A produção do conhecimento nas Ciências Exatas e da Terra

Ingrid Aparecida Gomes
(Organizadora)

Atena
Editora
Ano 2019

Ingrid Aparecida Gomes
(Organizadora)

A produção do conhecimento nas Ciências Exatas e da Terra

Atena Editora
2019

2019 *by Atena Editora*
Copyright © da Atena Editora
Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação e Edição de Arte: Lorena Prestes e Geraldo Alves
Revisão: Os autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P964 A produção do conhecimento nas ciências exatas e da terra [recurso eletrônico] / Organizadora Ingrid Aparecida Gomes. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (A produção do Conhecimento nas Ciências Exatas e da Terra; v. 1)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-238-8
DOI 10.22533/at.ed.388190304

1. Ciências exatas e da terra – Pesquisa – Brasil. I. Gomes, Ingrid Aparecida. II. Série.

CDD 507

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

APRESENTAÇÃO

A obra "*A produção do conhecimento nas Ciências Exatas e da Terra*" aborda uma série de livros de publicação da Atena Editora, em seu I volume, apresenta, em seus 21 capítulos, discussões de diversas abordagens acerca do ensino e educação.

As Ciências Exatas e da Terra englobam, atualmente, alguns dos campos mais promissores em termos de pesquisas atuais. Estas ciências estudam as diversas relações existentes da Astronomia/Física; Biodiversidade; Ciências Biológicas; Ciência da Computação; Engenharias; Geociências; Matemática/ Probabilidade e Estatística e Química.

O conhecimento das mais diversas áreas possibilita o desenvolvimento das habilidades capazes de induzir mudanças de atitudes, resultando na construção de uma nova visão das relações do ser humano com o seu meio, e, portanto, gerando uma crescente demanda por profissionais atuantes nessas áreas.

A ideia moderna das Ciências Exatas e da Terra refere-se a um processo de avanço tecnológico, formulada no sentido positivo e natural, temporalmente progressivo e acumulativo, segue certas regras, etapas específicas e contínuas, de suposto caráter universal. Como se tem visto, a ideia não é só o termo descritivo de um processo e sim um artefato mensurador e normalizador de pesquisas.

Neste sentido, este volume é dedicado aos trabalhos relacionados a ensino e aprendizagem. A importância dos estudos dessa vertente, é notada no cerne da produção do conhecimento, tendo em vista o volume de artigos publicados. Nota-se também uma preocupação dos profissionais de áreas afins em contribuir para o desenvolvimento e disseminação do conhecimento.

Os organizadores da Atena Editora, agradecem especialmente os autores dos diversos capítulos apresentados, parabenizam a dedicação e esforço de cada um, os quais viabilizaram a construção dessa obra no viés da temática apresentada.

Por fim, desejamos que esta obra, fruto do esforço de muitos, seja seminal para todos que vierem a utilizá-la.

Ingrid Aparecida Gomes

SUMÁRIO

CAPÍTULO 9

UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DAS DISTINTAS DEFINIÇÕES DE ANEL

Elisandra Cristina Souto
Universidade Estadual do Centro-Oeste
Guarapuava - Paraná
Marlon Soares
Universidade Estadual do Centro-Oeste
Guarapuava - Paraná

RESUMO: Neste trabalho são apresentados os resultados de um estudo sobre a influência das distintas definições de anel no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Álgebra. Esse estudo foi baseado na investigação de como essas distintas definições afetam o desenvolvimento da teoria elementar dos anéis e os exemplos que delas decorrem.
PALAVRAS-CHAVE: Anéis, Ensino de Álgebra, Estruturas Algébricas.

ABSTRACT: In this paper we present the results of a study on the influence of the different definitions of ring in the teaching and learning process of the Algebra discipline. This study was based on the investigation of how these different definitions affect the development of the elementary theory of rings and the examples that emerge from them.
KEYWORDS: Rings, Algebra Teaching, Algebraic Structures.

1 I INTRODUÇÃO

Segundo Kleiner (2007), embora a noção de anel seja conhecida desde os trabalhos sobre a teoria dos números algébricos de Richard Dedekind, que expressava tal noção pelo termo ordem, o pioneiro no tratamento axiomático da teoria dos anéis foi Abraham Fraenkel, no artigo *On Zero Divisors and the Decomposition of Rings*, de 1914. Nesse trabalho, Fraenkel apresenta vários exemplos de anéis, dentre eles o anel dos inteiros módulo um número natural e o anel das matrizes.

No processo de desenvolvimento da teoria dos anéis, iniciado por Fraenkel no artigo supracitado, merece destaque o trabalho da matemática Emmy Noether, cujo artigo *Ideal Theory in Rings*, de 1921, é considerado a origem da teoria abstrata dos anéis (nas palavras de Irving Kaplansky: "*the importance of this paper is so great that it is surely not much of an exaggeration to call her the mother of modern algebra*").

