

The background features a complex technical illustration of various gears and mechanical components in shades of grey and blue. A prominent diagonal split separates the top-left area, which is white with faint gear patterns, from the bottom-right area, which is a solid, vibrant blue. The overall aesthetic is clean and modern, typical of a technical or academic publication cover.

**Henrique Ajuz Holzmann
João Dallamuta
(Organizadores)**

Impactos das Tecnologias na Engenharia Mecânica 2

Atena
Editora
Ano 2019

Henrique Ajuz Holzmann
João Dallamuta
(Organizadores)

Impactos das Tecnologias na
Engenharia Mecânica
2

Atena Editora
2019

2019 by Atena Editora

Copyright © da Atena Editora

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Diagramação e Edição de Arte: Lorena Prestes e Geraldo Alves

Revisão: Os autores

Conselho Editorial

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista
Profª Drª Deusilene Souza Vieira Dall’Acqua – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Profª Drª Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I34 Impactos das tecnologias na engenharia mecânica 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Henrique Ajuz Holzmann, João Dallamuta. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Impactos das Tecnologias na Engenharia Mecânica; v. 2)

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

ISBN 978-85-7247-247-0

DOI 10.22533/at.ed.470190504

1. Automação industrial. 2. Engenharia mecânica – Pesquisa – Brasil. 3. Produtividade industrial. 4. Tecnologia. I. Holzmann, Henrique Ajuz. II. Dallamuta, João. III. Série.

CDD 670.427

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores.

2019

Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

www.atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A Engenharia Mecânica pode ser definida como o ramo da engenharia que aplica os princípios de física e ciência dos materiais para a concepção, análise, fabricação e manutenção de sistemas mecânicos

Nos dias atuais a busca pela redução de custos, aliado a qualidade final dos produtos é um marco na sobrevivência das empresas. Nesta obra é conciliada duas atividades essenciais a um engenheiro mecânico: Projetos e Simulação.

É possível observar que na última década, a área de projetos e simulação vem ganhando amplo destaque, pois através de simulações pode-se otimizar os projetos realizados, reduzindo o tempo de execução, a utilização de materiais e os custos finais.

Dessa forma, são apresentados trabalhos teóricos e resultados práticos de diferentes formas de aplicação e abordagens nos projetos dentro da grande área das engenharias.

Trabalhos envolvendo simulações numéricas, tiveram um grande avanço devido a inserção de novos softwares dedicados a áreas específicas, auxiliando o projetista em suas funções. Sabe-los utilizar de uma maneira eficaz e eficiente é um dos desafios dos novos engenheiros.

Neste livro são apresentados vários trabalhos, alguns com resultados práticos, sobre simulações em vários campos da engenharia industrial, elementos de maquinas e projetos de bancadas práticas.

Um compendio de temas e abordagens que constituem a base de conhecimento de profissionais que se dedicam a projetar e fabricar sistemas mecânicos e industriais.

Boa leitura

Henrique Ajuz Holzmann
João Dallamuta

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL COM SOLUÇÃO SUAVE UTILIZANDO MALHA ADAPTATIVA	
<i>Gabriel Marcos Magalhães</i> <i>Hélio Ribeiro Neto</i> <i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4701905041	
CAPÍTULO 2	14
USO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO	
<i>Gabriel Marcos Magalhães</i> <i>Alessandro Alves Santana</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4701905042	
CAPÍTULO 3	29
MÉTODOS NUMÉRICOS: DIFERENÇAS FINITAS E GUIA DE ONDAS DIGITAIS 1D E 2D - COMPARATIVO DE FREQUÊNCIAS	
<i>Brenno Lobo Netto Peixoto</i> <i>Marlipe Garcia Fagundes Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4701905043	
CAPÍTULO 4	43
INFLUÊNCIA DA DISCRETIZAÇÕES ESPACIAL E TEMPORAL EM PROBLEMA PURAMENTE ADVECTIVO	
<i>Thiago Fernando Santiago de Freitas</i> <i>Andreia Aoyagui Nascimento</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4701905044	
CAPÍTULO 5	53
FRONTEIRA IMERSA PARA CORPOS ESBELTOS	
<i>João Rodrigo Andrade</i> <i>Aristeu Silveira Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4701905045	
CAPÍTULO 6	61
MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODELLING OF GAS-SOLID TURBULENT FLOWS IN COMPLEX GEOMETRIES	
<i>Stella Rodrigues Ferreira Lima Ribeiro</i> <i>Letícia Raquel de Oliveira</i> <i>João Marcelo Vedovoto</i> <i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.4701905046	
CAPÍTULO 7	69
ESTUDO NUMÉRICO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA TRANSIENTE EM PLACAS	
<i>William Denner Pires Fonseca</i>	

