

As Ciências Exatas e da Terra no Século XXI

**Alan Mario Zuffo
Jorge González Aguilera
(Organizadores)**

Alan Mario Zuffo
Jorge González Aguilera
(Organizadores)

As Ciências Exatas e da Terra no Século XXI

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de
Oliveira Diagramação: Lorena Prestes
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie di Maria Ausiliatrice
Profª Drª Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof.^a Dr.^a Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Dr.^a Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.^a Dr.^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof.^a Dr.^a Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof.^a Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
C569	As ciências exatas e da terra no século XXI [recurso eletrônico] / Organizadores Alan Mario Zuffo, Jorge González Aguilera. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-351-4 DOI 10.22533/at.ed.514192405 1. Ciências exatas e da terra – Pesquisa – Brasil. I. Zuffo, Alan Mario. II. Aguilera, Jorge González. CDD 507
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A obra “As Ciências Exatas e da Terra no Século XXI” aborda uma publicação da Atena Editora, apresenta, em seus 18 capítulos, conhecimentos tecnológicos aplicados às Ciências Exatas.

Este volume dedicado à Ciência Exatas traz uma variedade de artigos alinhados com a produção de conhecimento na área de Matemática, ao tratar de temas como aritmética multidimensional RDM, a teoria da complexidade no estudo de atividade cerebral e o ensino da matemática e sua contribuição no desenvolvimento da consciência ambiental de estudantes. Na área da Mecânica traz trabalhos relacionados com uso do sensor de vibração piezo e a placa BlackBoard V1.0, como ferramenta para avaliar a conservação de casas e prédios qualificados como históricos ou com valor cultural à sociedade. Estudos de adição de nanotubos de carbono no concreto convencional também são abordados. Na área de Agronomia são abordados temas inovadores como a identificação de doenças com técnicas de visão computacional, emprego da técnica de espectroscopia e a calibração por regressão linear múltipla na determinação de misturas com óleos vegetais de oliva, entre outros temas.

Aos autores dos diversos capítulos, pela dedicação e esforços sem limites, que viabilizaram esta obra que retrata os recentes avanços científicos e tecnológicos nas Ciências Exatas, os agradecimentos dos Organizadores e da Atena Editora. Por fim, esperamos que este livro possa colaborar e instigar mais estudantes e pesquisadores na constante busca de novas tecnologias para a área da Física, Matemática, Mecânica e na Agronomia e, assim, contribuir na procura de novas pesquisas e tecnologias que possam solucionar os problemas que enfrentamos no dia a dia.

