

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

 **Atena**
Editora
Ano 2019

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
(Organizador)

Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2019 Os Autores
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora
Editora Executiva: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof^a Dr^a Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof.^a Dr.^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof.^a Dr.^a Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Dr.^a Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof.^a Dr.^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof.^a Dr.^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof.^a Dr.^a Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof.^a Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof.^a Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
E24	Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2) Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-348-4 DOI 10.22533/at.ed.484192405 1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série. CDD 510.7
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
O ALGORITMO ESPECTRAL COMO ALTERNATIVA AO ALGORITMO K-MEANS EM CONJUNTO DE DADOS ARTIFICIAIS	
Luciano Garim Garcia Leonardo Ramos Emmendorfer	
DOI 10.22533/at.ed.4841924051	
CAPÍTULO 2	16
NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza Hélio Magalhães De Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.4841924052	
CAPÍTULO 3	24
ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza	
DOI 10.22533/at.ed.4841924053	
CAPÍTULO 4	32
ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA	
Amanda Barretos Lima Garuth Brenda Anselmo Mendes Isabela Geraldo Reghin Rosângela Teixeira Guedes	
DOI 10.22533/at.ed.4841924054	
CAPÍTULO 5	46
DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	
Mariana Coelho Portilho Bernardi Adilandri Mércio Lobeiro Jeferson Rafael Bueno Thiago José Sepulveda da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.4841924055	
CAPÍTULO 6	57
MODELO MATEMÁTICO PARA AUXILIAR O PLANEJAMENTO DA MANUTENÇÃO PREVENTIVA DE MOTORES ELÉTRICOS	
Thalita Monteiro Obal Jonatas Santana Obal	
DOI 10.22533/at.ed.4841924056	

CAPÍTULO 7	64
PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE FLUXO EM AQUÍFERO CONFINADO	
João Paulo Martins dos Santos Alessandro Firmiano de Jesus Edson Wendland	
DOI 10.22533/at.ed.4841924057	
CAPÍTULO 8	83
RESONANT ORBITAL DYNAMICS OF CBERS SATELLITES	
Jarbas Cordeiro Sampaio Rodolpho Vilhena de Moraes Sandro da Silva Fernandes	
DOI 10.22533/at.ed.4841924058	
CAPÍTULO 9	91
TESTES ADAPTATIVOS ENVOLVENDO O CONTEÚDO DE DERIVADAS: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL	
Patrícia Liane Grudzinski da Silva Claudia Lisete Oliveira Groenwald	
DOI 10.22533/at.ed.4841924059	
CAPÍTULO 10	104
LOCALIZAÇÃO DE FALTAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO POR ANÁLISE DE SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO	
Danilo Pinto Moreira de Souza Eliane da Silva Christo Aryfrance Rocha Almeida	
DOI 10.22533/at.ed.48419240510	
CAPÍTULO 11	116
MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA	
Gustavo Henrique Petrolí Norberto Anibal Maidana	
DOI 10.22533/at.ed.48419240511	
CAPÍTULO 12	133
LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO	
Claudio Fuentealba Edelmira Badillo Gloria Sánchez-Matamoros Andrea Cárcamo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240512	
CAPÍTULO 13	143
OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
Márcio Aurélio da Silva Fran Sérgio Lobato Aldemir Ap Cavalini Jr Valder Steffen Jr	
DOI 10.22533/at.ed.48419240513	

CAPÍTULO 14	156
SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY	
Gino Gustavo Maqui Huamán	
Ulcilea Alves Severino Leal	
Geraldo Nunes Silva	
DOI 10.22533/at.ed.48419240514	
CAPÍTULO 15	164
VALIDAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA O ESCOAMENTO DE GRÃOS DE SOJA	
Rodolfo França de Lima	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Dirceu Lima dos Santos	
Adriano Pilla Zeilmann	
DOI 10.22533/at.ed.48419240515	
CAPÍTULO 16	181
TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA	
Landy Sosa Moguel	
Guadalupe Cabañas-Sánchez	
Eddie Aparicio Landa	
DOI 10.22533/at.ed.48419240516	
CAPÍTULO 17	192
SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE	
Francisco Helmuth Soares Dias	
Jacques Aveline Loureiro da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.48419240517	
CAPÍTULO 18	199
SIMULAÇÃO 3D DO FLUXO DE AR DE UM SISTEMA REAL DE ARMAZENAGEM DE GRÃOS	
Vanessa Faoro	
Rodolfo França de Lima	
Aline Tampke Dombrowski	
Manuel Osório Binelo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240518	
CAPÍTULO 19	207
CONTROLE ÓTIMO DO FLUXO DE ÁGUA EM UMA FÔRMA DE GELO	
Xie Jiayu	
João Luis Gonçalves	
DOI 10.22533/at.ed.48419240519	
CAPÍTULO 20	213
CÓDIGOS CÍCLICOS DEFINIDOS POR ANULAMENTO	
Conrado Jensen Teixeira	
Osnel Broche Cristo	
DOI 10.22533/at.ed.48419240520	

