



Henrique Ajuz Holzmann  
João Dallamuta  
(Organizadores)

# Impactos das Tecnologias na Engenharia Mecânica 2

Atena  
Editora  
Ano 2019

**Henrique Ajuz Holzmann**  
**João Dallamuta**  
(Organizadores)

**Impactos das Tecnologias na  
Engenharia Mecânica**  
**2**

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora

Copyright © da Atena Editora

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Diagramação e Edição de Arte: Lorena Prestes e Geraldo Alves

Revisão: Os autores

### Conselho Editorial

- Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Profª Drª Deusilene Souza Vieira Dall’Acqua – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Profª Drª Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I34 Impactos das tecnologias na engenharia mecânica 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Henrique Ajuz Holzmann, João Dallamuta. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Impactos das Tecnologias na Engenharia Mecânica; v. 2)

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

ISBN 978-85-7247-247-0

DOI 10.22533/at.ed.470190504

1. Automação industrial. 2. Engenharia mecânica – Pesquisa – Brasil. 3. Produtividade industrial. 4. Tecnologia. I. Holzmann, Henrique Ajuz. II. Dallamuta, João. III. Série.

CDD 670.427

**Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422**

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores.

2019

Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

## APRESENTAÇÃO

A Engenharia Mecânica pode ser definida como o ramo da engenharia que aplica os princípios de física e ciência dos materiais para a concepção, análise, fabricação e manutenção de sistemas mecânicos

Nos dias atuais a busca pela redução de custos, aliado a qualidade final dos produtos é um marco na sobrevivência das empresas. Nesta obra é conciliada duas atividades essenciais a um engenheiro mecânico: Projetos e Simulação.

É possível observar que na última década, a área de projetos e simulação vem ganhando amplo destaque, pois através de simulações pode-se otimizar os projetos realizados, reduzindo o tempo de execução, a utilização de materiais e os custos finais.

Dessa forma, são apresentados trabalhos teóricos e resultados práticos de diferentes formas de aplicação e abordagens nos projetos dentro da grande área das engenharias.

Trabalhos envolvendo simulações numéricas, tiveram um grande avanço devido a inserção de novos softwares dedicados a áreas específicas, auxiliando o projetista em suas funções. Sabe-los utilizar de uma maneira eficaz e eficiente é um dos desafios dos novos engenheiros.

Neste livro são apresentados vários trabalhos, alguns com resultados práticos, sobre simulações em vários campos da engenharia industrial, elementos de maquinas e projetos de bancadas práticas.

Um compendio de temas e abordagens que constituem a base de conhecimento de profissionais que se dedicam a projetar e fabricar sistemas mecânicos e industriais.

Boa leitura

Henrique Ajuz Holzmann  
João Dallamuta

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL COM SOLUÇÃO SUAVE UTILIZANDO MALHA ADAPTATIVA	
<i>Gabriel Marcos Magalhães</i> <i>Hélio Ribeiro Neto</i> <i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905041</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>14</b>
USO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO	
<i>Gabriel Marcos Magalhães</i> <i>Alessandro Alves Santana</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905042</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>29</b>
MÉTODOS NUMÉRICOS: DIFERENÇAS FINITAS E GUIA DE ONDAS DIGITAIS 1D E 2D - COMPARATIVO DE FREQUÊNCIAS	
<i>Brenno Lobo Netto Peixoto</i> <i>Marlipe Garcia Fagundes Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905043</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>43</b>
INFLUÊNCIA DA DISCRETIZAÇÕES ESPACIAL E TEMPORAL EM PROBLEMA PURAMENTE ADVECTIVO	
<i>Thiago Fernando Santiago de Freitas</i> <i>Andreia Aoyagui Nascimento</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905044</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>53</b>
FRONTEIRA IMERSA PARA CORPOS ESBELTOS	
<i>João Rodrigo Andrade</i> <i>Aristeu Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905045</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>61</b>
MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODELLING OF GAS-SOLID TURBULENT FLOWS IN COMPLEX GEOMETRIES	
<i>Stella Rodrigues Ferreira Lima Ribeiro</i> <i>Letícia Raquel de Oliveira</i> <i>João Marcelo Vedovoto</i> <i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905046</b>	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>69</b>
ESTUDO NUMÉRICO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA TRANSIENTE EM PLACAS	
<i>William Denner Pires Fonseca</i>	