Alan Mario Zuffo
Jorge González Aguilera

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
ANÁLISE NUMÉRICA DOS DIFERENTES PROCESSOS DA MULTIPLICAÇÃO INTERVALAR	
Alice Fonseca Finger	
Aline Brum Loreto	
Dirceu Antonio Maraschin Junior	
Lucas Mendes Tortelli	
DOI 10.22533/at.ed.5141924051	
CAPÍTULO 2	10
APLICAÇÃO DA TEORIA DA COMPLEXIDADE AO ESTUDO DE ATIVIDADE CEREBRAL REGISTRADA EM DADOS DE EEG (ELETROENCEFALOGRAMA)	
Sanielen Colombo	
Eduardo Augusto Campos Curvo	
DOI 10.22533/at.ed.5141924052	
CAPÍTULO 3	24
APRIMORAMENTO DO BANCO DE METABÓLITOS SECUNDÁRIOS PARA AUXÍLIO NA BIOPROSPECÇÃO DIRECIONADOS A ESTUDOS QUIMIOTAXONÔMICOS E DE TRIAGEM VIRTUAL DE ESTRUTURAS COM POTENCIAL ATIVIDADE ANTIPROTOZOÁRIA	
Bianca Guerra Tavares	
DOI 10.22533/at.ed.5141924053	
CAPÍTULO 4	29
AVALIAÇÃO PRELIMINAR DO RISCO DE CONTAMINAÇÃO DOS RECURSOS HÍDRICOS POR PESTICIDAS UTILIZADOS NO CULTIVO DA SOJA EM TRÊS MUNICÍPIOS DA REGIÃO OESTE DO PARÁ	
Joseph Simões Ribeiro	
Alessandra de Sousa Silva	
Ronison Santos da Cruz	
Bianca Larissa de Mesquita Sousa	
Ruy Bessa Lopes	
DOI 10.22533/at.ed.5141924054	
CAPÍTULO 5	36
DANOS OCASIONADOS EM RESIDÊNCIAS HISTÓRICAS POR VIBRAÇÕES	
Jussiléa Gurjão de Figueiredo	
Louise Aimeé Reis Guimarães	
Ylan Dahan Benoliel Silva	
DOI 10.22533/at.ed.5141924055	
CAPÍTULO 6	44
DETERMINAÇÃO DA COMPOSIÇÃO CENTESIMAL DA PLANTA ALIMENTÍCIA NÃO CONVENCIONAL (PANC) ORA-PRO-NÓBIS PARA O DESENVOLVIMENTO DE UMA RAÇÃO ENRIQUECIDA COM <i>Tenebrio molitor</i> PARA GALINÁCEOS	
Gabriel José de Almeida	
Jorge Luís Costa	
Maira Akemi Casagrande Yamato	
Mariana Souza Santos	
Vitoria Rodilha Leão	
DOI 10.22533/at.ed.5141924056	

CAPÍTULO 7	57
DUAS PARTÍCULAS NUM BILHAR QUÂNTICO	
Pedro Chebensi Júnior	
Hércules Alves de Oliveira Junior	
DOI 10.22533/at.ed.5141924057	
CAPÍTULO 8	64
ELABORAÇÃO DE ATLAS AMBIENTAL DIGITAL PARA A MICRORREGIÃO DE FOZ DO IGUAÇU/PR	
Vinícius Fernandes de Oliveira	
Samuel Fernando Adami	
Giovana Secretti Vendruscolo	
DOI 10.22533/at.ed.5141924058	
CAPÍTULO 9	72
ESTUDO DO AQUECIMENTO DE UM <i>RASPBERRY PI 3</i> EM MANIPULAÇÃO DE IMAGEM E IMPLEMENTAÇÃO DE SISTEMA TÉRMICO	
Daniel Rodrigues Ferraz Izario	
Yuzo Iano	
Bruno Rodrigues Ferraz Izario	
Carlos Nazareth Motta Marins	
DOI 10.22533/at.ed.5141924059	
CAPÍTULO 10	83
ESTUDO LABORATORIAL DE PROPRIEDADES MECÂNICAS E DE FLUIDEZ A PARTIR DA ADIÇÃO DE NANOTUBOS DE CARBONO NO CONCRETO CONVENCIONAL	
Késsio Raylen Jerônimo Monteiro	
Pedro Bonfim Segobia	
Peter Ruiz Paredes	
Simone Ribeiro Lopes	
DOI 10.22533/at.ed.51419240510	
CAPÍTULO 11	95
EVOLUÇÃO DA COMPUTAÇÃO AUTONÔMICA E ADOÇÃO DO MODELO MAPE-K: UMA PESQUISA BIBLIOGRÁFICA	
Rosana Cordovil da Silva	
Renato José Sassi	
DOI 10.22533/at.ed.51419240511	
CAPÍTULO 12	109
FLUXO DE ATAQUE DPA/DEMA BASEADO NA ENERGIA DE TRAÇOS PARA NEUTRALIZAR CONTRAMEDIDAS TEMPORAIS NAS ARQUITETURAS GALS4	
Rodrigo Nuevo Lellis	
Rafael Iankowski Soares	
Vitor Gonçalves de Lima	
DOI 10.22533/at.ed.51419240512	
CAPÍTULO 13	115
O ENSINO DA MATEMÁTICA E SUA CONTRIBUIÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DA CONSCIÊNCIA AMBIENTAL DOS ESTUDANTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Cláudio Cristiano Liell	
Arno Bayer	
DOI 10.22533/at.ed.51419240513	

