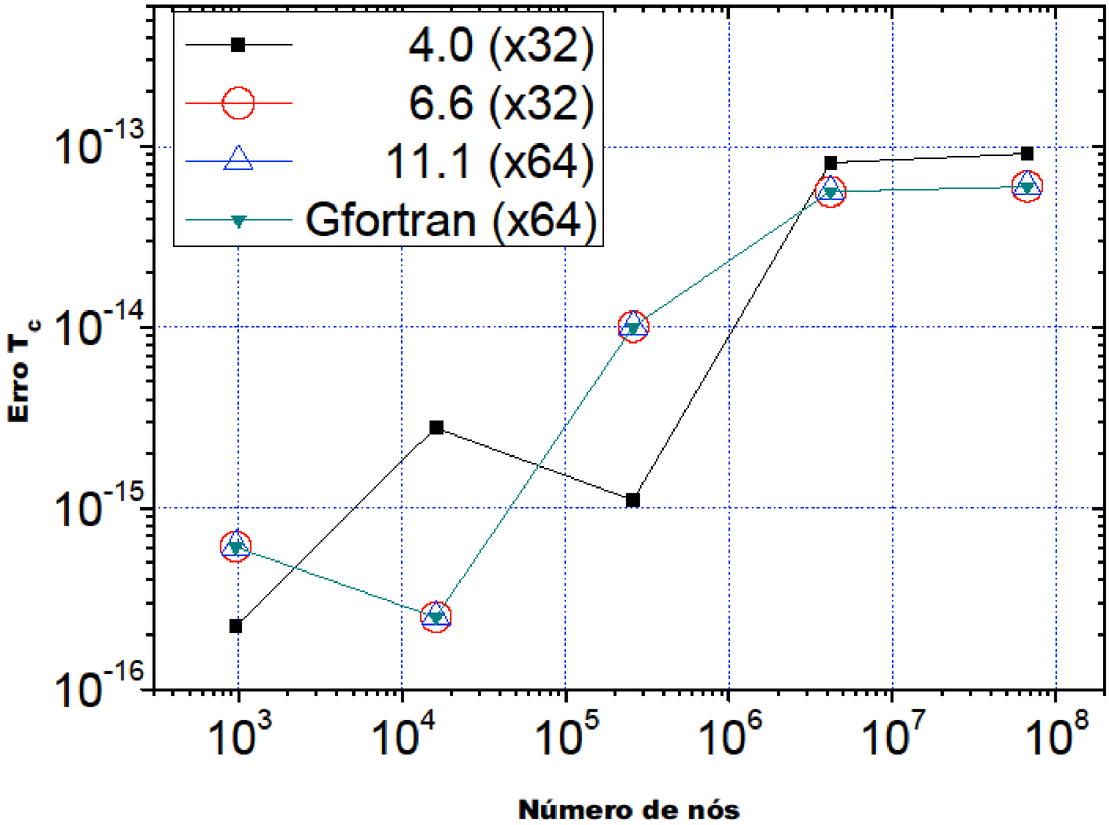

Figura 4 Erro de arredondamento, variável $T_{c,2D,}$ precisão dupla

O último caso testado neste trabalho foi do Mach2D com precisão dupla: foi avaliado o resultado de C_d obtido com o compilador Intel Fortran Composer XE 2013 14.0 tanto na versão Windows quanto na versão Linux na solução numérica e dois tipos de solvers aplicados na resolução do sistema de equações gerado: o método MSI e o método ADI.

Foram simuladas seis malhas: 24x10, 48x20, 96x40, 192x80, 384x160 e 768x320 volumes no CFD-21, com diferentes parâmetros de relaxação para conduzir a convergência. Não houve diferenças na solução numérica obtida em cada uma das malhas simuladas.

O resultado acima corrobora com os demais resultados obtidos em precisão dupla, ou seja, pela precisão maior dos cálculos há mínima (Fig. 4) ou nenhuma influência do erro de arredondamento nas simulações realizadas.

Foi avaliado também a repetitividade do erro de arredondamento para a variável T_c e as outras variáveis citadas neste trabalho.

Observou-se que ao repetir as simulações, o erro de arredondamento obtido é sempre o mesmo, ou seja, neste caso o valor numérico do erro de arredondamento não é aleatório.

4 I CONCLUSÃO

Neste trabalho foram estudados diferentes problemas: condução de calor 1D, 2D e escoamento de fluidos compressíveis. Os erros de arredondamento verdadeiros foram obtidos para os problemas de condução de calor e para o escoamento de fluidos, foi analisada a influência do erro de arredondamento em cada um dos problemas. Com base nos testes realizados conclui-se que:

1 - Independente da precisão (dupla, simples) e dimensão (1D e 2D), o hardware e as opções de compilação não influenciam no erro de arredondamento verdadeiro, desde que a compilação e a execução do código sejam no mesmo computador.

2 - Utilizando precisão simples, independente da dimensão (1D e 2D), o erro de arredondamento verdadeiro apresenta diferenças estocásticas utilizando os diferentes compiladores testados: (1) Microsoft Fortran Powerstation 4.0, (2) Compaq Visual Fortran 6.6, (3) Intel Fortran Compiler 11.1.

3 - Não houve variações na solução numérica obtida para a variável C_d no Mach2D utilizando-se dois sistemas operacionais (Windows e Linux) e dois solvers diferentes (ADI e MSI).

4 - Salvo o uso do compilador mais antigo (Microsoft Fortran Powerstation 4.0), cálculos com precisão dupla apresentaram o mesmo erro de arredondamento verdadeiro para todos os fatores analisados (Hardware e Software).

5 - A medida que o número de nós da malha cresce, o erro de arredondamento também cresce, pelo fato do método utilizado sofrer de cancelamento de algarismos significativos. A razão calculada para obter as derivadas nos métodos utilizados sofre de redução no número de algarismos significativos, isto ocorre, pois tanto o numerador quanto o denominador se tornam números cada vez menores.

Os resultados recalculados também mostram que valor numérico do erro de arredondamento obtido é sempre o mesmo, ou seja, independe do número de vezes o qual foi calculado.

Em trabalhos futuros serão feitos estudos sistemáticos com ênfase nas opções de otimização dos compiladores utilizados e uso de outros problemas como equações elípticas e parabólicas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao programa UNIESPAÇO da AEB (Agência Espacial Brasileira), o CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro. O primeiro autor foi bolsista da CAPES e o segundo é bolsista do CNPq.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. **A multigrid tutorial**. 2. ed. Philadelphia: SIAM, 2000.

MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2001.

MARCHI C. H.; ARAKI L. K., **Relatório técnico do projeto CFD-10/UFPR: códigos Mach2D 6.1 e RHG2D 1.0**, UFPR, Curitiba, 2009.

PEACEMAN, D. W.; RACHFORD, H. H. **The numerical solution of parabolic and eliptic differential equations**. J. Soc. Ind. Appl. Math, v. 3, p. 28–41, 1955.

SCHNEIDER, G. E.; ZEDAN, M. A. **A modified strongly implicit procedure for numerical solution of field problems**. Numerical Heat Transfer, v. 4, p. 1–19, 1981.

SUTTON G. P., **Rocket Propulsion Elements**. 6 ed. New York: John Wiley & Sons. Inc., 1992.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method**. 2. ed. Harlow, England: Prentice Hall, 2007.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-349-1
9 788572 473491