Conteúdo obrigatório em cursos de Licenciatura em Matemática, segundo o Parecer CNE/CES 1.302/2001, os Fundamentos de Álgebra se caracterizam pelo estudo das estruturas algébricas, em particular da estrutura algébrica anel. Conforme veremos, na bibliografia usualmente adotada nos cursos de Licenciatura em Matemática, não há um padrão na definição dessa estrutura algébrica. Ora temos distintas imposições sobre o conjunto que determina um anel, ora temos distintas imposições sobre as condições que definem tal estrutura algébrica. Assim, é natural se perguntar como essas distintas definições afetam os resultados elementares, certos exemplos e determinados conceitos que decorrem da definição. Além disso, por se tratar de conteúdo obrigatório em cursos de Licenciatura em Matemática, também se justifica uma reflexão a respeito das implicações que tais diferenças conceituais podem acarretar no processo de ensino e aprendizagem da disciplina.

2 I REVISÃO DE LITERATURA

Embora haja uma grande diversidade de livros que tratam da estrutura algébrica anel, não são muitos os autores que realmente apresentam definições distintas para esta estrutura algébrica. Assim, no que segue, as citações se restringirão a cinco autores cujos textos contemplam conceitos efetivamente distintos para os propósitos desta investigação. Tais autores foram selecionados para representar os autores com conceitos distintos por aparecerem frequentemente na bibliografia recomendada para disciplina de Álgebra dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Os textos investigados definem um anel como um conjunto não vazio *R*, munido de duas operações, denominadas adição e multiplicação, satisfazendo ao menos seis das oito condições a seguir:

(A1) associatividade da adição;

(A2) comutatividade da adição;

(A3) existência do elemento neutro aditivo, denominado *zero*;

(A4) existência do elemento simétrico aditivo de cada elemento do conjunto, denominado *oposto*;

(M1) associatividade da multiplicação;

(D) distributividade da multiplicação com relação à adição;

(M2) comutatividade da multiplicação;

(M3) existência do elemento neutro multiplicativo, denominado *um* ou *unidade*.

Dado um conjunto não vazio *R*, Gonçalvez (2015) e Monteiro (1971) consideram que *R* é um anel se são satisfeitas as condições (A1)-(D), que *R* é um anel comutativo se são satisfeitas as condições (A1)-(M2) e que *R* é um anel com unidade se são satisfeitas as condições (A1)-(D) e (M3). Por sua vez, Lang (2002) considera que *R* é um anel se são satisfeitas as condições (A1)-(M2) e que *R* é um anel com unidade se são satisfeitas as condições (A1)-(M3). Tanto Hefez (2016) quanto Garcia e Lequain (2015) consideram que *R* é um anel se são satisfeitas as condições (A1)-(M3), mas Garcia e Lequain consideram que *R* é um anel não comutativo quando a condição (M2) não é satisfeita.

Embora Hefez (2016) contemple pouquíssimos exemplos, os demais autores investigados incluem exemplos bastante variados, e todos apresentam propriedades elementares decorrentes da definição de anel.

À exceção de Garcia e Lequain (2015), os autores supracitados definem subanel, mesmo que implicitamente, como um subconjunto não vazio de um anel que, munido das restrições das operações do anel, é também anel.

Enquanto Gonçalvez (2015) define um ideal como um subanel que contém qualquer produto no qual ao menos um dos fatores pertence ao subanel, Monteiro (1971), Lang (2002), Garcia e Lequain (2015) e Hefez (2016) definem ideal como um subconjunto não vazio de um anel que contém qualquer soma na qual as parcelas pertencem ao subconjunto e que contém qualquer produto no qual ao menos um dos fatores pertence ao subconjunto.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conforme a seção anterior, os textos investigados permitem identificar as seguintes formas essencialmente distintas de definir a estrutura algébrica anel. Para Gonçalvez (2015) e Monteiro (1971), um anel é um conjunto não vazio, munido de duas operações, satisfazendo seis condições. Por sua vez, para Lang (2002), um anel é um conjunto não vazio, munido de duas operações, satisfazendo sete condições. Além disso, tanto para Garcia e Lequain (2015) quanto para Hefez (2016), um anel é um conjunto com pelo menos dois elementos, munido de duas operações, satisfazendo oito condições. Todavia, para Garcia e Lequain (2015), um anel que cuja multiplicação não é comutativa é um anel não comutativo.

Neste ponto é importante ressaltar que Gonçalves (2015) difere de Monteiro (1971) ao impor que, em um anel com unidade, a unidade deve ser diferente do elemento neutro aditivo. Assim, apesar da definição de anel utilizada por eles ser a mesma, ambos serão considerados para os fins desse estudo.