*Táisa Santos Machado  
Eduardo Mendonça Pinheiro  
José Felipe Lopes de Carvalho  
Sidney da Conceição Alves  
Thiago Santana de Oliveira*

**DOI 10.22533/at.ed.4701905047**

**CAPÍTULO 8 ..... 83**

IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL E PROJETO DE UM PID PARA UM  
SERVOMECANISMO

*Wesley Pereira Marcos  
Rodrigo Hiroshi Murofushi  
Bruno Luiz Pereira*

**DOI 10.22533/at.ed.4701905048**

**CAPÍTULO 9 ..... 98**

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS CONTENDO  
SHUNT RESISTIVO PARA O CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES

*Lorrane Pereira Ribeiro  
Antônio Marcos Gonçalves de Lima  
Victor Augusto da Costa Silva*

**DOI 10.22533/at.ed.4701905049**

**CAPÍTULO 10 ..... 114**

PROJETO E ANÁLISE DE VIBRAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS DE UM CHASSI  
TIPO SPACE FRAME MINI-BAJA

*Marcos Claudio Gondim  
Ellberlandyo Lima Grangeiro  
Antonio Eurick Soares Campelo  
Lucas Rodrigues Oliveira  
Bruno de Oliveira Carvalho*

**DOI 10.22533/at.ed.47019050410**

**CAPÍTULO 11 ..... 126**

SIMULAÇÕES DOS ESFORÇOS VIBRACIONAIS DO CABO CAA 795 MCM (TERN)  
ATRAVÉS DE MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS DE VIBRAÇÃO

*Jhonattan Dias  
Rodrigo Canestraro Quadros  
Marcos Jose Mannala  
Marcio Tonetti*

**DOI 10.22533/at.ed.47019050411**

**CAPÍTULO 12 ..... 133**

PROJETO E CONSTRUÇÃO DE UM SISTEMA DE FREIO APLICADO A UM VEÍCULO  
OFF-ROAD DO TIPO BAJA-SAE

*Felipe Alencar Motta  
Lucas Rocha Dias da Silva*

**DOI 10.22533/at.ed.47019050412**

<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>146</b>
OTIMIZAÇÃO DA ESCOLHA DA RELAÇÃO DE TRANSMISSÃO DE VEÍCULOS AUTOMOTORES ATRAVÉS DE MODELAGEM MATEMÁTICA: O PROJETO BAJA SAE	
<i>Pedro Melo Biz</i> <i>Leonardo Gomes</i> <i>Antônio Brasil</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050413</b>	
<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>157</b>
ANÁLISE CINEMÁTICA DE SUSPENSÃO TRAILING ARM COM CAMBER LINKS PARA VEÍCULO OFF-ROAD	
<i>Francisco José Rodrigues de Sousa Júnior</i> <i>João Lucas Jacob Araújo</i> <i>Gustavo Luis dos Santos Silva</i> <i>Antônio Ítalo Rodrigues Pedrosa</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050414</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>169</b>
APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM EM SUSPENSÃO VEICULAR	
<i>Alaí de Souza Machado</i> <i>Pedro Henrique Rodrigues Taveira</i> <i>Filipe Gomes Soares</i> <i>Domingos dos Santos Ponciano</i> <i>Marcus Victor de Brito Rodrigues</i> <i>João Lucas Jacob Araújo</i> <i>Gean Carlos Moura Mota</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050415</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>178</b>
ANÁLISE AERODINÂMICA: SIMULAÇÃO FLUIDO DINÂMICA DO PROTÓTIPO EC-05 DE EFICIÊNCIA ENERGÉTICA DA EQUIPE COYOTE	
<i>Paulo Henrique Pereira Araujo</i> <i>Josué Alves Rodrigues Junior</i> <i>Thaiane Mayara Marques Licar</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050416</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>190</b>
APLICAÇÃO DE SISTEMAS NEURO-FUZZY NA PREDIÇÃO DO COEFICIENTE DE SUSTENTAÇÃO DO AEROFÓLIO NACA 1412	
<i>Vitor Taha Sant'Ana</i> <i>Bruno Luiz Pereira</i> <i>Tobias Moraes</i> <i>Roberto Mendes Finzi Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050417</b>	