CAPÍTULO 14	130
OS DESAFIOS ENFRENTADOS PELA COMUNIDADE ESCOLAR AO LIDAR COM ALUNOS COM TDAH EM PEDRO LEOPOLDO/MG	
Aurea Helena Costa Melo	
DOI 10.22533/at.ed.51419240514	
CAPÍTULO 15	143
PDI SOFTWARE: IDENTIFICAÇÃO DE FERRUGEM EM FOLHAS DE SOJA COM TÉCNICAS DE VISÃO COMPUTACIONAL	
Hortência Lima Gonçalves Gabriel Rodrigues Pereira Rocha George Oliveira Barros Cássio Jardim Tavares	
DOI 10.22533/at.ed.51419240515	
CAPÍTULO 16	148
PERCEPÇÃO DA GESTÃO GEOLÓGICA E AMBIENTAL NA PREFEITURA DE SANTA CRUZ DO SUL, RIO GRANDE DO SUL	
Cândida Regina Müller Thays França Afonso Luciano Marquette Verônica Regina de Almeida Vieira Luis Eduardo Silveira da Mota Novaes Leandro Fagundes	
DOI 10.22533/at.ed.51419240516	
CAPÍTULO 17	154
PROCESSAMENTO DE IMAGENS PARA A DETECÇÃO DE PLACAS VEICULARES NO CONTROLE DE ACESSO EM ÁREAS RESTRITAS	
Yan Patrick de Moraes Pantoja Bruno Yusuke Kitabayashi Rafael Fogarolli Vieira Raiff Smith Said	
DOI 10.22533/at.ed.51419240517	
CAPÍTULO 18	163
DO PROPOSTA DE ARQUITETURA DE REDE NEURAL CONVOLUCIONAL INTERVALAR PARA O PROCESSAMENTO DE IMAGENS INTERVALARES	
Ivana P. Steim Lucas M. Tortelli Marilton S. Aguiar Aline B. Loreto	
DOI 10.22533/at.ed.51419240518	
CAPÍTULO 19	173
QUANTIFICAÇÃO DE AZEITE DE OLIVA EM MISTURAS COM ÓLEOS VEGETAIS UTILIZANDO FTIR E CALIBRAÇÃO POR REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA	
Lucas Wahl da Silva Clayton Antunes Martin	
DOI 10.22533/at.ed.51419240519	
CAPÍTULO 20	177
QUANTIFICAÇÃO DE PARTÍCULAS POR ESPALHAMENTO DE LUZ E DETERMINAÇÃO DA COR	

DE ÁGUAS

David Antonio Brum Siepmann
Ricardo Schneider
Alberto Yoshihiro Nakano
Paulo Afonso Gaspar
Antonio Cesar Godoy
Felipe Walter Dafico Pfrimer

DOI 10.22533/at.ed.51419240520

CAPÍTULO 21 193

AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE MUROS DE GRAVIDADE CONSTRUÍDO COM SOLO-PNEUS

Guilherme Faria Souza Mussi de Andrade
Daniel Silva Lopez
Bruno Teixeira Lima
Ana Cristina Castro Fontenla Sieira
Alberto de Sampaio Ferraz Jardim Sayão

DOI 10.22533/at.ed.51419240521

SOBRE OS ORGANIZADORES..... 208

DUAS PARTÍCULAS NUM BILHAR QUÂNTICO

Pedro Chebensi Júnior

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Ponta Grossa - Paraná
pedroj@alunos.utfpr.edu.br

Hércules Alves de Oliveira Junior

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Ponta Grossa – Paraná
hercules@utfpr.edu.br