CAPÍTULO 21	216
ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA	
Bruno Carlos Lugão Diego Campos Knupp Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues Antônio José da Silva Neto	
DOI 10.22533/at.ed.48419240521	
CAPÍTULO 22	225
ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	
Ronaldo Mendes Evaristo Kelly Cristiane Iarosz Silvio Luiz Thomaz de Souza Ricardo Luiz Viana Moacir Fernandes de Godoy Antonio Marcos Batista	
DOI 10.22533/at.ed.48419240522	
CAPÍTULO 23	235
CONSTRUÇÃO DE UM AEROMODELO DE MACARRÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA	
Alissan Sarturato Firão Ernandes Rocha de Oliveira Zulind Luzmarina Freitas	
DOI 10.22533/at.ed.48419240523	
SOBRE O ORGANIZADOR	239

OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Márcio Aurélio da Silva

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade
de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Fran Sérgio Lobato

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade
de Engenharia Química
Uberlândia – MG

Aldemir Ap Cavalini Jr

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade
de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Valder Steffen Jr

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade
de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

RESUMO: Nos últimos anos, inúmeros pesquisadores têm se dedicado ao desenvolvimento de estratégias para o tratamento de problemas que apresentam incertezas no modelo matemático, no vetor de variáveis e/ou no vetor de parâmetros. A presente contribuição tem por objetivo o desenvolvimento de uma estratégia para o tratamento de incertezas no vetor de variáveis de busca em problemas de otimização. A metodologia proposta consiste na associação do algoritmo de Evolução Diferencial (ferramenta para a otimização) com a técnica denominada

de Análise de Confiabilidade Inversa (ferramenta para o tratamento de incertezas). Os resultados obtidos com a aplicação em funções matemáticas demonstram que a metodologia proposta configura-se como uma alternativa interessante em relação às técnicas tradicionais que são empregadas para essa finalidade. Todavia, cabe ressaltar que, devido a natureza do algoritmo de otimização utilizado, o número de avaliações da função objetivo é bastante superior ao utilizado por estratégias clássicas.

PALAVRAS-CHAVE: Otimização Baseada em Confiabilidade, Evolução Diferencial, Análise de Confiabilidade Inversa, Funções Matemáticas.

ABSTRACT: In the last years, various researchers have been dedicating their efforts on the development of new strategies to deal with problems that present uncertainty in the mathematical model, in the vector of variables, and/or in the vector of parameters. In this context, the present contribution aims at developing a strategy for the treatment of uncertainties in the vector of variables associated with optimization problems. The proposed methodology associates the Differential Evolution algorithm (a tool for optimization) and the Inverse Reliability Analysis approach (a tool for the treatment of uncertainties). The results obtained using mathematical functions demonstrate that the

proposed methodology is an interesting alternative strategy as compared with traditional techniques. However, due to the nature of the optimization algorithm used, the number of objective function evaluations is greater than the one required by classic strategies. **KEYWORDS:** Reliability-Based Optimization, Differential Evolution, Inverse Reliability Analysis, Mathematical Functions.

1 | INTRODUÇÃO

Tradicionalmente, durante o processo de otimização considera-se que o valor da função objetivo não é influenciado por incertezas presentes, seja na modelagem do problema de interesse, no vetor de variáveis de busca e/ou no vetor de parâmetros, caracterizando a otimização determinística ou nominal (DEB et al., 2009). Todavia, na prática, a implementação do resultado oriundo da otimização determinística pode ser sensível a pequenas perturbações, o que pode implicar em desvios significativos no valor da função objetivo obtida, comprometendo o desempenho do sistema. Um exemplo prático dessa influência pode ser observado na manufatura de componentes de máquinas. Neste caso, apesar da precisão associada a este procedimento, os erros de produção são inerentes ao próprio processo, e estes podem influenciar o desempenho do projeto como um todo.

Para a avaliação da influência de incertezas durante o processo de otimização, dois tipos de abordagens têm sido empregados, a saber, a otimização robusta e a otimização baseada em confiabilidade. Na otimização robusta objetiva-se determinar uma solução que seja pouco sensível a pequenas perturbações do vetor de variáveis de busca a partir da geração de amostras na vizinhança da mesma (TAGUCHI, 1984). Já a otimização baseada em confiabilidade consiste na obtenção de uma solução que, sob determinadas condições (avaliação do coeficiente de confiabilidade), não viole uma ou mais restrições probabilísticas (CARTER, 1997). Embora estas duas abordagens tenham a mesma finalidade, isto é, quantificar incertezas, são estratégias conceitualmente distintas (LOBATO et al., 2017). Por outro lado, ambas possuem uma mesma desvantagem, a saber, requerem um número maior de avaliações da função objetivo em relação ao necessário na solução determinística. Assim, obter uma solução considerando incertezas implica em realizar um número maior de avaliações da função objetivo (LOBATO et al., 2017).

Diante do que foi apresentado acima, esta contribuição tem por objetivo propor uma metodologia para a solução de problemas de otimização considerando incertezas no vetor de variáveis de busca. A metodologia proposta consiste na associação do algoritmo de Evolução Diferencial (ED) (STORN e PRICE, 1997) com a técnica denominada como Análise de Confiabilidade Inversa (IRA - *Inverse Reliability Analysis*) (DU, 2005).