Na tabela a seguir temos um resumo das condições exigidas nas definições adotadas. Nela, a expressão “comutatividade” está relacionada à multiplicação e a expressão “ao menos dois elementos” está relacionada ao conjunto que determina o anel.

	comutatividade	existência da unidade	ao menos dois elementos
Monteiro	não	não	Não
Gonçalves	não	não	Não
Lang	não	sim	Não
Hefez	sim	sim	Não
Garcia e Lequain	sim	sim	Sim

Tabela I – diferenças nas distintas definições de anel

Considerando o conhecimento prévio dos alunos de importância fundamental no processo de ensino e aprendizagem, a investigação sobre os exemplos que poderiam ser afetados pelas distintas definições de anel se limitou a determinados conjuntos que são normalmente conhecidos dos alunos antes deles cursarem a disciplina de Álgebra, a saber, o conjunto dos números inteiros, o conjunto que possui um único elemento, o conjunto dos números inteiros múltiplos de um número natural maior do que um e o conjunto das matrizes quadradas com entradas no conjunto dos números inteiros. Na tabela a seguir temos um resumo dos conjuntos investigados à luz das distintas definições adotadas pelos autores supracitados. Nela, Z denota o conjunto dos números inteiros, {0} denota o conjunto que possui um único elemento (independentemente da sua natureza), nZ denota o conjunto dos números inteiros múltiplos de um número natural n maior do que um e $M_n(Z)$ denota o conjunto das matrizes de ordem n com entradas em Z.

	Z	{0}	nZ	$M_n(Z)$
Monteiro	é anel	é anel com unidade	é anel	é anel
Gonçalves	é anel	é anel sem unidade	é anel	é anel
Lang	é anel	é anel com unidade	não é anel	é anel
Hefez	é anel	não é anel	não é anel	não é anel
Garcia e Lequain	é anel	não é anel	não é anel	é anel não comutativo

Tabela II – diferenças nos exemplos decorrentes das distintas definições de anel

No resultado a seguir temos uma propriedade elementar dos ideais. Observe que a validade desse resultado independe da definição de ideal adotada pelos autores investigados, pois, para qualquer uma delas, um ideal é um subconjunto do anel que contém qualquer produto no qual ao menos um dos fatores pertence ao subconjunto.

Proposição I. Seja R um anel com unidade e seja J um ideal de R. Se a unidade de R pertence a J então $J = R$.

Demonstração. Dado um anel R com unidade 1, seja J um ideal arbitrário de R. Assim, por definição, J é um subconjunto de R. Logo, para obter que J = R, só falta mostrar que R é um subconjunto de J. De fato, tomando um elemento arbitrário x em R, como 1 pertence a J e J é um ideal de R, por definição, temos que x1 pertence a J. Do fato que, por (M3), temos x1 = x, para qualquer x em R, segue que x pertence a J. Como x é um elemento arbitrário em R, decorre que R é um subconjunto de J. Portanto, temos que J = R.

Encerramos esta seção provando algumas propriedades elementares da teoria dos anéis (o item (i) é conhecido como lei do cancelamento para a adição sobre anéis), ressaltando que na demonstração são utilizadas as condições (A1), (A2), (A3), (A4), (M1) e (D), citadas no início da seção anterior. Observe que, como todas as definições de anel investigadas satisfazem ao menos essas condições, tais propriedades são válidas para qualquer das definições de anel adotadas nos textos investigados.

Proposição II. Dado um anel R e dados x, y e z em R, temos que:

(i) se $x + y = x + z$ então $x = y$;

(ii) $x0 = 0$ e $0x = 0$;

(iii) $x(-y) = -(xy)$ e $(-x)y = -(xy)$;

(iv) $-(-x) = x$;

(v) $(-x)(-y) = xy$.

Demonstração. (i) Se $x + z = y + z$, adicionando o oposto de z a ambos os membros, temos $(x + z) - z = (y + z) - z$. Por (A1), temos $x + (z - z) = y + (z - z)$ e, por (A4), que $x + 0 = y + 0$. Assim, por (A3), obtemos $x = y$.

(ii) Note que, por (A4) e (A3), temos $x0 + x0 = x(0 + 0) = x0 = 0 + x0$, ou seja, $x0 + x0 = 0 + x0$. Logo, pelo item (i), segue que $x0 = 0$. A outra igualdade é obtida de maneira análoga.

(iii) Note que, por (D) e (A4), $x(-y) + xy = x(-y + y) = x0 = 0 = -(xy) + xy$, ou seja, $x(-y) + xy = -(xy) + xy$. Logo, pelo item (i), segue que $x(-y) = -(xy)$. A outra igualdade é obtida de maneira análoga.