<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>195</b>
AVALIAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE ATIVO DE RUÍDO EM VENEZIANAS ACÚSTICAS COM CONFIGURAÇÕES DISTINTAS VIA ELEMENTOS FINITOS	
<i>Geisa Arruda Zuffi</i>	
<i>Fabiana Alves Pereira</i>	
<i>Marcus Antonio Viana Duarte</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050418</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>203</b>
ABSORVEDORES ACÚSTICOS DE RUÍDO: MODELAGEM NUMÉRICA	
<i>Fabiana Alves Pereira</i>	
<i>Geisa Arruda Zuffi</i>	
<i>Israel Jorge Cárdenas Nuñez</i>	
<i>Marcus Antonio Viana Duarte</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050419</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>211</b>
INVESTIGAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA ESCOLHA DAS DIMENSÕES DO RECEPTOR NO MÉTODO DO TRAÇADO DE RAIOS ACÚSTICOS	
<i>Henrique Gebran Silva</i>	
<i>Marlipe Garcia Fagundes Neto</i>	
<i>Pollyana Alves Resende</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050420</b>	
<b>SOBRE OS ORGANIZADORES</b> .....	<b>228</b>



## APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM EM SUSPENSÃO VEICULAR

### **Alaí de Souza Machado**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI)  
Teresina – Piauí

### **Pedro Henrique Rodrigues Taveira**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI)  
Teresina – Piauí

### **Filipe Gomes Soares**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI)  
Teresina – Piauí

### **Domingos dos Santos Ponciano**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI)  
Teresina – Piauí

### **Marcus Victor de Brito Rodrigues**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI)  
Teresina – Piauí

### **João Lucas Jacob Araújo**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI)  
Teresina – Piauí

### **Gean Carlos Moura Mota**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI)  
Teresina – Piauí

poderosa ferramenta de cálculo e têm aplicação em diversas áreas na modelagem de fenômenos físicos. Assim com a resolução da equação pode-se obter informações relevantes prevendo assim seu comportamento. Portanto o presente trabalho irá tratar das Equações Diferenciais de 2ª ordem, em especial aplicada à sistema de suspensão veicular. O estudo da dinâmica veicular, é importante pois é necessário entender o funcionamento da suspensão, e suas funções principais, para posteriormente buscar obter um modelo dinâmico para uma possível previsão do desempenho de um sistema. Na modelagem foi usado o sistema de  $\frac{1}{4}$  do veículo, por ser um dos mais utilizados devido a sua simplicidade, e ainda por fornecer bons resultados para uma análise preliminar da suspensão.

**PALAVRAS-CHAVE:** suspensão, equações diferenciais, vibração.

**ABSTRACT:** Differential Equations are a powerful calculation tool and have application in several areas in the modeling of physical phenomena. Thus, with the resolution of the equation, one can obtain relevant information, thus predicting its behavior. Therefore, the present work will deal with the 2nd Order Differential Equations, especially applied to the vehicular suspension system. The study of vehicular dynamics is important because it is necessary to understand the operation of

**RESUMO:** As Equações Diferenciais são uma

the suspension, and its main functions, to later seek to obtain a dynamic model for a possible prediction of the performance of a system. In the modeling, the  $\frac{1}{4}$  vehicle system was used, because it is one of the most used because of its simplicity, and still provides the results for a preliminary analysis of the suspension.

**KEYWORDS:** suspension, differential equations, vibration.

## 1 | INTRODUÇÃO

Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são equações diferenciais. Portanto, para compreender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluidos, o fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e detecção de ondas sísmicas, ou o aumento ou diminuição de populações, entre muitos, é necessário saber alguma coisa sobre equações diferenciais. (Boyce, William E, 2002, p. 1).