*Táisa Santos Machado
Eduardo Mendonça Pinheiro
José Felipe Lopes de Carvalho
Sidney da Conceição Alves
Thiago Santana de Oliveira*

DOI 10.22533/at.ed.4701905047

CAPÍTULO 8 83

IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL E PROJETO DE UM PID PARA UM SERVOMECANISMO

*Wesley Pereira Marcos
Rodrigo Hiroshi Murofushi
Bruno Luiz Pereira*

DOI 10.22533/at.ed.4701905048

CAPÍTULO 9 98

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS CONTENDO SHUNT RESISTIVO PARA O CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES

*Lorrane Pereira Ribeiro
Antônio Marcos Gonçalves de Lima
Victor Augusto da Costa Silva*

DOI 10.22533/at.ed.4701905049

CAPÍTULO 10 114

PROJETO E ANÁLISE DE VIBRAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS DE UM CHASSI TIPO SPACE FRAME MINI-BAJA

*Marcos Claudio Gondim
Ellberlandyo Lima Grangeiro
Antonio Eurick Soares Campelo
Lucas Rodrigues Oliveira
Bruno de Oliveira Carvalho*

DOI 10.22533/at.ed.47019050410

CAPÍTULO 11 126

SIMULAÇÕES DOS ESFORÇOS VIBRACIONAIS DO CABO CAA 795 MCM (TERN) ATRAVÉS DE MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS DE VIBRAÇÃO

*Jhonattan Dias
Rodrigo Canestraro Quadros
Marcos Jose Mannala
Marcio Tonetti*

DOI 10.22533/at.ed.47019050411

CAPÍTULO 12 133

PROJETO E CONSTRUÇÃO DE UM SISTEMA DE FREIO APLICADO A UM VEÍCULO OFF-ROAD DO TIPO BAJA-SAE

*Felipe Alencar Motta
Lucas Rocha Dias da Silva*

DOI 10.22533/at.ed.47019050412

CAPÍTULO 13	146
OTIMIZAÇÃO DA ESCOLHA DA RELAÇÃO DE TRANSMISSÃO DE VEÍCULOS AUTOMOTORES ATRAVÉS DE MODELAGEM MATEMÁTICA: O PROJETO BAJA SAE	
<i>Pedro Melo Biz</i>	
<i>Leonardo Gomes</i>	
<i>Antônio Brasil</i>	
DOI 10.22533/at.ed.47019050413	
CAPÍTULO 14	157
ANÁLISE CINEMÁTICA DE SUSPENSÃO TRAILING ARM COM CAMBER LINKS PARA VEÍCULO OFF-ROAD	
<i>Francisco José Rodrigues de Sousa Júnior</i>	
<i>João Lucas Jacob Araújo</i>	
<i>Gustavo Luis dos Santos Silva</i>	
<i>Antônio Ítalo Rodrigues Pedrosa</i>	
DOI 10.22533/at.ed.47019050414	
CAPÍTULO 15	169
APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM EM SUSPENSÃO VEICULAR	
<i>Alaí de Souza Machado</i>	
<i>Pedro Henrique Rodrigues Taveira</i>	
<i>Filipe Gomes Soares</i>	
<i>Domingos dos Santos Ponciano</i>	
<i>Marcus Victor de Brito Rodrigues</i>	
<i>João Lucas Jacob Araújo</i>	
<i>Gean Carlos Moura Mota</i>	
DOI 10.22533/at.ed.47019050415	
CAPÍTULO 16	178
ANÁLISE AERODINÂMICA: SIMULAÇÃO FLUIDO DINÂMICA DO PROTÓTIPO EC-05 DE EFICIÊNCIA ENERGÉTICA DA EQUIPE COYOTE	
<i>Paulo Henrique Pereira Araujo</i>	
<i>Josué Alves Rodrigues Junior</i>	
<i>Thaiane Mayara Marques Licar</i>	
DOI 10.22533/at.ed.47019050416	
CAPÍTULO 17	190
APLICAÇÃO DE SISTEMAS NEURO-FUZZY NA PREDIÇÃO DO COEFICIENTE DE SUSTENTAÇÃO DO AEROFÓLIO NACA 1412	
<i>Vitor Taha Sant'Ana</i>	
<i>Bruno Luiz Pereira</i>	
<i>Tobias Moraes</i>	
<i>Roberto Mendes Finzi Neto</i>	
DOI 10.22533/at.ed.47019050417	