Neste contexto, este trabalho está estruturado como segue. A seção 2 apresenta aspectos relacionados com a otimização baseada em confiabilidade. Já nas seções

3 e 4 são apresentados, brevemente, os conceitos do algoritmo ED e a descrição da metodologia para a inserção de confiabilidade, respectivamente. Os resultados obtidos com a aplicação da metodologia proposta em funções matemáticas são apresentados na seção 5. Finalmente, as conclusões são mostradas na última seção deste trabalho.

2 | OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE

Como observado na Figura 1, a solução de um problema de otimização determinístico é obtida pela ativação de uma ou mais restrições (equação de estado limite). Neste caso, qualquer perturbação no vetor solução (x_1 e x_2) pode resultar em uma solução inviável e com uma distribuição de probabilidade em torno da solução ótima.

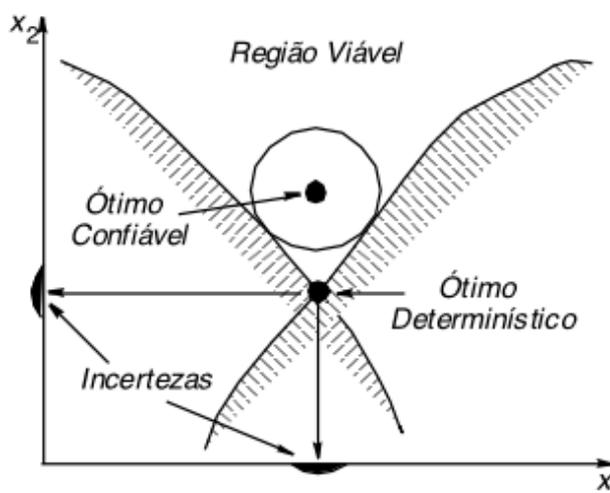


Figura 1 – Conceito de otimização baseada em confiabilidade.

Conforme destacado por Deb et al. (2009), obter uma solução confiável, isto é, associada a uma dada probabilidade, implica na penalização da solução determinística. Neste caso, observa-se que uma solução confiável deverá apresentar um valor pior em termos da função objetivo do que aquele considerando na solução determinística. Conceitualmente, este problema pode ser definido da seguinte forma (LOBATO et al., 2017): a partir de uma dada medida de confiabilidade R , objetiva-se encontrar uma solução viável que garanta que a probabilidade de encontrar uma solução inviável seja dada por $1-R$. Matematicamente, este problema pode ser formulado como:

$$\min f(x_d, x_r) \quad (1)$$

$$P(G_j(x_d, x_r) \leq 0) \geq R_j, \quad j = 1, \dots, n_g \quad (2)$$

$$x_{di}^l \leq x_d \leq x_{di}^u, \quad i = 1, \dots, n_d, \quad x_{rk}, \quad k = 1, \dots, n_r \quad (3)$$

em que f e G_j representam a função objetivo e as restrições, respectivamente,

x_d é o vetor de variáveis de busca (valores determinísticos associados aos limites superiores x_{di}^l e inferiores x_{di}^u), x_r é o vetor de variáveis aleatórias, n_g é o número de restrições probabilísticas, n_d é o número de variáveis de busca, n_r é o número de variáveis aleatórias e R_j é a confiabilidade desejada. P é a probabilidade de G_j ser menor ou igual a zero ($G_j=0$ indica falha).

A probabilidade de falha pode ser definida por uma função de distribuição cumulativa, isto é:

$$P(G_j(x_d, x_r) \leq 0) = \int \dots \int_{G_j \leq 0} f_x(x_r) dx_r \quad (4)$$

em que f_x é uma função de densidade de probabilidade conjunta.

A integral dada pela Equação 4 deve ser avaliada ao longo do espaço de busca definido pelas restrições de desigualdade para determinar a probabilidade de falha P . A avaliação analítica (ou numérica) desta integral é uma tarefa complexa devido ao domínio considerado. Para superar esta dificuldade, o problema original, definido em termos das variáveis aleatórias x_r , pode ser reescrito em termos de um novo conjunto de variáveis aleatórias u usando a transformação de Rosenblatt (1952). Nesta abordagem, considerando o novo espaço de busca em termos do vetor u , o ponto mais provável para a falha é encontrado localizando a distância mínima entre a origem e a equação de estado limite, que é definida em termos do coeficiente de confiabilidade β . Assim, a restrição probabilística pode ser expressa através de uma transformação inversa, dada pela Equação 5.

$$P(G_j(x_d, x_r, x_p) \leq 0) = \Phi(\beta) \quad (5)$$

em que Φ é a função de distribuição normal padrão. Esta transformação é utilizada para medir a confiabilidade associada e evitar a avaliação analítica ou numérica da integral apresentada na Equação 4.