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma igualdade que contém uma variável independente,  $x$ , uma variável dependente,  $y$ , e algumas das suas derivadas,  $y'$ ,  $y''$ , ...,  $y^{(n)}$ .” (Minhós, 2009, pg. 8). A ordem da equação diferencial é dada pela ordem da mais alta derivada contida na equação. Por sua vez, o grau da equação diferencial é dado pelo expoente da derivada de mais alta ordem. Quanto à linearidade, uma EDO é linear quando a mesma é de primeiro grau e os seus coeficientes dependem somente de  $x$  ou são constantes. Uma equação diferencial linear de segunda ordem tem a forma da seguinte Eq. (1), onde,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $G$  são funções contínuas.

$$P(x) \frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \quad (1)$$

O sistema de suspensão veicular atua isolando vibrações resultante das excitações geradas no veículo, melhorando assim, o conforto dos passageiros, aderência no contato pneu-solo garantindo uma melhor dirigibilidade.

Adinâmica vertical (Ride) trata do comportamento do veículo e dos seus ocupantes quando submetidos a excitações provenientes do piso em que o veículo trafega (externas) ou provenientes do motor, roda, transmissão, (internas) Gillespie (1992) define o termo Ride como uma referência as vibrações sentidas pelos ocupantes, e que o espectro das vibrações varia de 0 a 25 Hz, sendo que 25 Hz é o limite superior das vibrações comuns presentes em veículos automotores. Assim o modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo, segundo Gillespie (1992), fornece bons resultados para uma análise preliminar de suspensão.

Conforme Rao (2008) movimentos que se repetem durante o decurso do tempo podem ser conceituados como vibração. Um sistema vibratório é composto por três grandes elementos, um que armazene energia cinética, outro que armazene energia potencial e por fim um que libere gradualmente essas energias.

A massa ( $m$ ) ou inércia ( $J$ ), a mola ( $k$ ) e o amortecedor ( $c$ ), respectivamente, cumprem esses papéis descritos acima e suas disposições geralmente são descritos conforme pode ser visto na Fig. (1).

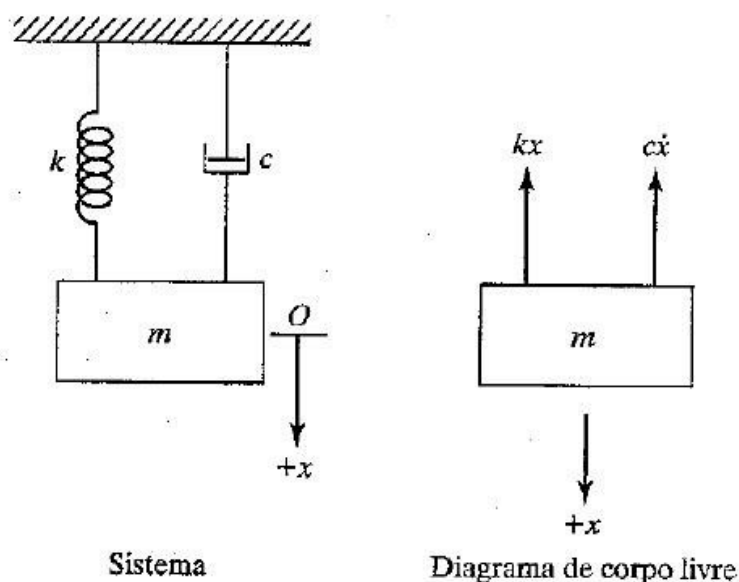


Figura 1 – Sistema Massa-Mola-Amortecedor. Fonte: Rao (2008)

Vibrações podem ser classificadas de diversas formas. Conforme a aplicação de força, elas podem ser vibrações livres se o sistema vibra por conta própria, ou forçada se está sujeita a forças externas. Em relação a natureza da força que é aplicada ao sistema, estas podem ser harmônicas, não-harmônica, porém, periódica, não-periódica (ou transitórias) e por fim, aleatórias.