CAPÍTULO 18	195
AVALIAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE ATIVO DE RUÍDO EM VENEZIANAS ACÚSTICAS COM CONFIGURAÇÕES DISTINTAS VIA ELEMENTOS FINITOS	
<i>Geisa Arruda Zuffi</i>	
<i>Fabiana Alves Pereira</i>	
<i>Marcus Antonio Viana Duarte</i>	
DOI 10.22533/at.ed.47019050418	
CAPÍTULO 19	203
ABSORVEDORES ACÚSTICOS DE RUÍDO: MODELAGEM NUMÉRICA	
<i>Fabiana Alves Pereira</i>	
<i>Geisa Arruda Zuffi</i>	
<i>Israel Jorge Cárdenas Nuñez</i>	
<i>Marcus Antonio Viana Duarte</i>	
DOI 10.22533/at.ed.47019050419	
CAPÍTULO 20	211
INVESTIGAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA ESCOLHA DAS DIMENSÕES DO RECEPTOR NO MÉTODO DO TRAÇADO DE RAIOS ACÚSTICOS	
<i>Henrique Gebran Silva</i>	
<i>Marlipe Garcia Fagundes Neto</i>	
<i>Pollyana Alves Resende</i>	
DOI 10.22533/at.ed.47019050420	
SOBRE OS ORGANIZADORES	228

INFLUÊNCIA DA DISCRETIZAÇÕES ESPACIAL E TEMPORAL EM PROBLEMA PURAMENTE ADVECTIVO

Thiago Fernando Santiago de Freitas

Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação, Goiânia, GO.

Andreia Aoyagui Nascimento

Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação, Goiânia, GO

RESUMO: Este trabalho aborda solução da equação de Burgers unidimensional e condição de contorno periódica, para um escoamento invíscido. O código desenvolvido é baseado no método dos Volumes Finitos de 2ª ordem, com três diferentes métodos de avanço temporal: método de Euler, método de Runge-Kutta de quarta ordem e o método de Lax-Friedrichs todos explícitos no tempo. No presente trabalho são analisados os erros gerados pelas discretizações, espacial e temporal. Os resultados, qualitativos e quantitativos, são mostrados e discutidos, abrangendo a ordem de convergência numérica para os três métodos de avanço temporais e o custo computacional de cada simulação.

PALAVRAS-CHAVE: Método dos volumes finitos, equação de advecção-difusão, unidimensional, diferentes avanços temporais.

ABSTRACT: This present work approaches the solution of Burgers equation, at one-dimension

problem, using periodic boundary condition and inviscid fluid. The numerical procedure is based on a finite-volume method and second order discretization, furthermore three different time advances were implemented: Euler method, Runge-Kutta fourth order method and Lax-Friedrichs method, all of them explicit in time. In the present paper, errors generated by space and time discretization. The qualitative and quantitative results are shown and discussed, for different mesh, which allowed obtain convergence numeric order to three different advancement temporal and the computational cost of each simulation.

KEYWORDS: finite volume method, advection - diffusion equation, one-dimension, different advancement temporal.

INTRODUÇÃO

Os problemas de engenharia podem ser resolvidos de três formas: experimentalmente, numericamente e por soluções analíticas. As soluções analíticas possuem a vantagem de conceber resultados exatos, porém esse tipo de resolução fica restrito a situações, modelagens e geometrias muito simples, gerando assim resultados totalmente de acordo com a modelagem do problema, mas não retratando o fenômeno real modelado. A medida que

a modelagem do problema se aproxima da situação real, e caso esta modele um fenômeno que aceite poucas simplificações, a obtenção da solução analítica tende a se tornar cada vez mais onerosa podendo até se tornar impossível com métodos matemáticos conhecidos, isso é realidade se considerado fenômenos turbulentos.

