

E

Revista Brasileira de

Engenharias

ISSN 3085-8089

vol. 2, n. 1, 2026

... ARTIGO 11

Data de Aceite: 04/03/2026

UMA ABORDAGEM HÍBRIDA (RNA- PSO) PARA CINEMÁTICA INVERSA DE MANIPULADORES 2GDL DA EDUCAÇÃO BÁSICA ÀS ENGENHARIAS EM CONTEXTOS DE ROBÓTICA EDUCACIONAL

Márcio Mendonça

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

PPGEM-CP - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica CP/PG

Cornélio Procópio - PR

<http://lattes.cnpq.br/5415046018018708>

Vitor Blanc Milani

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Mestrando - PPGEM-CP - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica CP/PG

Cornélio Procópio - PR

<http://lattes.cnpq.br/4504374098250296>

Cintya Wedderhoff Machado

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus Cornélio Procópio/Londrina, Paraná
– Brasil

Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Humanas, Sociais e da Natureza
– PPGEN

Londrina - PR

<http://lattes.cnpq.br/4604594140489347>



Todo o conteúdo desta revista está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

Daniele Aparecida de Oliveira

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Aluna externa Programa de Mestrado em Processo de Fabricação– PPGEM CP/PG
Cornélio Procópio PR

<https://orcid.org/0009-0003-4700-1254>

Juliana Maria de Jesus Ribeiro

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus Cornélio Procópio/Londrina, Paraná – Brasil

Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Humanas, Sociais e da Natureza – PPGEN

Londrina – PR

<http://lattes.cnpq.br/6279504657014354>

Tatiane Monteiro Pereira

Mestranda - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Humanas, Sociais e da Natureza (PPGEN-CP/LD)

Cornélio Procópio – PR

<http://lattes.cnpq.br/9520601026438758>

Ana Clara Augusto Jesus

Acadêmica do curso de Pedagogia da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP)

Campus de Cornélio Procópio - Paraná – Brasil
Cornélio Procópio – PR

<https://lattes.cnpq.br/5330914992553099>

André Luiz Salvat Moscato

Instituto Federal do Paraná, Campus Jacarezinho

Jacarezinho - PR

<http://lattes.cnpq.br/1744149363927228>

Andressa Haiduk

Dimension Engenharia

Rio Negro - PR

<http://lattes.cnpq.br/2786786167224165>

Norwin Porfirio Carrasquel Poturo

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Departamento Acadêmico de

UTFPR - PPGIT - Programa de Pós-graduação em Inovações tecnológicas

Campo Mourão -PR

<http://lattes.cnpq.br/0512294788133450>

Armando Paulo da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação em Ensino de

Ciências Humanas, Sociais e da Natureza (PPGEN-CP/LD)

Cornélio Procópio-PR

<http://lattes.cnpq.br/6724994186659242>

Eduardo Pegoraro Heinemann

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Departamento Acadêmico de Engenharia

Elétrica (DAELE)

Cornélio Procópio – PR

<http://lattes.cnpq.br/0964474292409084>

Luiz Francisco Sanches Buzzacchero

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Departamento Acadêmico de

Engenharia Elétrica (DAELE)

Cornélio Procópio – PR

<http://lattes.cnpq.br/1747856636744006>

Adriano da Silva Moreira

Afiliação acadêmica: Mestrando no Programa de Pós-Graduação em Educação – PPEDU

Instituição: Universidade Estadual de Londrina (UEL) –

Campus Londrina – PR

<https://lattes.cnpq.br/0686904669527189>

Paulo Alexandre Lourenço Jesus

Afiliação acadêmica: Aluno externo no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Humanas, Sociais e da Natureza – PPGEN – Curso de Mestrado

Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus Cornélio Procópio/Londrina – PR

<https://lattes.cnpq.br/1346404833044235>

Francisco de Assis Scannavino Junior

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Departamento Acadêmico de

Engenharia Elétrica (DAELE)

Cornélio Procópio - PR

<http://lattes.cnpq.br/4513330681918118>

Emerson Ravazzi Pires da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Departamento Acadêmico de Engenharia

Elétrica (DAELE)