RESUMO: O conhecimento da dinâmica de bilhares é aplicado diretamente no estudo de pontos quânticos. Em geral são estudados sistemas clássicos, mas sabe-se que sistemas reais, na realidade, pertencem à Mecânica quântica. Dessa forma, busca-se entender o que ocorre na dinâmica de dois elétrons com spin e interação num bilhar com paredes suaves. Para isso, precisa-se entender como sistemas mais simples se comportam. Neste sentido, estuda-se uma partícula dentro de um potencial infinito, um bilhar quântico simples. São observadas as características do sistema quando duas partículas, sem interação, são inseridas no bilhar. Através do método de soluções de equações diferenciais ordinárias e parciais, foram obtidas as soluções para as equações de Schrödinger

independente do tempo, para uma e para duas partículas. Também é mostrado que os valores esperados para a posição e momento ao quadrado são diferentes de zero. Os resultados obtidos concordam com a literatura existente. As soluções para duas partículas são pouco conhecidas e mostram que o comportamento de cada partícula não é afetado pelo da outra. Mostra-se que o princípio de incerteza é mantido para os valores de uma e de duas partículas idênticas num bilhar unidimensional.

PALAVRAS-CHAVE: Elétrons interagentes. Bilhar quântico. Dinâmica quântica.

ABSTRACT: The knowledge of billiard dynamics is applied directly on quantum dots studies. In general classical systems are studied, but the real systems belong to quantum mechanics. In this way, seeks out understand that happened on two interacting electrons dynamics' with spin in a billiard with soft walls. It's needed to know how is the behavior of simpler systems. In this sense, it is studied one particle inside of a infinity potential, called simple quantum billiard. The characteristics of the system are observed when the billiard has two particles without interacting. Through the method of solution of ordinary and partial differential equations, we found the solutions of the time independent Schrödinger equation. We have shown that the expected values for position and momentum

are different from zero. The results agree with the literature. The solutions are little known and they show the dynamics of particles are independent. We show that the principle of uncertainty of Heisenberg is sustained for one and two particles in a one-dimensional billiard.

KEYWORDS: Interacting electrons, Quantum billiard, Quantum dynamics.

1 | INTRODUÇÃO

Um Bilhar é um sistema composto de partículas confinadas em uma região determinada. Em geral, são estudados apenas partículas clássicas, que podem ser descritas pelas suas posições e velocidades. Os bilhares podem ter geometria diversa em uma dimensão como uma linha, em duas dimensões como um círculo ou em três dimensões como um cilindro (OLIVEIRA et. al. 2008).

Quanticamente, bilhares aparecem nos chamados Pontos Quânticos (QUANTUM DOTS) (LIU et. al., 2017) e Nanotubos. Estes estão intimamente ligados à Física, Ciência dos Materiais e à medicina.

Classicamente, OLIVEIRA et. al. (2008), mostraram que o sistema com duas partículas interagentes e paredes suaves como potencial apresenta comportamento dinâmico caótico e regular, coexistindo no espaço de fases. O mesmo estudo ainda não foi feito para um sistema quântico. Neste sentido, buscamos entender o comportamento de dois elétrons num potencial suaves. Para isso, precisamos determinar como uma partícula se comporta num bilhar infinito, chamado de poço de potencial infinito costumeiramente. Na sequência, introduzimos duas partículas sem interação, para que, nos passos seguintes, elas possam interagir e serem substituídas por elétrons com spin.

O problema mais usual de partículas confinadas em Mecânica Quântica é o de uma partícula submetida a um potencial infinito, onde o potencial pode ser definido como:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, x = L \\ 0, & 0 < x < L \end{cases} \quad (1)$$

Partindo da equação de Schrödinger independente do tempo.

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (2)$$

Onde $\left\langle x \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} \right| \psi(x) \right\rangle = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$ e $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, em que h é a constante de Planck e d/dx representa a derivada em relação a x .