Este trabalho tratará da aplicação das equações diferenciais na dinâmica veicular, mais propriamente em suspensão veicular. “O estudo da dinâmica vertical em veículos é importante no projeto e desenvolvimento de sistemas de suspensão veicular, no que diz respeito às três funções principais: isolamento, aderência e estabilidade” (Gillespie, 1992). “Os modelos para o estudo da dinâmica vertical podem ser representados por: 1/4 do veículo, o qual é utilizado somente uma das rodas do veículo, e possui 1 ou 2 grau de liberdade (gdl), 1/2 do veículo, podendo ser na direção longitudinal ou frontal, com 2 ou 4 gdl(s), ou até um veículo completo, com 7 gdl” (Jazar, 2008). Assim o número de gdl(s) vai depender do tipo de movimento a ser considerado (rotação ou translação) e da separação de massa suspensa (chassi) e não suspensa (roda e pneu). Assim focou-se no modelo de 1/4 de veículo por ser o mais utilizado devido a sua simplicidade, e possibilitar o desenvolvimento de estudos relacionados ao movimento vertical (Bounce) de um veículo, tais como a estimativa do ângulo de arfagem (Pitch)

de um veículo passando sobre um obstáculo (Gillespie, 1992).

## 2 | METODOLOGIA

A realização do presente trabalho se deu através de pesquisas na literatura tradicional e em artigos publicados da área. Para a obtenção dos resultados, o uso das Equações Diferenciais de Segunda Ordem foi aplicado no estudo das vibrações mecânicas em sistemas de suspensão veicular, pois os mesmos se comportam como osciladores livres amortecidos. Além disso, o uso do software MatLab, é de grande valor para formular as modelagens matemáticas e extrair informações gráficas, para assim obter valores de variáveis de grande importância no dimensionamento de projetos.

Através da análise da taxa de variação dos parâmetros obtidos pela observação de um fenômeno, escreve-se uma equação diferencial que facilite a manipulação e descrição do sistema. O modelo pode ser linear, que simplifica e agiliza na formulação de respostas e comportamentos, ou não linear, que apesar de mais complexo pode tentar prever com mais precisão certos comportamentos que não são descritos pelo modelo mais simples.

Com um modelo definido, é possível derivar as equações governantes, analisar os diagramas de corpo livre e obter as soluções e interpretar resultados para determinados valores de entrada definidos.

A modelagem de um sistema de suspensão pode ser realizada por diferentes configurações e sua setagem vai depender da necessidade do estudo, dos equipamentos a disposição para a análise ou da precisão requerida. Ela pode ser realizada com um quarto de veículo, com meio veículo, com o veículo completo, com a inclusão ou não do coeficiente de amortecimento da roda, com ou sem excitação da base ou aplicação de forças externas, etc.

O modelo mais simples de um quarto de veículo (quarter-car model) visa simular a performance do sistema de suspensão do automóvel, avaliando toda área de trabalho das acelerações verticais da massa suspensa, do pneu e das forças no sistema de suspensão.

Nesse modelo, a massa total do veículo é dividida igualmente entre as quatro rodas, sendo cada seção estudada separadamente. Conforme pode ser avaliado na Fig. (2) abaixo, o sistema é formado por um modelo invertido de massa-mola-amortecedor e possui dois graus de liberdade, sendo estes o deslocamento vertical da massa não-suspensa ( $y_{ns}$ ) e da massa suspensa ( $y_s$ ).

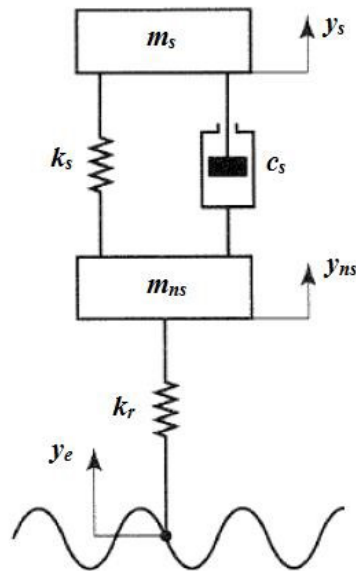


Figura 2 – Modelo Simplificado de 1/4 de Veículo. Fonte: Modificado da internet

A massa suspensa ( $m_s$ ) pode ser definida como a porção da massa total suportada pelo sistema de suspensão e a massa não suspensa ( $m_{ns}$ ) é representada pelo conjunto formado pela roda que possui uma rigidez ( $k_r$ ), eixos e demais peças da suspensão. Ligando ambos temos elementos de mola ( $k_s$ ) e amortecimento ( $c_s$ ). As irregularidades da estrada ( $y_e$ ) criam condições forçantes no sistema.