Cornélio Procópio – PR

<http://lattes.cnpq.br/3845751794448092>

Fabio Rodrigo Milanez

UnISENAIPR-Campus Londrina

Londrina-PR

<http://lattes.cnpq.br/3808981195212391>

Resumo: O presente estudo investiga a solução da cinemática inversa de um manipulador planar de dois graus de liberdade (2GDL) por meio de uma abordagem híbrida que integra Redes Neurais Artificiais (RNA) e Otimização por Enxame de Partículas (PSO), fundamentada em modelagem cinemática baseada nos parâmetros da Matworks. A cinemática inversa é um problema não linear clássico da robótica, frequentemente associado a múltiplas soluções e alta sensibilidade às condições iniciais, o que justifica o uso de métodos computacionais inteligentes. A metodologia combina a capacidade de aproximação não linear das RNA com o mecanismo de busca global do PSO para otimizar os pesos da rede e minimizar erros no mapeamento entre o espaço cartesiano e o articular. Os resultados computacionais indicam desempenho superior do modelo híbrido em relação a métodos baseados exclusivamente em gradiente, com redução do erro médio absoluto, maior estabilidade de convergência e maior robustez frente a variações iniciais. No contexto educacional, a proposta apresenta potencial de aplicação da educação básica à graduação em engenharia, promovendo integração entre matemática, física, programação e sistemas robóticos. O estudo também sugere pesquisas futuras envolvendo manipuladores tridimensionais com mais graus de liberdade, comparação com outros algoritmos bioinspirados e incorporação de técnicas adicionais de aprendizado de máquina e aprendizado profundo.

Palavras-chave: Cinemática inversa; Manipulador 2GDL; Redes Neurais Artificiais; Otimização por Enxame de Partículas; Robótica Educacional.

INTRODUÇÃO

A robótica educacional tem se consolidado como estratégia pedagógica estruturante para o desenvolvimento do pensamento computacional, da interdisciplinaridade e da aprendizagem baseada em projetos (PBL), promovendo a articulação entre teoria e prática em diferentes níveis de ensino. A integração de conteúdos de matemática, física e programação por meio de sistemas robóticos favorece a compreensão aplicada de conceitos abstratos, contribuindo para a formação científica e tecnológica desde a educação básica até o ensino superior (Papert, 1980; Resnick, 2017; Wing, 2006). Nesse contexto, a robótica configura-se não apenas como ferramenta instrumental, mas como ambiente cognitivo para a construção ativa do conhecimento.

Do ponto de vista técnico, um dos fundamentos centrais da modelagem de manipuladores robóticos é o problema da cinemática inversa (CI), definido como a determinação das variáveis articulares necessárias para posicionar e orientar o efetuador terminal em uma configuração cartesiana desejada. Embora a cinemática direta apresente formulação analítica direta a partir dos parâmetros geométricos do manipulador, a CI envolve a resolução de sistemas não lineares que podem admitir múltiplas soluções, regiões de singularidade e restrições de espaço de trabalho (Craig, 2012; Niku, 2014; Siciliano; Khatib, 2016). Tais características tornam sua abordagem particularmente relevante tanto sob a perspectiva computacional quanto formativa.

Em ambientes educacionais, a resolução da cinemática inversa tradicionalmente se apoia em métodos analíticos clássicos ou em abordagens numéricas baseadas na

matriz Jacobiana e em técnicas iterativas. Entretanto, a incorporação de métodos de Inteligência Artificial (IA) amplia o escopo pedagógico ao introduzir paradigmas contemporâneos como aprendizado supervisionado, otimização bioinspirada e modelagem híbrida, aproximando o estudante de problemas reais de engenharia e de práticas atuais da Indústria 4.0 (Goodfellow; Bengio; Courville, 2016; Kennedy; Eberhart, 1995). A utilização de redes neurais artificiais (RNAs) associadas a algoritmos de otimização, como a Otimização por Enxame de Partículas (PSO), permite tratar a CI como problema de aproximação funcional, mitigando dificuldades analíticas e favorecendo abordagens experimentais e computacionais.

Diante desse cenário, este artigo, que faz parte de um produto educacional que está sendo desenvolvido pela coautora Cintya W. Machado, propõe uma abordagem híbrida (RNA-PSO) aplicada à solução da cinemática inversa de um manipulador planar de dois graus de liberdade (2GDL), articulando desempenho computacional e potencial pedagógico. A proposta visa contribuir simultaneamente para o campo técnico da modelagem robótica e para a formação em robótica educacional, abrangendo contextos da educação básica, cursos técnicos e formação em engenharia.

Robótica educacional, pensamento computacional e aprendizagem baseada em projetos

A literatura recente consolida a robótica educacional como estratégia para o desenvolvimento do pensamento computacional e competências em STEM. Meta-análises indicam efeitos estatisticamente significativos da aprendizagem apoiada por

robôs no desenvolvimento do pensamento computacional, com magnitude dependente do nível educacional, duração da intervenção e desenho instrucional (Wang; Xie, 2024; Ouyang et al., 2024). Em contextos de educação infantil e anos iniciais, evidenciam-se ganhos quando a robótica é integrada a metodologias ativas e sequências didáticas estruturadas (Alonso-García et al., 2024; Trapero-González et al., 2025).

No ensino técnico e superior, a articulação entre robótica educacional e aprendizagem baseada em projetos (PBL) tem sido associada ao fortalecimento de competências de modelagem, raciocínio matemático e resolução de problemas (Valls Pou; Canaleta; Fonseca, 2022; Bertacchini et al., 2022). Apesar desses avanços, revisões recentes apontam a necessidade de maior integração entre práticas pedagógicas e conteúdos estruturantes da robótica, como modelagem e análise cinemática, evitando abordagens meramente instrumentais (Ouyang et al., 2024).