Dentre as técnicas empregadas para a avaliação das restrições probabilísticas (Equação 5) pode-se citar os tradicionais métodos de Monte Carlo, o FORM (*First-Order Reliability Method*) e o SORM (*Second-Order Reliability Method*). O Método de Monte Carlo, também conhecido como simulação estocástica, pode ser definido como uma abordagem empregada para representar a solução de um problema a partir da caracterização de uma população hipotética, gerada a partir de observações considerando algum tipo de distribuição de probabilidade (GENTLE, 2002). O método FORM consiste de uma aproximação analítica (linear) para a restrição de desigualdade na qual o índice de confiabilidade é interpretado como a distância mínima entre a origem

e a equação de estado limite normal padronizada em termos da variável u (HASOFER e LIND, 1974; SHINOZUKA, 1983). Já o método SORM foi proposto como uma tentativa de melhorar a precisão do FORM. O SORM consiste de uma aproximação quadrática para a equação de estado limite no espaço u (FIESSLER et al., 1979). Para essa finalidade, o resultado obtido com o FORM é atualizado considerando informações oriundas do cálculo da matriz de derivadas segundas (matriz Hessiana).

Diferentemente das estratégias apresentadas, a próxima seção trata da metodologia empregada para o tratamento de incertezas. Esta se fundamenta na formulação e resolução de um problema inverso.

2.1 Análise de Confiabilidade Inversa

Para a avaliação do vetor de restrições probabilísticas (Equação 5) será considerada a técnica proposta por Du (2005) e denominada como IRA. Esta abordagem consiste na formulação e resolução de um problema inverso para a análise de confiabilidade, isto é, a partir da definição da confiabilidade R ou do coeficiente de confiabilidade β , obtêm-se o ponto mais provável para a falha. De posse deste ponto, a restrição probabilística pode ser avaliada e o efeito prático da presença de incertezas pode ser contabilizado.

Para aplicar esta abordagem, o vetor de variáveis aleatórias x_r é reescrito em termos do vetor u , conforme a justificativa apresentada anteriormente. Em linhas gerais, o procedimento para a determinação do ponto mais provável de falha u é descrito como segue (DU, 2005):

- Passo 1: Inicialmente, define-se os parâmetros de entrada do IRA, isto é, uma estimativa inicial para o vetor u ($u^0=0$ foi o valor considerado neste trabalho), o valor do índice de confiabilidade β desejado e o tipo de distribuição considerado para cada uma das variáveis (ou parâmetros) que apresentam incerteza;
- Passo 2: Avalia-se, em cada iteração, o gradiente das restrições para a atualização do parâmetro a^k , conforme a seguinte relação:

$$a^k = \frac{\nabla G_j(u^k)}{\|\nabla G_j(u^k)\|} \quad (6)$$

- Passo 3: Atualiza-se o vetor u conforme a relação $u^{k+1} = -\beta a^k$, bem como o contador para o número de iterações $k=k+1$;
- Passo 4: Repete-se este procedimento (Passos 2 e 3) até que um determinado critério de parada seja satisfeito. Neste caso, definiu-se como critério de parada a norma Euclidiana em relação ao vetor u calculada em duas iterações consecutivas ser menor do que 10^{-5} .

Como pode ser observado neste procedimento, faz-se necessária a definição do valor do índice de confiabilidade β desejado, o que caracteriza o problema inverso diferentemente dos métodos FORM e SORM, onde este índice é um parâmetro de

saída destes algoritmos.

3 | ALGORITMO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Para resolver o problema de otimização formulado anteriormente, será considerado o algoritmo ED (STORN e PRICE, 1997). Esta abordagem heurística consiste da geração de uma população de candidatos para a resolução de problemas de otimização, em que são empregadas operações vetoriais para essa finalidade. Em linhas gerais, a partir da geração de uma população com NP candidatos, seleciona-se dois destes (candidatos distintos) para a realização de uma subtração vetorial. Esta subtração é ponderada por uma constante F (denominada de taxa de perturbação). A esta operação é adicionada a um outro indivíduo (distinto dos outros dois) de modo que este seja perturbado. O indivíduo gerado via este procedimento é avaliado de acordo com a função objetivo considerada, sendo que este pode ou não substituir um indivíduo da população corrente. Para essa finalidade, a partir da comparação de uma probabilidade de cruzamento CR definida pelo usuário, com um número aleatório entre 0 e 1, avalia-se se este novo candidato poderá substituir ou não um outro na geração corrente. Este teste tem por objetivo permitir que um indivíduo que não tenha um bom valor em termos da função objetivo, sobreviva, pelo menos para a próxima geração, de modo a promover a diversidade da população. O procedimento apresentado é repetido até que uma nova população seja gerada e até o número máximo de gerações ser alcançado (critério de parada *default* do algoritmo de ED).

Storn e Price (1997) propuseram inicializar o algoritmo de ED considerando NP como sendo um valor entre 5 e 10 vezes a dimensão do problema em análise, F definido no intervalo 0,4 e 1, sendo 0,5 uma boa estimativa para esse parâmetro. Esses autores também recomendam uma probabilidade de cruzamento da ordem de 0,8. Já a geração de candidatos em potencial pode ser realizada considerando diferentes esquemas de mutação, dentre os quais pode-se citar os seguintes (STORN e PRICE, 1997).

$$rand/1 \rightarrow x = x_{\alpha_1} + F(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_3}) \quad (7)$$

$$rand/2 \rightarrow x = x_{\alpha_1} + F(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_3} + x_{\alpha_4} - x_{\alpha_5}) \quad (8)$$

$$best/1 \rightarrow x = x_{best} + F(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_3}) \quad (9)$$

$$best/2 \rightarrow x = x_{best} + F(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_3} + x_{\alpha_4} - x_{\alpha_5}) \quad (10)$$

$$rand/best/2 \rightarrow x = x_{r_1} + F(x_{best} - x_{r_1}) + F(x_{r_1} - x_{r_2} + x_{r_3} - x_{r_4}) \quad (11)$$

em que $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, x_{\alpha_4}$ e x_{α_5} são indivíduos aleatoriamente escolhidos na população corrente e x_{best} é a melhor solução encontrada na geração corrente.