O interesse é saber qual o comportamento da partícula dentro do potencial. Com

isso, o potencial se anula $V(x) = 0$ e devemos utilizar as condições de contorno para a função $\psi(x)$ na forma $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Note que $\frac{d\psi(x)}{dx} \neq 0$. Assim, a equação (2) torna-se (3) e resolvendo (3):

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \quad (3)$$

2 | SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Através das Álgebra linear e Equações diferenciais ordinárias e parciais, conseguimos obter as soluções para a equação de Schrodinger e os valores esperados para x e P . A solução encontrada é:

$$\psi(x) = B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4)$$

A constante B é determinada pela normalização da função de onda $\psi(x)$ como sendo $\sqrt{\frac{2}{L}}$, dada pelo produto interno (COHEN-TANNOUDJI, 1977).

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int \langle \psi | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx = \int \bar{\psi}(x) \psi(x) dx = 1 \quad (5)$$

Onde $\psi(x)$ é a função de onda e $\bar{\psi}(x)$ é a função de onda complexa e conjugada. Obtemos como solução da equação (3) normalizada (SAKURAI, 1994).

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (6)$$

O comportamento da função de onda e da densidade de probabilidades para diferentes n 's pode ser visto na figura (1):

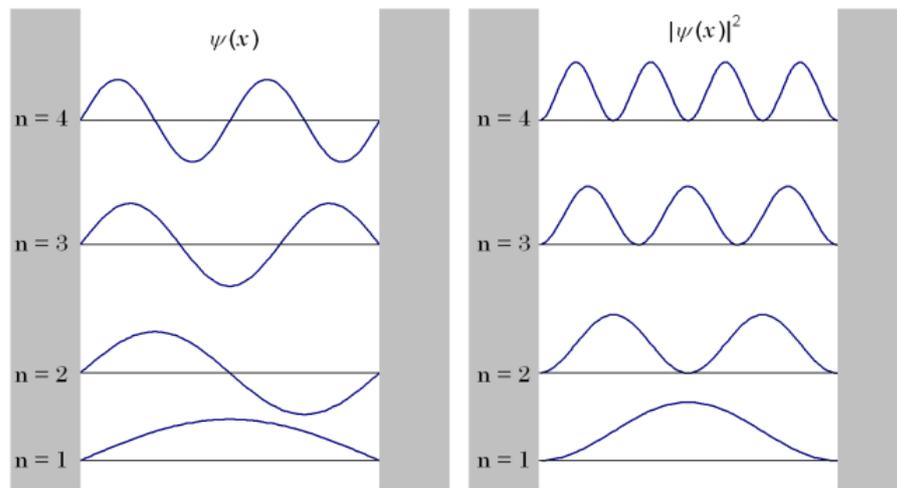


Figura 1: Função de Onda (esquerda), Densidade de probabilidade (direita).

Fonte: <http://la-mecanica-cuantica.blogspot.com.br/2009/08/interpretacion-probabilista-de.html>

Os valores esperados para a posição são dados por:

$$\langle x \rangle = \int_0^L x \bar{\psi}(x) \psi(x) dx = \int_0^L x \left[\sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]^2 dx = \frac{L}{2} \quad (7)$$

Facilmente podemos obter o valor esperado ao quadrado como sendo $\langle x \rangle^2 = \frac{L^2}{4}$ e o valor quadrático esperado como:

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^L x^2 \bar{\psi}(x) \psi(x) dx = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2} \quad (8)$$

O mesmo se faz com o momento, com:

$$\langle P \rangle = \int_0^L \bar{\psi}(x) (-i\hbar) \frac{d\psi(x)}{dx} dx = 0 \quad (9)$$

Conseqüentemente e

$$\langle P^2 \rangle = \int_0^L \bar{\psi} (-i\hbar) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} dx = \left(\frac{n\pi\hbar}{L} \right)^2 \quad (10)$$

Em posse desses resultados, podemos obter o desvio padrão da forma:

$$\Delta P = \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2} = \frac{n\pi\hbar}{L} \quad (11)$$

E para a posição:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{L^2}{12} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2} \quad (12)$$