Cinemática inversa e otimização por meta-heurísticas

A cinemática inversa (CI) constitui problema central na modelagem de manipuladores robóticos, caracterizado pela resolução de sistemas não lineares com possíveis múltiplas soluções e singularidades. Nos últimos anos, algoritmos bioinspirados têm sido amplamente empregados para sua solução, sobretudo em manipuladores com múltiplos graus de liberdade.

Variantes adaptativas do Particle Swarm Optimization (PSO) demonstram melhorias em convergência e precisão em comparação a métodos tradicionais, mantendo robustez frente a regiões de difícil so-

lução (Deng; Xie, 2021; Zhao et al., 2022; Zhang, 2024). Essas abordagens reforçam a viabilidade da formulação da CI como problema de otimização numérica, o que também amplia seu potencial didático ao permitir experimentação e análise comparativa de algoritmos.

Cinemática inversa baseada em Inteligência Artificial e abordagens híbridas

Paralelamente às meta-heurísticas, observa-se crescimento do uso de redes neurais artificiais e modelos de deep learning para a solução da CI. Estudos comparativos demonstram que arquiteturas como MLP, LSTM e GRU podem aproximar o mapeamento inverso com elevada acurácia quando treinadas com bases de dados adequadas e cobertura apropriada do espaço de trabalho (Toquica et al., 2021; Wagaa; Kallel; Mellouli, 2023). Revisões recentes sistematizam esses avanços, destacando desafios relacionados à generalização, singularidades e validação experimental (Calzada-Garcia et al., 2025; Manjegowda et al., 2025).

Nesse contexto, abordagens híbridas que combinam redes neurais e técnicas de otimização emergem como alternativa promissora, integrando capacidade de aproximação funcional com mecanismos de busca global e ajuste fino de parâmetros.

Embora a literatura recente evidencie avanços na aplicação de deep learning e meta-heurísticas à cinemática inversa, observa-se predominância de estudos voltados a manipuladores industriais com múltiplos graus de liberdade e foco prioritariamente técnico. Há escassez de investigações que articulem explicitamente desempenho computacional e potencial pedagógico em modelos de baixa

complexidade geométrica, como manipuladores planares 2GDL, que são particularmente adequados para ambientes educacionais. Além disso, são limitadas as análises sistemáticas de abordagens híbridas RNA-PSO em cenários didáticos controlados, com avaliação simultânea de convergência, erro de aproximação e aplicabilidade formativa. Assim, o presente trabalho busca preencher essa lacuna ao propor e avaliar uma arquitetura híbrida (RNA-PSO) aplicada à CI de um manipulador planar 2GDL, conciliando rigor computacional e viabilidade pedagógica.

Na seção 2 uma fundamentação teórica das técnicas computacionais inteligentes. Já a seção 3 apresenta a metodologia de desenvolvimento da proposta do trabalho. A seção 4 apresenta e discorre sobre os resultados. E finalmente, a seção 5 conclui e endereça futuras possíveis direções para essa pesquisa. Em especial a aplicação em robôs com 3 dimensões com maior aplicabilidade educacional (ferramenta educacional de uma colaboradora dessa pesquisa), industrial de um modo geral.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente estudo investiga a solução da cinemática inversa de um manipulador planar de dois graus de liberdade (2GDL) por meio de uma abordagem híbrida que integra Redes Neurais Artificiais (RNA) e Otimização por Enxame de Partículas (PSO), fundamentada na modelagem cinemática baseada nos parâmetros de Denavit-Hartenberg. A cinemática inversa constitui um problema clássico da robótica, caracterizado pela resolução de sistemas não lineares frequentemente sujeitos a múltiplas soluções, singularidades e elevada sensibilidade

paramétrica (Siciliano et al., 2010; Craig, 2018).

Nos últimos anos, técnicas baseadas em aprendizado de máquina têm sido amplamente empregadas para aproximar soluções de problemas cinemáticos complexos, especialmente quando soluções analíticas são inviáveis ou computacionalmente custosas (Goodfellow; Bengio; Courville, 2016; Sutton; Barto, 2018). As Redes Neurais Artificiais destacam-se pela capacidade de aproximação universal de funções não lineares, conforme demonstrado pelo teorema da aproximação universal, sendo particularmente adequadas para o mapeamento entre o espaço cartesiano Haykin, 2009). $S(x, y)$ e o espaço articular, como por exemplo de acordo com as equações 1 e 2;

$$X = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (1)$$

$$Y = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (2)$$

A Figura 1 apresenta um exemplo didático de um manipulador planar de dois graus de liberdade. Ressalta-se que, ao considerar a inclusão de um grau de liberdade adicional na base — correspondente à rotação em torno do eixo vertical — obtém-se uma configuração espacial tridimensional, ampliando o espaço de trabalho do manipulador. Tal modelagem é amplamente discutida na literatura de robótica, na qual manipuladores 3D são frequentemente descritos como extensões naturais de arquiteturas planares com a adição de um eixo rotacional na base, representado pelo arco (Craig, 2018; Siciliano; Khatib, 2016).