Analisando-se as forças aplicadas na massa suspensa, conforme o diagrama de corpo livre da Fig. (1), e sabendo que o seu deslocamento é maior que o da massa não-suspensa, podemos desenvolver a segunda lei de Newton de acordo com as Eq. (2) e (3).

$$\sum F_{ys} = m_s * y_s'' \quad (2)$$

$$m_s * y_s'' = -c_s(y_s' - y_{ns}') - k_s(y_s - y_{ns}) \quad (3)$$

Rearranjando, adquirimos a primeira equação do movimento, de acordo com a Eq. (4).

$$m_s y_s'' + c_s(y_s' - y_{ns}') + k_s(y_s - y_{ns}) = 0 \quad (4)$$

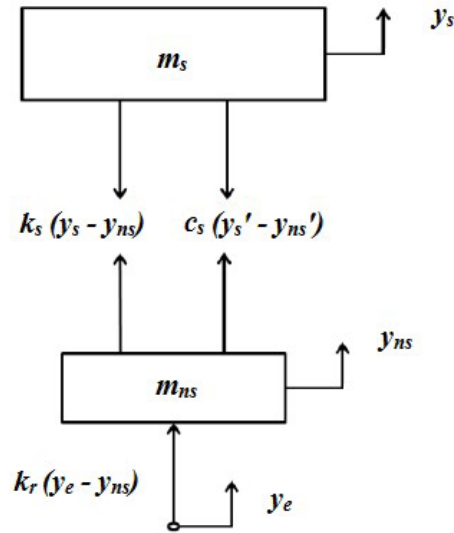


Figura 3 – Diagrama de Corpo Livre. Fonte: Modificado da internet

Realizando o mesmo procedimento para a massa não suspensa, obtemos as Eq. (5) e (6).

$$\sum F_{y_{ns}} = m_{ns} * y_{ns}'' \quad (5)$$

$$m_{ns}y_{ns}'' = c_s(y_s' - y_{ns}') + k_s(y_s - y_{ns}) + k_r(y_e - y_{ns}) \quad (6)$$

Organizando temos a segunda equação do movimento de acordo com a Eq. (7).

$$m_{ns}y_{ns}'' + c_s(y_{ns}' - y_s') + k_s(y_{ns} - y_s) + k_r y_{ns} = k_r y_e \quad (7)$$

Colocando ambas as equações do movimento em uma matriz na Eq. (8), podemos perceber claramente que a disposição respeita a forma padrão da equação diferencial, para no fim obtermos a Eq. (9).

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_{ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_s \\ \ddot{y}_{ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_s \\ \dot{y}_{ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s + k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_s \\ y_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_r y_e \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$m_{eq}\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = f \quad (9)$$

Com essas equações é possível estudar o comportamento de ambas as massas conforma cada variação de terreno, para isso basta definir as constantes de massa, amortecimento e molas, além das condições iniciais de modelagem.

A execução dos gráficos foi elaborada utilizando o Software Simulink e o arranjo pode ser visualizado a Fig. (4). Para construção foi isolado a aceleração na Eq. (10) e Eq. (11).

$$\ddot{y}_s = \frac{1}{m_s} [-c_s(\dot{y}_s - \dot{y}_{ns}) - k_s(y_s - y_{ns})] \quad (10)$$

$$\ddot{y}_{ns} = \frac{1}{m_{ns}} [-c_s(y_{ns}' - y_s') - k_s(y_{ns} - y_s) - k_r y_{ns} + k_r y_e] \quad (11)$$