Uma outra alternativa para a solução de problemas de engenharia são os métodos experimentais, estes apresentam uma grande vantagem que é a não dependência de modelos matemáticos para que se obtenha resultados satisfatórios, já que há o contato direto com o fenômeno estudado ou um equivalente em laboratório, entretanto a qualidade dos resultados obtidos estão atrelada à qualidade dos equipamentos de medição, a correta concepção do experimento e o correto processamento de dados. Há ainda a impossibilidade de conseguir a reprodução adequado dos fenômenos em laboratório (Patankar, 1980).

Finalmente, existem as soluções numéricas. Elas conseguem gerar respostas muito mais completas do que métodos experimentais e são capazes de resolver modelos matemáticos e/ou geometrias complexas ao contrário das soluções analíticas, mesmo que apresentem erros numéricos inerentes as soluções numéricas. O uso de técnicas numéricas para a solução de problemas complexos de engenharia e da física é hoje uma

Simulações numéricas apresentam fundamentalmente dois tipos de erros: o erro numérico, associado a resolução numérica das equações diferenciais, e o erro físico, ligado as diferenças entre a resolução das equações diferenciais e o fenômeno físico de interesse. A fim de se atestar que uma simulação é satisfatória faz se necessário, verificação numérica e a validação física. A validação numérica atesta a qualidade do método numérico e a física atesta o modelo matemático usado.

O método numérico tem a função de transformar as equações diferenciais do modelo matemático para equações algébricas que serão definidas para partições do domínio, ao realizar o refinamento das malhas (elevar a quantidade de partições do domínio) as equações algébricas fornecem resultados mais precisos.

A formulação no tempo das discretizações influenciar bastante na resolução numérica do modelo. Basicamente há três formulações mais utilizadas: a explícita, a implícita e a de Crank-Nicolson (Semi-Implícita). Na formulação explícita os valores das variáveis estão explícitos no tempo, na formulação implícita os valores de variáveis utilizados para os cálculos estão no tempo da frente, e na formulação Crank-Nicolson os valores das variáveis são obtidos pelas combinações de ambas formulações supracitadas, *i.e.* esta é uma formulação híbrida que utiliza ambos os valores, Fortuna, (2000) e Maliska, (1995).

TRABALHOS RELACIONADOS

Nascimento *et al.* (2011) apresentam uma análise comparativa entre dois métodos numéricos: o método dos volumes finitos (MVF) e o método Pseudoespectral

de Fourier (MPEFO), para solução da equação de equação da difusão térmica, com solução manufaturada, transiente, periódica, unidimensional, com três diferentes incrementos temporais e quatro malhas diferentes. Neste trabalho os resultados levam em conta o custo computacional e a ordem de convergência para uma condição inicial de distribuição de temperatura contínua

Rafael *et al.* (2012) mostram uma análise de erros para a equação de advecção-difusão utilizando o MVF. Uma análise a priori foi feita pela expansão de Taylor e uma estimativa dos erros de discretização é feita, comparando os valores obtidos da simulação com a solução analítica.

Nascimento *et al.* (2014) relatam em seu trabalho uma comparação entre o método dos Volumes Finitos e o método Pseudoespectral de Fourier para solução da equação de equação de advecção-difusão, com solução manufaturada descontínua, transiente, periódica, unidimensional. O artigo também aborda a influência da fronteira imersa no MPEFO tanto na acurácia quanto na ordem de convergência numérica.

O presente trabalho empregou o MVF de 2ª ordem, unidimensional com condição de contorno periódica, para solução de uma equação analítica (Senoide). Os resultados do presente trabalho abordam três distintos métodos de avanço temporal: Método de Euler (ME), Método de Lax-Friedrichs (MLF) e Método de Runge-Kutta de 4ª ordem (MRK4) e os erros são comparados.

PROBLEMA FÍSICO

O problema físico consiste no estudo da propagação de uma onda contínua, ou seja, uma função senoidal, como apresentado na Figura 1, em um domínio cujo comprimento possui valor de 2π [m].