4 | METODOLOGIA

A metodologia proposta neste trabalho e denominada como ED+IRA é baseada em um processo de iteração de laço duplo. No laço externo, o algoritmo de ED é aplicado para determinar o valor das variáveis de busca que não apresentam qualquer tipo de incerteza a elas associada. No laço interno, o procedimento IRA é executado para encontrar o vetor u para cada uma das variáveis que apresentam incerteza, de modo que todos os candidatos gerados pelo algoritmo de ED possam ser avaliados de acordo com a função objetivo e as restrições (determinísticas e probabilísticas).

Em linhas gerais, o procedimento adotado neste trabalho pode ser resumido como segue: *i)* Definir os parâmetros de entrada, ou seja, a função objetivo, restrições, número de variáveis de busca (variáveis determinísticas no algoritmo de ED), índice de confiabilidade, tipo de distribuição e os parâmetros do algoritmo de ED - tamanho da população, número de gerações, taxa de perturbação, probabilidade de cruzamento e a estratégia para a geração de candidatos; *ii)* Laço externo: a população de candidatos é gerada usando o algoritmo de ED onde apenas o vetor de variáveis determinísticas x_d é gerado; *iii)* Laço interno: para cada candidato gerado pelo algoritmo de ED, o IRA é aplicado para determinar o valor de cada restrição de desigualdade através do cálculo do vetor de variáveis aleatórias u e, conseqüentemente, x_r ; *iv)* Atualizar os valores de x_d e x_r para avaliar a função objetivo e as restrições, o que é realizado utilizando o Método da Função Penalidade; *v)* Repetir o processo iterativo até que a convergência seja alcançada.

5 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na presente seção, a metodologia proposta será empregada para a resolução de três estudos de caso. Para essa finalidade foram considerados os seguintes parâmetros:

- Algoritmo de ED: 10 indivíduos, 100 gerações, taxa de perturbação e probabilidade de cruzamento iguais a 0,8, estratégia DE/rand/1/bin para a geração de candidatos potenciais (STORN e PRICE, 1997) e número máximo de gerações como critério de parada;
- Considera-se $u=0$ na primeira iteração do IRA;
- Norma Euclidiana menor que 10^{-5} como critério de parada do IRA;
- As derivadas de G_j foram obtidas analiticamente;
- Todos os estudos de caso foram executados 10 vezes considerando diferentes sementes para a inicialização do gerador de números aleatórios no algoritmo de ED, de modo que sejam apresentados os valores médios, bem com os desvios padrão associados.

5.1 Estado Limite Não-Linear

O primeiro estudo de caso foi proposto e resolvido por Aoues e Chateauneuf (2009) e consiste da otimização da seguinte função matemática:

$$\min_{x_d} x_{d1}^2 + x_{d2}^2 \quad (12)$$

$$P(x_{d1}x_{d2}x_{r2} - \ln(x_{r1}) \leq 0) \geq R \quad (13)$$

$$0 \leq x_{di} \leq 15, \quad i = 1,2 \quad (14)$$

Este problema contém duas variáveis de busca (x_{d1} e x_{d2}) e duas variáveis aleatórias (x_{r1} e x_{r2}), que são normalmente distribuídas com médias iguais a 5 e 3, respectivamente. Os coeficientes de variação são iguais a 0,3 para ambas as variáveis. A confiabilidade R é igual a 98,9830% ($\beta=2,32$).

Aoues e Chateauneuf (2009) analisaram este problema considerando o par $(x_{d1}; x_{d2})=(12;12)$ como estimativa inicial e as seguintes abordagens: *Reliability Index Approach* (RIA) ($f=63,88$ e 466 avaliações da função objetivo), *Performance Measure Approach* (PMA) ($f=63,88$ e 220 avaliações da função objetivo), *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) ($f=63,88$ e 211 avaliações da função objetivo), *Single Loop Approach* (SLA) ($f=63,88$ e 42 avaliações da função objetivo), *Sequential Optimization and Reliability Assessment* (SORA) ($f=63,88$ e 200 avaliações da função objetivo), e *Sequential Approximate Programming* (SAP) ($f=63,88$ e 48 avaliações da função objetivo).

Na Tabela 1 são apresentados os resultados obtidos pela metodologia agora proposta considerando diferentes valores para o coeficiente de confiabilidade β .