A título de exemplificação os seguintes valores foram inseridos:

$$m_s = 250 \text{ kg}$$

$$m_{ns} = 60 \text{ kg}$$

$$k_s = 16000 \text{ N/m}$$

$$k_r = 160000 \text{ N/m}$$

$$c_s = 1200 \text{ N.s/m}$$

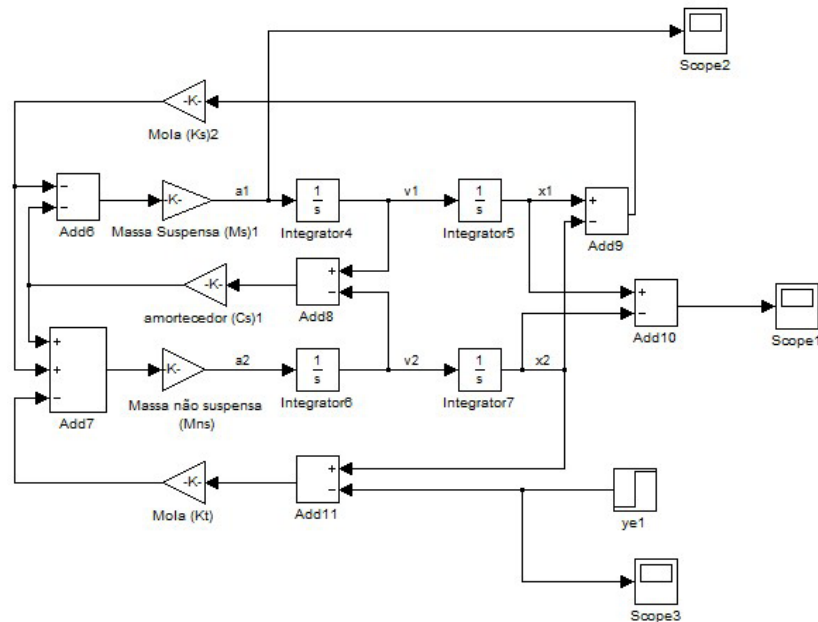


Figura 4 – Modelo de ¼ de Veículo no Simulink. Fonte: Própria

### 3 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como foi visto, vários problemas que são tratados na matemática e física podem ser modelados por equações diferenciais. O benefício de se conhecer uma equação e sua solução geral, torna possível modelar um sistema físico e fazer com que sua equação se assemelhe a uma equação diferencial ordinária. Portanto, não necessitando resolver o problema em questão, pois, já se tem a solução geral da equação. Assim, basta interpretar as variáveis presentes na modelagem matemática e substituí-las.

Dessa forma o aprofundamento no estudo das equações diferenciais merece destaque, haja visto da diversidade de aplicações em diferentes campos do conhecimento. A Fig. (5) elucida um exemplo de como se comporta uma roda do veículo ao passar por um obstáculo.