A equação 1 apresenta a função utilizada, em que $u(x)$ é a velocidade do fluido na direção horizontal [m/s] e x é o comprimento do domínio [m],

$$u(x) = \sin(x) \quad (1)$$

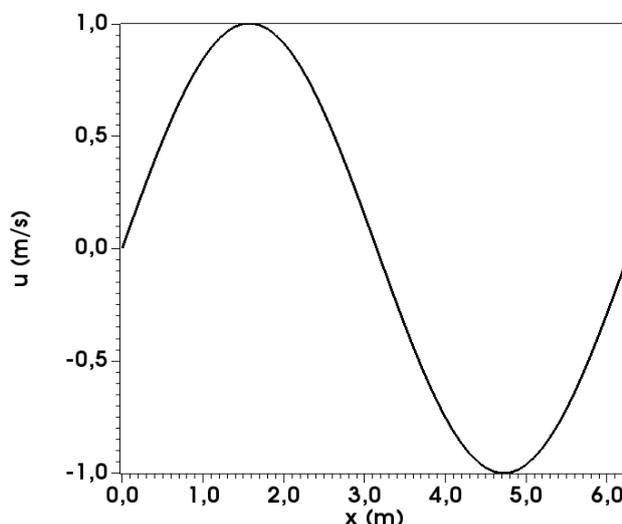


Figura 1. Condição Inicial

O movimento do fluido ao longo do tempo foi simulado segundo a equação de advecção-difusão ilustrada pela Eq. 2. Em que u se refere a velocidade do fluido, t o tempo, c a velocidade de advecção do fluido, x representa o domínio e ν a viscosidade cinemática do fluido.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A movimentação de um fluido Newtoniano, incompressível, isotérmico e com propriedades constantes, é dada pela equação de Navier-Stokes Eq. 2,

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -1/\rho \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (2)$$

onde P é a pressão, ρ é a massa específica e ν é a viscosidade cinemática. Considerando que não haja força externa, pode-se omitir o termo de pressão, para apenas uma direção tem-se a Equação de Advecção-Difusão denominada de Equação de Burgers (Eq. 3)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3)$$

onde está presente três termos: o termo transiente, $\frac{\partial u}{\partial t}$, o termo advectivo, $c \frac{\partial u}{\partial x}$, e o termo difusivo, $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Para um escoamento invíscido, ou seja, viscosidade cinemática possui o valor zero, têm-se a equação de Burgers invíscido, Eq. 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Assim a equação 3 torna-se puramente advectiva, onde a velocidade de advecção é de $c = -1$. Assim o modelo matemático da Eq. 4 pode ser simplificado para a Eq. 5,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5)$$

MODELAGEM NUMÉRICA

A fim de resolver a solução matemática apresenta por meio do método dos volumes finitos, é necessário a realização da discretização do domínio, ou seja, transformá-lo do contínuo para o discreto com dimensão do volume de Δx , dada pela Eq. 6, onde L é valor do comprimento de domínio e N é o número de divisões do domínio.

$$\Delta x = \frac{L}{N-1} \quad (6)$$

Na Figura 2 mostra o esquema de discretização do domínio, onde P, W e E se referem ao: volume principal, volume posicionado a oeste do volume principal, e volume posicionado a leste do centro do volume principal, respectivamente. As faces

do volume principal são, designados w e e , que representam a fronteira posicionada a oeste e leste do volume principal (Maliska, 1995).

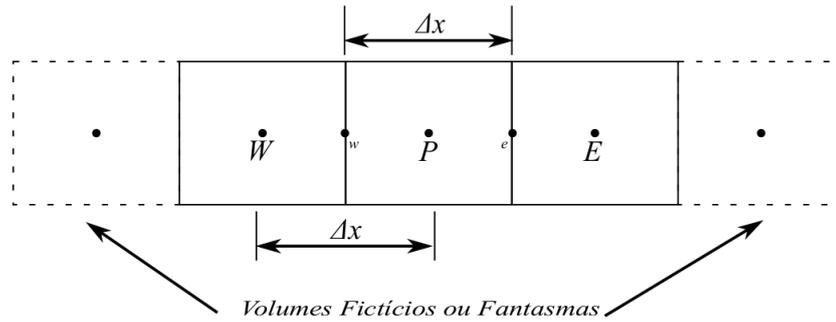


FIGURA 2. Esquema de Volumes Finitos

Aplicando o método de volumes finitos na Eq. 5, obtém-se a Eq. 8 que representa o processo de integração ao longo do tempo e ao longo do comprimento do volume principal,

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial u}{\partial x} dx dt. \quad (7)$$

Resolvendo a Eq. 7 e reorganizando,

$$u_{t+\Delta t, P} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_e - u_w) + u_{t, P}. \quad (8)$$

onde Δt é o incremento temporal, u_e e u_w são as velocidades presentes nas faces do volume principal, para obter o seu valor foi feito uso do método das diferenças centrais (CDS), Eq. 9 e Eq. 10

$$u_e = \frac{u_E + u_P}{2}, \quad (9)$$

$$u_w = \frac{u_P + u_W}{2}. \quad (10)$$

Substituindo as Eq. 9 - 10 na Eq. 8 e reorganizando têm-se,

$$u_{t+\Delta t, P} = u_{t, P} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_E - u_W), \quad (11)$$