$R\%$ (β)	f (Equação 12)	x_{d1}	x_{d2}	$n_{eval}^{(1)}$
97,7250 (2)	36,6543 ⁽¹⁾ /1,1×10 ⁻⁴⁽²⁾	4,2811 ⁽¹⁾ /4,5×10 ⁻⁴⁽²⁾	4,2809 ⁽¹⁾ /1,23×10 ⁻⁴⁽²⁾	12116
98,9830 (2,32)	63,0955/1,2×10 ⁻⁴	5,6206/3,4×10 ⁻⁴	5,6128/2,6×10 ⁻⁴	12198
99,3791 (2,5)	92,8246/1,2×10 ⁻⁴	6,8105/2,6×10 ⁻⁴	6,8147/2,7×10 ⁻⁴	12202
99,5339 (2,6)	119,4582/1,9×10 ⁻⁴	7,7284/1,8×10 ⁻⁴	7,7284/1,7×10 ⁻⁴	12202
99,6534 (2,7)	159,5449/1,9×10 ⁻⁴	8,9330/2,6×10 ⁻⁴	8,9300/2,2×10 ⁻⁴	12314
99,7445 (2,8)	224,0137/2,2×10 ⁻⁴	10,5810/1,5×10 ⁻⁴	10,5805/2,2×10 ⁻⁴	12248
99,8135 (2,9)	337,7114/2,3×10 ⁻⁴	12,9901/1,5×10 ⁻⁴	12,9987/1,1×10 ⁻⁴	12770

Tabela 1: Resultados obtidos considerando a metodologia proposta e diferentes índices de confiabilidade para o problema do Estado Limite Não-Linear.

⁽¹⁾Média e ⁽²⁾Desvio Padrão.

Na Tabela 1 observa-se que, para um índice de confiabilidade igual a 2,32, o resultado obtido pelo ED+IRA é coerente com o obtido na literatura, com uma pequena redução (aproximadamente 1,3%) em relação ao valor da função objetivo dado por Aoues e Chateauneuf (2009). Além disso, também se observa que, todas as

execuções do algoritmo de ED convergiram para a mesma solução, visto o valor do desvio padrão encontrado. Em relação ao número de avaliações da função objetivo (n_{eval}), observa-se que a metodologia proposta requer mais avaliações. Isto se deve a natureza do método de otimização considerado, o qual trabalha com uma população de candidatos, implicando em um maior n_{eval} do que requerido pelos métodos (clássicos) considerados por Aoues e Chateauneuf (2009). Finalmente, como esperado, o aumento no valor do parâmetro β faz com que o valor da função objetivo seja deteriorado, isto é, quanto maior a confiabilidade, pior será o valor da função objetivo. Do ponto de vista matemático isto implica no aumento da distância entre a solução obtida e a respectiva restrição de desigualdade.

5.2 Estado Limite Altamente Não-Linear

Este problema consiste em uma pequena modificação na restrição de desigualdade considerada no estudo de caso anterior. Matematicamente, este problema consiste da otimização da seguinte função matemática (AOUES e CHATEAUNEUF, 2009):

$$\min_{x_d} x_{d1}^2 + x_{d2}^2 \quad (15)$$

$$P(0,2x_{d1}x_{d2}x_{r2}^2 - x_{r1} \leq 0) \geq R \quad (16)$$

$$0 \leq x_{di} \leq 15, \quad i = 1,2 \quad (17)$$

O número de variáveis de busca, de variáveis aleatórias (x_{r1} e x_{r2}), do tipo de distribuição (normal), bem como os valores das médias, dos coeficientes de variação e do índice de confiabilidade são os mesmos apresentados para o estudo de caso anterior. Aoues e Chateauneuf (2009) também empregaram as mesmas técnicas descritas para resolver este estudo de caso. Para essa finalidade, estes autores consideraram o par $(x_{d1}; x_{d2}) = (12; 12)$ como estimativa inicial e as seguintes abordagens: *Reliability Index Approach* (RIA) (não convergiu), *Performance Measure Approach* (PMA) ($f=3,67$ e 210 avaliações da função objetivo), *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) (não convergiu), *Single Loop Approach* (SLA) ($f=3,67$ e 60 avaliações da função objetivo), *Sequential Optimization and Reliability Assessment* (SORA) ($f=3,67$ e 136 avaliações da função objetivo), e *Sequential Approximate Programming* (SAP) (não convergiu).

Na Tabela 2 são apresentados os resultados obtidos pela metodologia agora proposta considerando diferentes valores para o coeficiente de confiabilidade β . Nesta tabela observa-se que a metodologia proposta foi capaz de encontrar um valor menor para f em relação às outras abordagens considerando β igual a 2,32 (uma melhora de cerca de, aproximadamente, 0,45%). Além disso, em todas as execuções do algoritmo proposto, a metodologia sempre convergiu para a mesma solução (visto o valor do desvio padrão), diferentemente de algumas abordagens consideradas por

Aoues e Chateauneuf (2009), que não convergiram. Como observado, o aumento do parâmetro β implica na deterioração do valor da função objetivo. Este resultado era esperado, já que uma solução mais confiável significa que a restrição, em relação a um determinado valor de β , não corre o risco de ser violada. Finalmente, em termos do parâmetro n_{eval} , observa-se que a metodologia proposta requer mais avaliações do que aquelas reportadas por Aoues e Chateauneuf (2009) considerando métodos clássicos de solução.