(iv) Note que, por (A4), temos $-(-x) + (-x) = 0 = x + (-x)$. Logo, pelo item (i), segue que $-(-x) = x$.

(v) Dos itens (iii) e (iv), obtemos que $(-x)(-y) = -((-x)y) = -(-(xy)) = xy$.

4 I CONCLUSÕES

Inicialmente, é importante destacar que o estudo realizado não teve por objetivo qualificar/classificar os textos envolvidos. O objetivo foi investigar, do ponto de vista pedagógico, algumas implicações das distintas definições da estrutura algébrica anel no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Álgebra, que são descritas a seguir.

Conforme se pode verificar na Tabela II, quanto mais condições são impostas ao definir a estrutura algébrica anel, mais se perde em exemplos de conjuntos previamente conhecidos pelos alunos que, munidos de suas operações usuais de adição e multiplicação, podem ser apresentados como exemplos desta estrutura algébrica. Como o estudo da Álgebra exige um nível de abstração maior do que usualmente é exigido em outras disciplinas, quanto mais condições são impostas na definição de anel, maior será a dificuldade do aluno no entendimento desta definição.

Além disso, é importante ressaltar que não apenas a quantidade de exemplos é significativa no entendimento de uma definição, mas também a natureza desses exemplos. Isso posto, observe que as definições adotadas por Garcia e Lequain (2015), Hefez (2016) e Lang (2002) não permitem explorar o conjunto dos números inteiros múltiplos de um número natural maior do que um como um subanel do anel dos números inteiros, uma vez que, para estes autores, anel é sempre unitário. Ao passo que a definição adotada por Hefez (2016) não permite explorar o conjunto das matrizes de ordem *n* sobre o anel dos números inteiros como um anel, haja vista que, para este autor, um anel é sempre comutativo. Portanto, quanto mais condições são impostas na definição de anel, menor será a oportunidade de explorar um conjunto já conhecido dos alunos, em particular se perde a oportunidade de explorar um conjunto bastante conhecido no qual a ordem dos fatores pode alterar o produto.

Ainda no que tange aos exemplos, as definições adotadas por Garcia e Lequain (2015) e Hefez (2016) não admitem formalizar o conceito de *anel nulo*, que é o anel determinado por um conjunto com um único elemento, enquanto a definição adotada por Gonçalves (2015) admite o anel nulo apenas como um anel sem unidade. A adoção dessas definições possivelmente tenta evitar a situação na qual o elemento neutro aditivo e o elemento neutro multiplicativo coincidem, ou seja, a situação na qual $1 = 0$. Embora tal situação seja uma anomalia (verifica-se facilmente que o anel nulo é o único anel em que isso pode ocorrer), do ponto de vista pedagógico o conceito de anel nulo como um anel com unidade, decorrente das definições adotadas por Monteiro (1971) e Lang (2002), é uma oportunidade ímpar de evidenciar ao licenciando que tanto a natureza dos elementos quanto os símbolos utilizados para representá-los são algebricamente irrelevantes.

Quanto à influência das distintas definições de anel em determinados conceitos que dela decorrem, note que, ao incluir a condição (M3) na definição de anel, Hefez (2016) e Lang (2002) precisam naturalmente considerar subanéis com unidade, sendo tal unidade a mesma do anel. Assim, não podem definir um ideal como um tipo particular de subanel, como o faz Gonçalves (2015), haja vista que, pela Proposição I, quando um ideal contém a unidade do anel tal ideal coincide com o próprio anel. Note que, apesar de Garcia e Lequain (2015) não formalizarem de subanel, caso o fizessem, pelo mesmo motivo, não poderiam definir um ideal como um tipo particular de subanel. Neste ponto, cabe ressaltar que, definindo ideal como um conjunto não vazio que contém qualquer soma na qual as parcelas pertencem ao conjunto e que contém qualquer produto no qual ao menos um dos fatores pertence ao conjunto, tem-se uma formalização do conceito de ideal que se adequa a qualquer uma das definições investigadas.

No que diz respeito aos resultados elementares da teoria dos anéis, as propriedades vistas na Proposição II mostram que tais resultados independem da definição adotada.

Tendo em vista essa independência dos resultados elementares da teoria dos anéis, as limitações impostas a conceitos que decorrem da definição de anel quando se impõe mais restrições a esta definição e o fato que reduzir tais restrições amplia a quantidade de exemplos construídos sobre conjuntos previamente conhecidos pelos alunos, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo, conclui-se que, pedagogicamente, é mais interessante adotar uma definição da estrutura algébrica anel que imponha menos restrições.

REFERÊNCIAS

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

KLEINER, I. **A History of Abstract Algebra**. Boston: Birkhäuser, 2007.

LANG, S. **Algebra**. 3th ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

MONTEIRO, J. **Elementos de Álgebra**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1971.