A Equação 12 representa a discretização da Eq. 7 pelo método de avanço temporal, Lax-Friedrichs,

$$u_{t+\Delta t} = \frac{u_{t, E} + u_{t, W}}{2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_E - u_W). \quad (12)$$

O primeiro termo da Eq. 12 gera estabilidade segundo o método de estabilidade de von Neumann, entretanto a estabilidade é obtida incorporando uma difusividade numérica na solução. Para que o efeito difusivo não gere imenso impacto na solução numérica, utilizou um número de Courant (CFL) igual a 1,0 o qual deve ser igual ou menor que a unidade para se ter acurácia (Anderson, 1995).

As Equações 13-17 representam as equações usadas para implementação do método de Runge-Kutta de 4ª ordem,

$$K_1 = \frac{(u_E - u_W)}{2\Delta x}, \quad (13)$$

$$K_2 = \frac{(u_E - u_W)}{2\Delta x} + \frac{\Delta t K_1}{2}, \quad (14)$$

$$K_3 = \frac{(u_E - u_W)}{2\Delta x} + \frac{\Delta t K_2}{2}, \quad (15)$$

$$K_4 = \frac{(u_E - u_W)}{2\Delta x} + \Delta t K_3, \quad (16)$$

$$u_{t+\Delta t, P} = u_{t, P} + \frac{\Delta t}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \quad (17)$$

O incremento temporal foi dado pela Eq. 17,

$$\Delta t = \text{CFL} \Delta x. \quad (18)$$

Os valores CFL para cada simulação numérica estão presentes na Tabela 1.

Avanços temporais	CFL
ME	10^{-4}
MRK4	10^{-4}
MLF	1,0

TABELA 1. Avanços temporais de cada método numérico

Os erros numéricos, foram calculados pela norma L2, Eq. 19, para uma malha de 32, 64, 128 e 256 volumes. Os termos ua , u e N se referem, respectivamente, a velocidade para a solução analítica, a velocidade para a solução numérica e ao número de divisões do domínio,

$$L2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{N+1} (ua(i) - u(i))^2}{N}}, \quad (19)$$

Parâmetros de simulação	Variáveis	valores
Comprimento do domínio	L [m]	2π
Número de divisões	N	32, 64, 128 e 256
Tempo final	t [s]	$\pi/2$

Tabela 2. Parâmetros de simulação

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados obtidos pela simulação com o uso dos valores presentes na Tabela 1 e na Tabela 2, estão apresentados nas Figuras 3 - 5.

A Figura 3 ilustra os resultados obtidos para: a condição inicial, o método de Euler (ME), o método de Runge-Kutta 4ª ordem (MRK4) e a solução analítica em $t = 1,5$ [s] para $N = 64$. Nota-se que ambas as soluções numéricas obtiveram resultados extremamente próximos a solução analítica, mantendo os mesmos valores presentes das amplitudes (picos e vales) em $1,0$ [m/s], ou seja, para ambos não ocorre perda dissipativa.

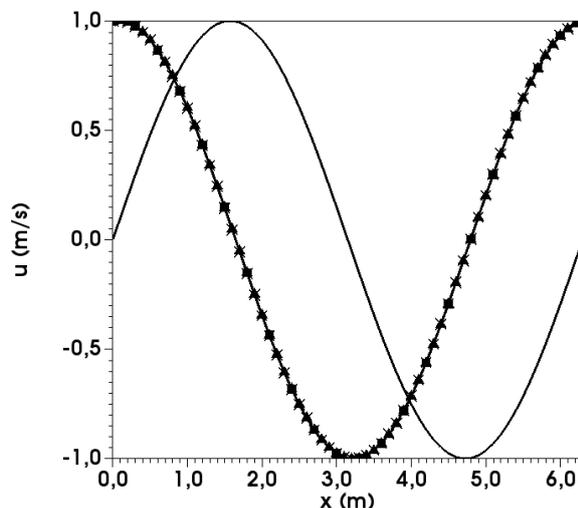


FIGURA 3. Comparativo entre MRK4(■), ME(▲), solução analítica(x) e condição inicial (-)

Utilizando a solução pelo método de Lax-Friedrichs (MLF), ilustrados na Figura 4, para $t = 1,5$ [s] e $N = 64$. Nota-se um significativo erro entre a solução numérica e a analítica. Pode-se notar que para problemas puramente advectivos, MLF acrescenta erros de caráter difusivo, retardando a velocidade de propagação da velocidade, como esperado.