$R\%$ (β)	f (Equação 15)	x_{d1}	x_{d2}	$n_{eval}^{(1)}$
97,7250 (2)	2,7869 ⁽¹⁾ /1,4×10 ⁻⁴⁽²⁾	1,1805 ⁽¹⁾ /2,4×10 ⁻⁴⁽²⁾	1,1804 ⁽¹⁾ /1,7×10 ⁻⁴⁽²⁾	13340
98,9830 (2,32)	3,6532/1,3×10 ⁻⁴	1,3512/4,7×10 ⁻⁴	1,3518/2,3×10 ⁻⁴	13052
99,3791 (2,5)	4,4275/1,4×10 ⁻⁴	1,4860/2,7×10 ⁻⁴	1,4897/1,3×10 ⁻⁴	11814
99,5339 (2,6)	5,0196/1,7×10 ⁻⁴	1,5844/1,3×10 ⁻⁴	1,5840/2,8×10 ⁻⁴	11834
99,6534 (2,7)	5,7969/1,5×10 ⁻⁴	1,7025/3,5×10 ⁻⁴	1,7024/1,1×10 ⁻⁴	11840
99,7445 (2,8)	6,8634/1,4×10 ⁻⁴	1,8491/2,4×10 ⁻⁴	1,8558/1,3×10 ⁻⁴	11564
99,8135 (2,9)	8,4207/1,3×10 ⁻⁴	2,0726/1,3×10 ⁻⁴	2,0310/1,4×10 ⁻⁴	11732

Tabela 2: Resultados obtidos considerando a metodologia proposta e diferentes índices de confiabilidade para o para o problema do Estado Limite Altamente Não-Linear.

⁽¹⁾Média e ⁽²⁾Desvio Padrão.

5.3 Problema com Múltiplas Restrições

O último exemplo consiste em um problema de otimização com três restrições probabilísticas. Matematicamente, este problema pode ser descrito como (AOUES e CHATEAUNEUF, 2009):

$$\min_{x_d} x_{d1} + x_{d2} \quad (18)$$

$$G_1 \equiv P(x_{r1}^2, x_{r2}/20 - 1 \leq 0) \leq R \quad (19)$$

$$G_2 \equiv P\left(\left(x_{r1} + x_{r2} - 5\right)^2/30 + \left(x_{r1} - x_{r2} - 12\right)^2/120 - 1 \leq 0\right) \leq R \quad (20)$$

$$G_3 \equiv P\left(80/(x_{r1}^2 + 8x_{r2} + 5) - 1 \leq 0\right) \leq R \quad (21)$$

em que x_{d1} e x_{d2} representam as médias das variáveis x_{r1} e x_{r2} , respectivamente. As variáveis apresentam coeficientes de variação iguais a 0,3 e distribuição normal.

Aoues e Chateauneuf (2009) resolveram este problema considerando diferentes valores para β (2, 3 e 4) e condição inicial dada por $(x_{d1}; x_{d2})=(5;5)$. Os autores obtiveram os seguintes resultados para $\beta=2$: *Reliability Index Approach* (RIA) ($f=6,1923$ e 560 avaliações da função objetivo), *Performance Measure Approach* (PMA) ($f=6,1923$ e 612 avaliações da função objetivo), *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) ($f=6,1923$ e 756 avaliações da função objetivo), *Single Loop Approach* (SLA) ($f=6,1920$ e 144 avaliações da função objetivo), *Sequential Optimization and Reliability Assessment* (SORA) ($f=6,1923$ e

348 avaliações da função objetivo), e *Sequential Approximate Programming* (SAP) ($f=6,1926$ e 240 avaliações da função objetivo).

A Tabela 3 apresentada os resultados obtidos pela metodologia proposta considerando diferentes valores para o coeficiente de confiabilidade β .

$R\%$ (β)	f (Equação 18)	x_{d1}	x_{d2}	$n_{eval}^{(1)}$
84,1344 (1)	5,6737 ⁽¹⁾ /1,7×10 ⁻⁵ ⁽²⁾	3,1835 ⁽¹⁾ /2,1×10 ⁻⁵ ⁽²⁾	2,4902 ⁽¹⁾ /2,9×10 ⁻⁵ ⁽²⁾	15234
93,3193 (1,5)	5,9308/1,2×10 ⁻⁵	3,2347/1,1×10 ⁻⁵	2,6962/2,7×10 ⁻⁵	15076
97,7250 (2)	6,1924/4,2×10 ⁻⁵	3,2950/1,3×10 ⁻⁵	2,8972/2,7×10 ⁻⁵	14564
99,3791 (2,5)	6,4576/2,2×10 ⁻⁵	3,3634/2,6×10 ⁻⁵	3,0942/1,3×10 ⁻⁵	13987
99,8651 (3)	6,7257/2,1×10 ⁻⁵	3,4391/4,7×10 ⁻⁵	3,2866/1,4×10 ⁻⁵	14949
99,9768 (3,5)	6,9962/3,3×10 ⁻⁵	3,5213/5,1×10 ⁻⁵	3,4750/4,1×10 ⁻⁵	14454
99,9969 (4)	7,2683/1,8×10 ⁻⁵	3,6090/3,2×10 ⁻⁵	3,6594/6,1×10 ⁻⁵	15034
99,9997 (4,5)	7,5418/1,2×10 ⁻⁵	3,7018/4,3×10 ⁻⁵	3,8399/3,2×10 ⁻⁵	15374
99,9999 (5)	7,8162/2,4×10 ⁻⁵	3,7991/2,1×10 ⁻⁵	4,0171/2,3×10 ⁻⁵	14348

Tabela 3: Resultados obtidos considerando a metodologia proposta e diferentes índices de confiabilidade para o problema com múltiplas restrições.