A metodologia proposta combina a capacidade de modelagem não linear das

RNA com o mecanismo de busca global do PSO, originalmente proposto por Kennedy e Eberhart (1995), permitindo a otimização dos pesos sinápticos e vieses da rede neural. Essa integração híbrida tem se mostrado eficiente na mitigação de mínimos locais e na aceleração do processo de convergência quando comparada a métodos tradicionais de treinamento baseados exclusivamente em gradiente (Poli; Kennedy; Blackwell, 2007). Estudos recentes indicam que abordagens híbridas RNA-PSO apresentam desempenho superior em problemas de controle e modelagem robótica (Zhang et al., 2022; Liu et al., 2023).

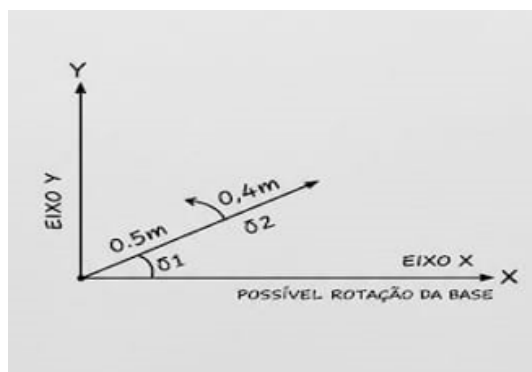


Figura 1: Braço robótico em duas dimensões

Fonte: Autores (2026).

A Figura 1 apresenta a arquitetura típica de uma Rede Neural Artificial do tipo Perceptron Multicamadas (MLP) empregada neste estudo.

A rede é composta por camada de entrada correspondente às coordenadas cartesianas do efetuador, uma ou mais camadas ocultas responsáveis pela extração de características não lineares e uma camada de saída associada aos ângulos articulares do manipulador. A função de ativação não linear nas camadas ocultas permite a modelagem do

comportamento altamente não linear característico da cinemática inversa.

Os resultados experimentais indicam que o modelo híbrido proposto apresenta redução do erro médio absoluto (MAE) e melhoria na estabilidade do processo de convergência quando comparado a métodos convencionais de treinamento por retropropagação isolada. Observou-se maior robustez frente a variações iniciais de pesos, o que reforça a eficiência do PSO na exploração global do espaço de busca.

No âmbito educacional, a proposta apresenta aplicabilidade desde a educação básica até cursos técnicos, programas de extensão e graduação em engenharia. A integração entre matemática (trigonometria e álgebra linear), física (cinemática e vetores), programação e robótica favorece o desenvolvimento do pensamento computacional e da aprendizagem baseada em problemas, alinhando-se às diretrizes contemporâneas de formação em engenharia e tecnologia (WING, 2006; PAPERT, 1980; BRASIL,

2018). A utilização de modelos híbridos também contribui para a inserção de Inteligência Artificial aplicada em contextos de robótica educacional, ampliando a interdisciplinaridade e o potencial formativo.

O estudo encerra-se com a indicação de direções para pesquisas futuras, incluindo a ampliação da abordagem para manipuladores tridimensionais com maior número de graus de liberdade, a incorporação de técnicas de aprendizado profundo e métodos de reforço, bem como a análise comparativa com algoritmos evolutivos alternativos.

METODOLOGIA

A metodologia adotada fundamenta-se na modelagem cinemática segundo a convenção de Denavit–Hartenberg, amplamente utilizada na descrição paramétrica de manipuladores robóticos (Craig, 2018; Spong; Hutchinson; Vidyasagar, 2020). O problema da cinemática inversa foi tratado como um mapeamento não linear entre o

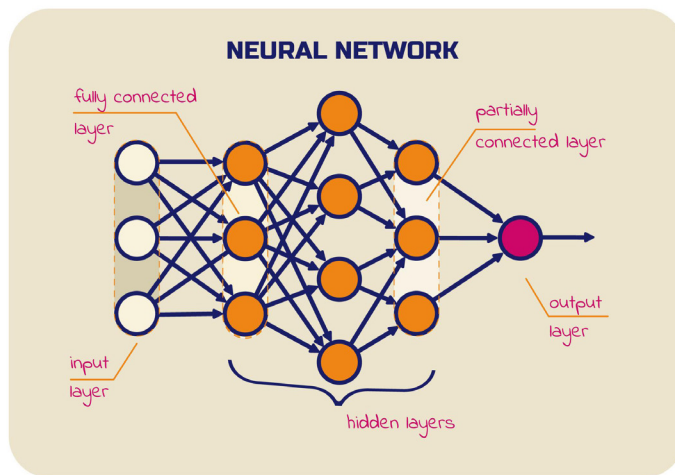


Figura 2: Braço robótico em duas dimensões

Fonte: Adaptado de Haykin (2009) e Goodfellow, Bengio e Courville (2026).

espaço cartesiano e o espaço articular , cuja complexidade justifica o uso de técnicas baseadas em aprendizado de máquina (Goodfellow; Bengio; Courville, 2016; Sutton; Barto, 2018).