O princípio de incerteza de Heisenberg nos diz que não existe precisão na posição

e no momento, ou velocidade, de uma partícula ao mesmo tempo. Isso é expresso pela relação de desigualdade:

$$\Delta x \Delta P \geq 0,5\hbar \quad (13)$$

Comparando os resultados para os quatro primeiros valores de n, temos:

$$n = 1 \Delta x \Delta P = 0,56786\hbar \quad (14)$$

$$n = 2 \Delta x \Delta P = 1,67028\hbar \quad (15)$$

$$n = 3 \Delta x \Delta P = 2,62720\hbar \quad (16)$$

$$n = 4 \Delta x \Delta P = 3,55801\hbar \quad (17)$$

Os resultados das equações (14), (15), (16) e (17) nos dizem que o princípio de incerteza foi respeitado, pois obtivemos múltiplos da constante de Planck.

3 | DUAS PARTÍCULAS IDÊNTICAS NÃO INTERAGENTES NUM BILHAR UNIDIMENSIONAL

Considerando duas partículas idênticas confinadas num bilhar delimitado por potenciais infinitos, com potencial definido pela equação (1). As partículas não interagem e suas massas são iguais e definidas como $m_1 = m_2 = m$.

O estado do sistema agora é definido como $|\psi\rangle = |\psi_1\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ e, para ficar mais claro como se chega nas soluções esperadas, partimos da equação de autovalor independente do tempo.

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle = H|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = E|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \quad (18)$$

onde o sinal (\otimes) indica o produto tensorial no espaço vetorial de Hilbert (SAKURAI, 1994). Aplicando a base de X_1 e X_2 temos a equação de Schrödinger independente do tempo para duas partículas.

$$\begin{aligned} & \frac{-\hbar^2\psi_2(x_2)}{2m} \frac{\partial^2\psi_1(x_1)}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2\psi_1(x_1)}{2m} \frac{\partial^2\psi_2(x_2)}{\partial x_2^2} \\ & = E\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \end{aligned} \quad (19)$$

A função de onda agora é escrita como $\psi = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$. Resolvendo a equação diferencial pelo método da separação de variáveis para Equações Diferenciais Parciais (COHEN-TANNOUDJI, 1977) obtemos os seguintes resultados para solução geral:

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{2}{L} \text{sen} \left(\frac{n\pi x_1}{L} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x_2}{L} \right) \quad (20)$$

Os valores esperados para a posição e momento seguem a mesma sequência anterior, mas com as peculiaridades da matemática de duas partículas. Os valores esperados para uma das partículas são dados por:

$$\langle x_1 \rangle = \int_0^L x_1 \bar{\psi}_1(x_1) \psi_1(x_1) dx_1 \int_0^L |\psi_2(x_2)|^2 dx_2 = \frac{L}{2} \quad (21)$$

Como as partículas são independentes podemos fazer a seguinte consideração

$$\begin{aligned} \langle P_1 \rangle &= \int \langle \psi_2 \psi_1 | \hat{P}_1 | \psi_1 \psi_2 \rangle \\ &= \int_0^L \int_0^L \langle \psi_2 \psi_1 | x_1 x_2 \rangle \langle x_2 x_1 | \hat{P}_1 | \psi_1 \psi_2 \rangle dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (22)$$

a seguinte consideração:

Igual a

E igual a

$$\int_0^L dx_2 \int_0^L \bar{\psi}_1(x_1) \bar{\psi}_2(x_2) (-i\hbar) \frac{d\psi_1(x_1) \psi_2(x_2)}{dx_1} dx_1 \quad (23)$$

$$-i\hbar \int_0^L \bar{\psi}_2(x_2) \psi_2(x_2) dx_2 \int_0^L \bar{\psi}_1(x_1) \frac{d\psi_1(x_1)}{dx_1} dx_1 = 0 \quad (24)$$

Os valores esperados para $\langle x_1 \rangle$, $\langle x_2 \rangle$, $\langle x_1^2 \rangle$, $\langle x_2^2 \rangle$, $\langle x_1^2 \rangle$, $\langle x_2^2 \rangle$, $\langle P_1 \rangle$, $\langle P_2 \rangle$, $\langle P_1^2 \rangle$, $\langle P_2^2 \rangle$, $\langle P_1^2 \rangle$ e $\langle P_2^2 \rangle$ são os mesmos obtidos nas equações (7), (8), (9) e (10).