⁽¹⁾Média e ⁽²⁾Desvio Padrão.

Assim como nos estudos de caso anteriores, é possível observar que a metodologia proposta foi capaz de encontrar uma solução melhor (em termos de média e desvio padrão) que as obtidas pelas outras abordagens considerando β igual a 2. Além disso, o aumento do parâmetro β implica na deterioração do valor da função objetivo. Note que o valor de n_{eval} requerido pelo IRA+ED é maior do que o requerido considerando os métodos clássicos (AOUES e CHATEAUNEUF, 2009). É importante ressaltar que os valores obtidos pela metodologia proposta são coerentes com os reportados por Aoues e Chateauneuf (2009) para valores de β iguais a 3 e 4.

6 | CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo a apresentação de uma estratégia para o tratamento de problemas de otimização que apresentam incerteza no vetor de variáveis de busca. De forma geral, a metodologia proposta consiste da associação do algoritmo de ED com a técnica IRA. A partir dos resultados apresentados nas Tabelas 1 a 3 é possível concluir que a metodologia proposta foi capaz de encontrar resultados que estão em concordância com aqueles obtidos considerando outras estratégias. Em termos do número de avaliações da função objetivo, observa-se um aumento significativo no valor deste parâmetro quando comparado com outras abordagens (clássicas). Esse resultado era mesmo esperado devido à natureza da técnica de otimização considerada; isto é, foi usada uma técnica heurística baseada em população, levando naturalmente ao aumento do número de avaliações da função objetivo.

Cabe ressaltar que, para a aplicação da metodologia proposta, a mesma requer como parâmetro de entrada o valor do índice de confiabilidade, diferentemente dos métodos FORM e SORM, onde este índice é um parâmetro de saída nestes algoritmos. Neste caso, como alternativa, pode-se formular um problema multi-objetivo em que o objetivo adicional será a maximização do índice de confiabilidade. Assim, ao invés de se definir esse parâmetro, o algoritmo multi-objetivo encontrará uma faixa de valores para o mesmo de forma que, a partir de uma análise de pós-processamento, o usuário poderá escolher o melhor compromisso entre o valor da função objetivo e o índice de confiabilidade.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq (574001/2008-5, 304546/2018-8, and 431337/2018-7), a FAPEMIG (TEC-APQ-3076-09, TEC-APQ-02284-15, TEC-APQ-00464-16, and PPM-00187-18) e a CAPES pelo suporte financeiro. O terceiro autor agradece o suporte financeiro através da FAPEMIG e do CNPq (INCT-EIE).

REFERÊNCIAS

AOUES, Y., CHATEAUNEUF, A. **Benchmark study of numerical methods for reliability-based design**. Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 41, p. 277-294, 2009.

CARTER, A.D.S. Mechanical Reliability and Design, New York, Wiley, 1997.

DEB, K., PADMANABHAN, D., GUPTA, S., MALL, A.K. **Handling uncertainties through reliability-based optimization using evolutionary algorithms**. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, v. 13, n. 5, p. 1054-1074, 2009.

DU, X. **Probabilistic Engineering Design - First Order and Second Reliability Methods**. University of Missouri-Rolla, 2005.

FISSLER, B., NEUMANN, H.-J., RACKWITZ, R. **Quadratic limit states in structural reliability**. J Engrg Mech, ASCE, v. 105, n. 4, p. 661-676, 1979.

GENTLE, J. **Elements of Computational Statistics**. Springer-Verlag, New York, 420 páginas, 2002.

HASOFER, A.M., LIND, N.C. **Exact and invariant second-moment code format**. J Engrg Mech Division, ASCE, v.100, n. 1, p. 111-121, 1974.

LOBATO, F.S., GONÇALVES, M.S., JAHN, B., CAVALINI JR, A.AP., STEFFEN JR, V. **Reliability-based optimization using differential evolution and inverse reliability analysis for engineering system design**. Journal of Optimization Theory and Applications, v. 174, n. 3, p. 894-926, 2017.

ROSENBLATT, M. **Remarks on a multivariate transformation**. The Annals of Mathematical Statistics, v. 23, p. 470-472, 1952.

SHINOZUKA, M. **Basic analysis of structural safety**. J of Struct Engrg, ASCE, v. 109, n. 3, p. 721-740, 1983.

STORN, R., PRICE, K. **Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces**. Journal of Global Optimization, v. 11, p. 341-359, 1997.

TAGUCHI, G. **Quality engineering through design optimization**. Kraus International Publications. New York, 1984.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-348-4