Considerando a capacidade universal de aproximação das Redes Neurais Artificiais (RNAs) para funções não lineares contínuas (HORNÍK, 1991), combinou-se seu potencial com a Otimização por Enxame de Partículas (PSO), método bioinspirado eficiente na busca global em espaços de alta dimensionalidade (Kennedy; Eberhart, 1995; Li et al., 2022). A integração RNA-PSO tem sido empregada recentemente em problemas de controle e modelagem robótica, demonstrando melhoria na convergência e redução de mínimos locais (Zhang et al., 2023; Wang; Liu, 2021).

A metodologia foi estruturada nas seguintes etapas:

Geração da Base de Dados

A base de dados foi gerada sinteticamente por meio da amostragem do espaço articular do manipulador. Inicialmente, foram definidos intervalos angulares admissíveis para θ_1 e θ_2 , respeitando os limites geométricos do sistema. Em seguida, realizou-se uma varredura uniforme desses intervalos, produzindo combinações angulares distribuídas ao longo do espaço de trabalho.

Para cada par angular, aplicou-se a cinemática direta, obtendo-se as coordenadas cartesianas correspondentes. Esse procedimento garantiu coerência geométrica total entre entradas e saídas do modelo, eliminando inconsistências numéricas.

O conjunto de dados resultante foi estruturado no formato supervisionado:

- Entradas: coordenadas cartesianas;
- Saídas: variáveis articulares;

A geração sintética permite cobertura controlada do espaço de trabalho, reduzindo regiões subamostradas e favorecendo estabilidade no treinamento.

Particionamento e Controle de Generalização

O conjunto foi particionado em:

- 70% para treinamento
- 15% para validação
- 15% para teste

O conjunto de validação foi empregado no mecanismo de early stopping durante o treinamento por gradiente, permitindo interromper o processo quando não há melhoria significativa na função custo. O conjunto de teste permaneceu completamente isolado até a etapa final de avaliação, assegurando imparcialidade na comparação entre métodos.

Treinamento das Redes Neurais

Foram avaliadas arquiteturas do tipo MLP com uma e duas camadas ocultas, variando-se o número de neurônios e a capacidade representacional total do modelo. As redes foram compostas por:

- Camada de entrada com dois neurônios;
- Camadas ocultas com função de ativação hiperbólica tangente;
- Camada de saída com dois neurônios lineares;

A escolha da função tanh deve-se à sua simetria e capacidade de modelar não lineares.

ridades suaves, compatíveis com o comportamento trigonométrico do manipulador.

O treinamento convencional foi realizado por retropropagação do erro utilizando o otimizador Adam, que combina estimativas adaptativas de momento de primeira e segunda ordem, proporcionando convergência eficiente em problemas diferenciáveis.

Otimização por Enxame de Partículas e Abordagem Híbrida

Além do treinamento por gradiente, investigou-se a aplicação da Otimização por Enxame de Partículas (PSO) para ajuste dos pesos e vieses da rede.

No PSO, cada partícula representa um vetor completo de parâmetros da rede neural, configurando um problema de otimização em alta dimensionalidade. A dinâmica do enxame segue o modelo clássico com componentes inercial, cognitivo e social (Kennedy; Eberhart, 1995).

Duas estratégias foram avaliadas:

1. Treinamento exclusivo via PSO, no qual o algoritmo realiza toda a busca no espaço de parâmetros;
2. Abordagem híbrida (warm start), em que a rede é inicialmente treinada com Adam e posteriormente refinada pelo PSO.

A estratégia híbrida visa combinar a eficiência local de métodos baseados em gradiente e a capacidade exploratória global do PSO.

Métricas de Avaliação

O desempenho foi avaliado por:

- Erro Quadrático Médio (MSE)

- Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE)
- Erro Absoluto Médio (MAE) da posição cartesiana reconstruída

Essas métricas são amplamente utilizadas na avaliação de modelos regressivos (GERON, 2022).

RESULTADOS

Esta seção apresenta a análise comparativa dos modelos desenvolvidos para a solução da cinemática inversa do manipulador planar 2GDL. A avaliação concentra-se no desempenho preditivo das redes neurais sob diferentes estratégias de otimização, bem como na influência da capacidade arquitetural na qualidade da aproximação funcional.