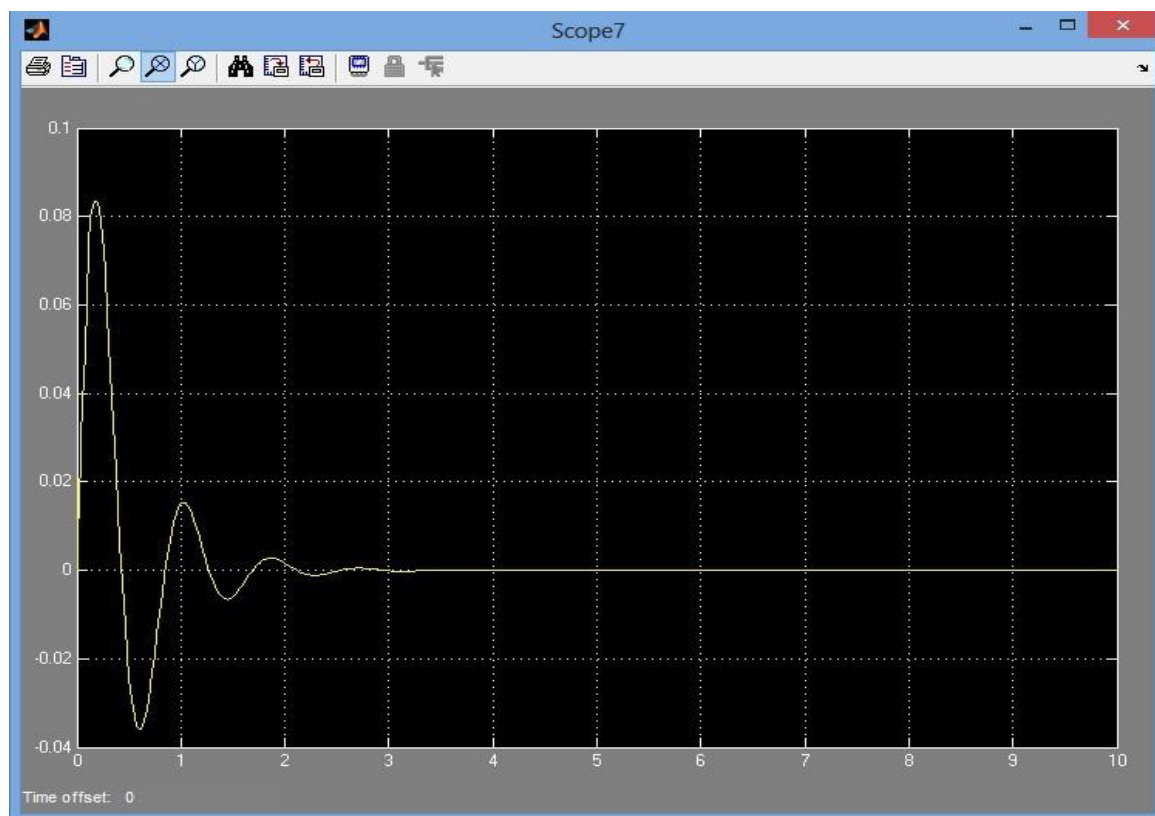


Figura 5 - Gráfico obtido no Simulink. Fonte: Própria

#### 4 | CONCLUSÃO

Baseado no que foi exposto acima, pode-se considerar viável o uso do modelo simplificado (ou clássico) de 1/4 de veículo para análises preliminares da resposta no domínio do tempo, apenas para a massa suspensa e como referência.

Já que o modelo representado é Quarter-Car, e é um modelo idealizado, não leva em consideração parâmetros importantes para a total compreensão do seu comportamento como o amortecimento das buchas da suspensão, o amortecimento por histerese do pneu e até mesmo o amortecimento intrínseco à mola.

Entretanto, na tentativa de chegar a uma idealização que se aproxime do sistema criticamente amortecido (necessário para que haja o maior tempo de contato do pneu com o solo) pode-se utilizar uma fração do amortecimento crítico, a chamada taxa de amortecimento ou fator de amortecimento e assim idealizam os amortecimentos embutidos.

#### 5 | DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis pelo material impresso contido neste artigo.



## REFERÊNCIAS

Boyce, W. E.; DIPRIMA R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

Gillespie, T.D. **Fundamentals of vehicle dynamics**. USA: SAE Society of Automotive Engineers, 1989.

Jazar, R.N. **Vehicle dynamics: theory and applications**. New York: Springer, 2008.

MINHÓS, Feliz Manual Barrão. **Equações Diferenciais Ordinárias**: Relatório sobre a unidade curricular. 2009.

RAO, Singiresu S. **Vibrações Mecânicas**. 4 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

## **SOBRE OS ORGANIZADORES**

**Henrique Ajuz Holzmann** - Professor assistente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Graduação em Tecnologia em Fabricação Mecânica e Engenharia Mecânica pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Mestre em Engenharia de Produção pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Doutorando em Engenharia e Ciência dos Materiais pela Universidade Estadual de Ponta Grossa. Trabalha com os temas: Revestimentos resistentes a corrosão, Soldagem e Caracterização de revestimentos soldados.

**João Dallamuta** - Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Engenheiro de Telecomunicações pela UFPR. Especialista em Inteligência de Mercado pela FAE Business School. Mestre em Engenharia pela UEL. Trabalha com os temas: Inteligência de Mercado, Sistemas Eletrônicos e Gestão Institucional.

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-247-0