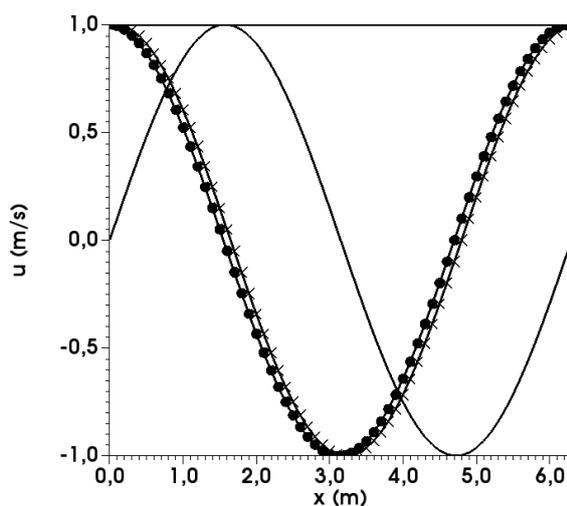


FIGURA 4. Comparativo entre MLF (●), solução analítica(x) e condição inicial (-)

A Figura 5 apresenta os resultados de erro obtido a partir da norma L2, onde a primeira ordem (O_1) e segunda ordem (O_2) de convergência. Observa-se que

mesmo ao refinar a malha, os ME e MRK4 apresentam a tendência semelhantes a 2ª ordem (O_2).

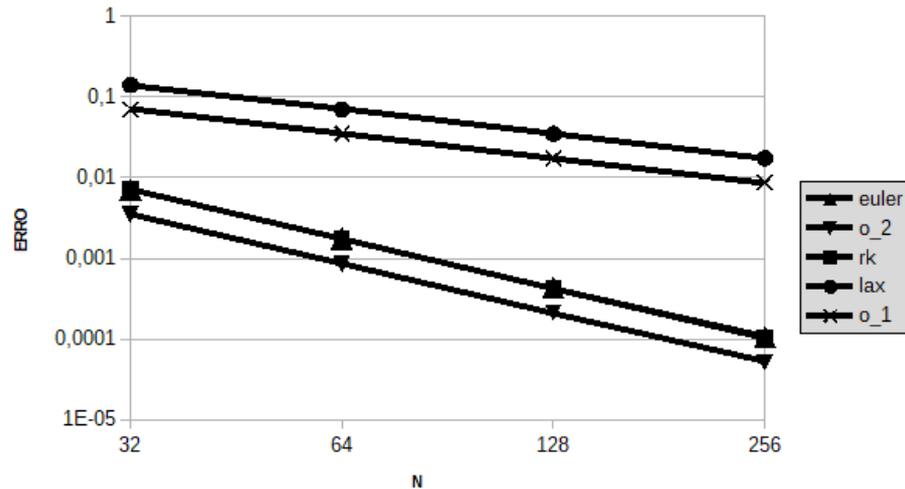


Figura 5. Ordem de Convergência: MRK4 (■), ME (▲) e MLF (●)

Pode-se concluir que ao utilizar ME com $CFL = 10^{-4}$, a solução apresentou erros mais significativos oriundos da discretização do espacial, a qual foi utilizada MVF de 2ª Ordem. Por outro lado, ao utilizar um avanço temporal de ordem maior, MRK4, não ocorreu variação na ordem de decaimento mantendo-se 2ª ordem de decaimento. Portanto, mesmo utilizando o MRK4 e $CFL = 10^{-4}$, os erros na simulação ainda são mais significativos na discretização espacial.

Ainda na Figura 5, observa-se que para a solução com MLF a solução tende a 1ª ordem (O_1) de decaimento, devido à viscosidade artificial inserida pelo presente método na solução numérica.