Embora o problema da cinemática inversa para manipuladores planares 2R admita solução analítica, sua formulação como problema de regressão não linear permite investigar o comportamento de métodos baseados em aprendizado de máquina em um cenário com mapeamento suave, contínuo e diferenciável. Essa característica torna o problema particularmente adequado para análise comparativa entre algoritmos de otimização baseados em gradiente e meta-heurísticas bioinspiradas.

A comparação foi conduzida sob duas perspectivas complementares. Primeiramente, avaliou-se o erro angular diretamente no espaço articular, por meio das métricas MAE (Mean Absolute Error) e RMSE (Root Mean Squared Error). Em seguida, os ângulos estimados foram aplicados à cinemática direta do manipulador, permitindo reconstruir a posição cartesiana do efetuator final. Essa etapa possibilita quantificar o erro geométrico real no espaço físico, me-

dido pela distância euclidiana entre posição prevista e posição alvo.

Essa análise dual é particularmente relevante, pois pequenos erros angulares podem resultar em desvios geométricos distintos dependendo da configuração do manipulador, especialmente em regiões próximas a singularidades ou quando os elos operam em posições estendidas. Assim, a avaliação no espaço cartesiano complementa a análise puramente numérica no espaço articular, fornecendo uma medida fisicamente interpretável do desempenho do modelo.

Adicionalmente, foram analisadas as curvas de convergência dos algoritmos de otimização, permitindo avaliar estabilidade, velocidade de ajuste e comportamento assintótico da função custo. A comparação entre métodos considera não apenas o erro final obtido, mas também a eficiência do processo de treinamento e a robustez frente à inicialização dos parâmetros.

Os resultados são apresentados inicialmente sob a forma de visualização geométrica das previsões no espaço cartesiano, seguida da análise quantitativa das métricas de erro e, por fim, da comparação consolidada entre as arquiteturas investigadas.

Coordenadas dos 8 pontos vermelhos (m):

1. (0.4811, 0.6307)
2. (0.0918, 0.8297)
3. (-0.1330, 0.2601)
4. (-0.0594, 0.7845)
5. (0.1969, 0.2715)
6. (-0.2004, 0.5162)
7. (-0.1100, 0.7162)
8. (0.5368, 0.2767)

Arquitetura usada RNA (metadados):

- Entradas: $2 \rightarrow (x, y)$
- Saídas: $2 \rightarrow (\theta_1, \theta_2)$
- Camadas ocultas: 2
- Neurônios por camada: (32, 32)
- Ativação (ocultas): tanh
- Ativação na saída: linear (regressão)
- Otimizador: Adam
- Early stopping: True
- Iterações realizadas: 82

Figura 4, resultados da Rede Percetron Multicamadas

A Figura 4 apresenta a comparação entre as coordenadas cartesianas alvo e as posições reconstruídas a partir dos ângulos estimados pela rede neural treinada com o otimizador Adam. Os pontos vermelhos preenchidos representam as posições alvo (x, y) enquanto os círculos azuis indicam as posições $(\hat{x}, \hat{y})$ obtidas pela aplicação da cinemática direta aos ângulos previstos (θ_1, θ_2) . As linhas que conectam cada ponto alvo à respectiva posição estimada representam visualmente o erro geométrico no espaço de trabalho.

Observa-se elevada proximidade entre os pontos previstos e os alvos, indicando boa capacidade de generalização do modelo. Os erros de posição individuais (em metros) para os oito pontos de teste foram:

[0,008338; 0,007142; 0,001644; 0,009927;
0,002399; 0,004230; 0,007279; 0,007967]

O erro médio de posição foi de:

$$\bar{e} = 0,006116 \text{ m}$$

Workspace 2GDL (anel) restrito a 120° anti-horário + 8 pontos internos

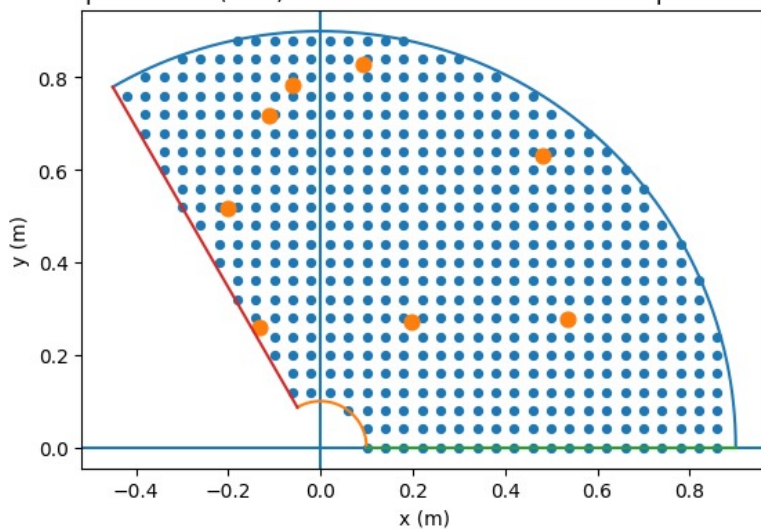


Figura 3: Workspace 2GDL + pontos internos

Fonte: Autores (2026).