Sabendo dessas igualdades, são gerados os mesmos resultados para o desvio. Assim, o princípio de incerteza de Heisenberg continua sendo respeitado.

4 | CONCLUSÃO

Dois sistemas quânticos foram estudados, um com uma partícula confinada num potencial infinito e outro com duas partículas idênticas no mesmo potencial. As soluções para as equações de Schrödinger são obtidas para uma e para duas partículas não interagentes. Os resultados mostraram que o princípio de incerteza de Heisenberg é respeitado, pois as dinâmicas das duas partículas são independentes no caso em que não há interação entre elas. Na perspectiva de trabalho futuro, o próximo passo a ser realizado é inserir interação entre as partículas e substituí-las por elétrons.

5 | AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação Araucária e à Universidade Tecnologia Federal do Paraná, pelo espaço cedido e pelo suporte financeiro. Pedro agradece ao professor orientador, pela escolha do tema tratado nesse trabalho e disponibilidade em agregar conhecendo.

REFERÊNCIAS

COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum Mechanics**. New York: John-wiley, v. 1, 1977.

LIU, X; BRAUN, G. B.; QIN, M.; RUOSLAHTI, E.; SUGAHARA, K. N. **In vivo cation exchange in quantum dots for tumor-specific imaging**, Nat. Commun. 8, 343, 2017.

OLIVEIRA, H. A.; MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W. **Soft wall effects on interacting particles in billiards**, Phys. Rev. E, 78, 046208, 2008.

SAKURAI, J. J.; TUAN, S. F. **Modern Quantum Mechanics**. New York: Addison – Wesley, 1994.

SOBRE OS ORGANIZADORES

JORGE GONZÁLEZ AGUILERA Engenheiro Agrônomo (Instituto Superior de Ciências Agrícolas de Bayamo (ISCA-B) hoje Universidad de Granma (UG)), Especialista em Biotecnologia pela Universidadde Oriente (UO), CUBA (2002), Mestre em Fitotecnia (UFV/2007) e Doutorado em Genética e Melhoramento (UFV/2011). Atualmente, é professor visitante na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) no Campus Chapadão do Sul. Têm experiência na área de melhoramento de plantas e aplicação de campos magnéticos na agricultura, com especialização em Biotecnologia Vegetal, atuando principalmente nos seguintes temas: pre-melhoramento, fitotecnia e cultivo de hortaliças, estudo de fontes de resistência para estres abiótico e biótico, marcadores moleculares, associação de características e adaptação e obtenção de vitroplantas. Tem experiência na multiplicação “on farm” de insumos biológicos (fungos em suporte sólido; Trichoderma, Beauveria e Metharrizum, assim como bactérias em suporte líquido) para o controle de doenças e insetos nas lavouras, principalmentede soja, milho e feijão. E-mail para contato: jorge.aguilera@ufms.br

ALAN MARIO ZUFFO Engenheiro Agrônomo (Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT/2010), Mestre em Agronomia – Produção Vegetal (Universidade Federal do Piauí –UFPI/2013), Doutor em Agronomia – Produção Vegetal (Universidade Federal deLavras – UFLA/2016). Atualmente, é professor visitante na Universidade Federal doMato Grosso do Sul – UFMS no Campus Chapadão do Sul. Tem experiência naárea de Agronomia – Agricultura, com ênfase em fisiologia das plantas cultivadas e manejo da fertilidade do solo, atuando principalmente nas culturas de soja, milho, feijão, arroz, milheto, sorgo, plantas de cobertura e integração lavoura pecuária. E-mail para contato: alan_zuffo@hotmail.com

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-351-4