Método de avanço temporal	N=32	N=64	N=128	N=256
ME	0,207	0,788	2,501	10,108
MRK4	0,340	1,322	3,412	14,264
MLF	0,003	0,005	0,014	0,043

Tabela 3. Custo computacional, em segundos, por métodos de avanço temporal

A Tabela 3 apresenta os custos computacionais das simulações realizadas, os valores foram obtidos com um processador Core i5-7200U 2.5 GHz Turbo Boost up para clock de 3.1 Ghz. O avanço temporal pelo MLF apresenta valores muito baixos comparando com ME e o MRK4, isso deve-se em parte, ao $CFL = 1,0$, o que torna o incremento temporal superior ao utilizados para os demais métodos. O custo computacional para o avanço temporal ME apresentou valor inferior ao custo obtido pelo uso do MRK4, como já era esperado, visto que o MRK4 é subdividido em 4 etapas enquanto o ME é feito em apenas uma etapa.

Observando os valores de custo computacional na Tabela 3 nota-se que o custo é elevado em aproximadamente 64% ao modificar método de avanço no tempo, *i.e.* modificando de ME para MRK4 e mantendo a mesma malha de 32 volumes, ao dobrar o número de pontos o custo computacional eleva-se novamente para aproximadamente 68% e reduzindo para 36% para uma malha com 128 volumes e 41% para uma malha de 256 volumes. Assim pode-se concluir que para o mesmo CFL, e uma malha acima de 128 volumes, para o problema proposto, o ME apresentou-se com melhor do que o MRK4 por consumir menos tempo computacional, apresentar mesma ordem de convergência numérica e erros muito semelhantes ao MRK4

CONCLUSÃO

Com base nos resultados obtidos entende-se que o método de Euler para a resolução de um problema puramente advectivo apresenta estabilidade com o uso de incrementos temporais com valores inferiores aos métodos: MRK4 e MLF.

Com base nos resultados obtidos com a implementação do método de Runge-Kutta 4^a Ordem pode-se concluir que, a principal fonte de erros das simulações está presente na discretização espacial. Consequentemente para ordens de convergência mais altas, entende-se que sejam necessárias ordem de discretizações maiores.

Os custos computacionais utilizando o MRK4 foram os maiores, isso se explica devido a este método utilizar de quatro passos a mais do que os demais testados.

Ainda com base no custo computacional, conclui-se que para o problema proposto o método de Euler explícito apresenta-se maior vantagens do que o método Runge-Kutta 4^a ordem.

AGRADECIMENTOS

Os autores do artigo agradecem a Universidade Federal de Goiás (UFG) e a escola de engenharia: Elétrica, Mecânica e de Computação da UFG pelo apoio ao longo da confecção do presente artigo, a FURNAS – Centrais Elétricas S.A. pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

Anderson Jr, J. D., **Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications**, editora McGraw-Hill series in Mechanical Engineering – McGraw-Hill series in aeronautical and aerospace Engineering, 1995.

Fortuna, A O, **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. 2^a edição, editora EDUSP, São Paulo, 2000.

Maliska, C. R., **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**, 2^a edição, Editora LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1995.

Nascimento, A. A., Mariano, F. P., Padilha, E. L. M., 2011, **Solução Manufaturada de um Problema de Difusão Utilizando os Métodos dos Volumes Finitos e Espectral de Fourier**, In: 21° POSMEC – Simpósio do Programa de Pós-Graduação. Uberlândia. Anais 2011.

Nascimento, A. A., Mariano, F. P., Padilha, E. L. M., Silveria-Neto., A, **A comparison of Fourier pseudospectral method and finite volume method used to solve the Burgers equation**, J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. V. 36, p 737–742 Dez 2014.

PATANKAR, S. V., **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**, USA, editora Taylor & Francis, 1980.

Rafael, R. C., Vasconcelos, J. F. V, **O Método de Volumes Finitos Aplicados em Equações Unidimensionais**, In: Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, CMAC, Nordeste, 2012.

SOBRE OS ORGANIZADORES

Henrique Ajuz Holzmann - Professor assistente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Graduação em Tecnologia em Fabricação Mecânica e Engenharia Mecânica pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Mestre em Engenharia de Produção pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Doutorando em Engenharia e Ciência dos Materiais pela Universidade Estadual de Ponta Grossa. Trabalha com os temas: Revestimentos resistentes a corrosão, Soldagem e Caracterização de revestimentos soldados.

João Dallamuta - Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Engenheiro de Telecomunicações pela UFPR. Especialista em Inteligência de Mercado pela FAE Business School. Mestre em Engenharia pela UEL. Trabalha com os temas: Inteligência de Mercado, Sistemas Eletrônicos e Gestão Institucional.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-247-0