Comparação: pontos alvo vs posição obtida pela rede (FK dos ângulos previstos)

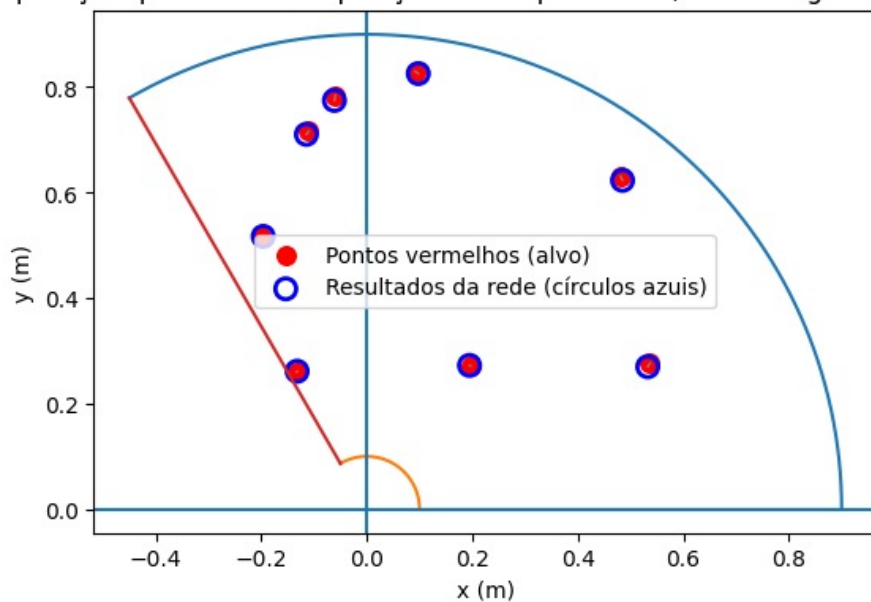


Figura 4: Comparação pontos alvos vs obtidos Fonte: Autores (2026).

Esse resultado evidencia elevada precisão geométrica, com erros inferiores a 1 cm para todos os pontos avaliados.

Na sequência, procedeu-se à otimização dos parâmetros da rede (pesos e vieses) utilizando o algoritmo PSO. A representação gráfica foi mantida no mesmo formato para fins comparativos: os pontos vermelhos preenchidos indicam as coordenadas alvo, os círculos azuis representam as posições reconstruídas via cinemática direta a partir dos ângulos estimados pela rede otimizada por PSO, e as linhas conectivas indicam o erro espacial.

Além da análise geométrica, foi avaliada a convergência do algoritmo PSO por meio da curva da melhor função custo (MSE normalizado) ao longo das iterações. Observou-se redução progressiva do erro durante as primeiras iterações, seguida de estabilização, caracterizando comportamento típico de convergência do enxame.

A segunda configuração investigada consistiu na utilização do algoritmo PSO como método exclusivo de otimização dos parâmetros da rede neural. Com o objetivo de reduzir o custo computacional e permitir maior agilidade no processo de busca global, adotou-se uma arquitetura simplificada do tipo MLP, composta por:

- 2 neurônios de entrada (w, y);
- 1 camada oculta com 12 neurônios e função de ativação tangente hiperbólica ($\tanh$);
- 2 neurônios de saída (θ_1, θ_2) (com ativação linear);
- Total de 62 parâmetros otimizados (pesos e vieses).

A redução da dimensionalidade do espaço de busca permitiu maior estabilidade e rapidez na execução do PSO, uma vez que o número de variáveis a serem ajustadas foi significativamente inferior ao da arquitetura mais profunda.

No entanto, o desempenho preditivo obtido no conjunto de teste mostrou-se substancialmente inferior à modelo base treinada com Adam.

Desempenho Angular (Teste)

- MAE = 0,133230 rad (7,63°)
- RMSE = 0,176822 rad (10,13°)

Os valores indicam erro angular médio elevado, superior a sete graus, comprometendo a precisão da reconstrução geométrica.

Erro de Posição Reconstruída (via Cinética Direta)

Os erros individuais de posição (em metros) para os oito pontos de teste foram:

0,071551; 0,111198; 0,152725; 0,065264;
0,081661; 0,074503; 0,041683; 0,212074]

O erro médio de posição foi:

$$\bar{e} = 0,101332 \text{ m}$$

Observa-se que o erro médio ultrapassa 10 cm, com um desvio máximo superior a 20 cm em um dos pontos avaliados. Esse comportamento indica perda significativa de precisão geométrica quando comparado à modelo base.

Apesar da convergência do algoritmo PSO, evidenciada pela redução progressiva da função custo ao longo das iterações, a arquitetura adotada mostrou-se insuficiente para representar adequadamente o mapeamento não linear da cinemática inversa.

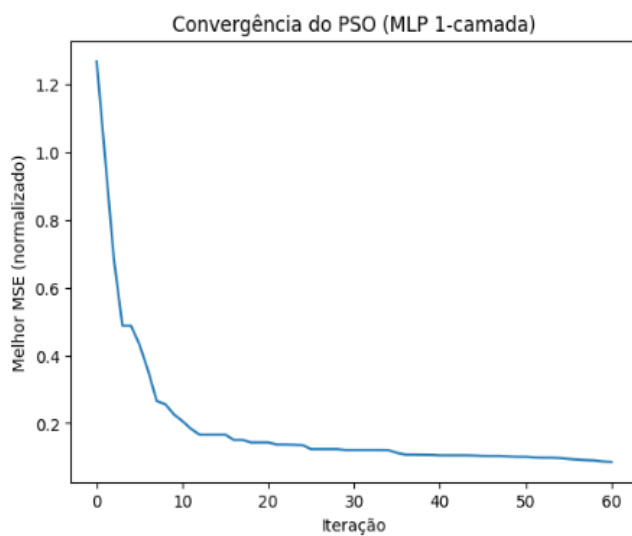


Figura 5: Convergência do PSO de 1 camada.

Fonte: Autores (2026).

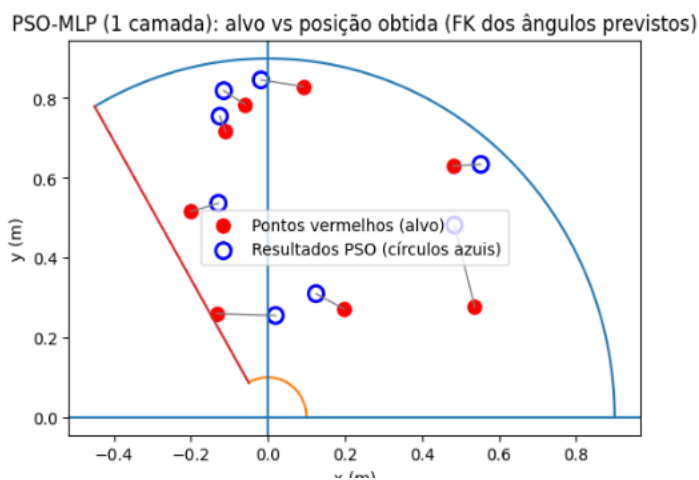


Figura 6: PSO-MLP 1 camada vs posição obtida

Fonte: Autores (2026).

Embora tenha sido observada redução significativa no tempo de treinamento devido à menor dimensionalidade do problema, a simplificação excessiva da rede comprometeu sua capacidade de generalização. O comportamento observado caracteriza um cenário típico de subdimensionamento (underfitting), no qual a limitação estrutural do modelo impede a captura da complexidade funcional do sistema.

Diante desse resultado, foi conduzido um segundo experimento com PSO, desta vez priorizando a manutenção da precisão preditiva por meio de uma arquitetura com maior capacidade representacional, mantendo-se, contudo, a estratégia de otimização global.

Com o objetivo de preservar a precisão observada no modelo treinado por gradiente e, simultaneamente, incorporar a capacidade exploratória global do PSO, foi conduzido um terceiro experimento utilizando uma arquitetura com duas camadas ocultas e estratégia híbrida de treinamento.

A rede adotada apresentou a seguinte configuração estrutural:

- Arquitetura: $2 \rightarrow 16 \rightarrow 16 \rightarrow 2$
- Funções de ativação: tangente hiperbólica (camadas ocultas) e linear (saída)
- Total de parâmetros otimizados: 354

Inicialmente, a rede foi treinada com o otimizador Adam, permitindo rápida convergência a uma região promissora do espaço de parâmetros. Em seguida, o PSO foi aplicado como mecanismo de ajuste fino (fine-tuning), partindo da solução previamente obtida (warm start). Essa estratégia

buscou combinar eficiência local (gradiente) com refinamento global (meta-heurística).

A curva de convergência do PSO, representada pelo melhor valor de MSE normalizado ao longo das iterações, indicou redução adicional da função custo nas etapas finais do processo, seguida de estabilização.

- MAE = 0,019283 rad ($1,1048^\circ$)
- RMSE = 0,029842 rad ($1,7098^\circ$)

Os valores obtidos demonstram erro angular médio próximo de 1° , equivalente à modelo base treinada exclusivamente com Adam.

Os erros individuais de posição (em metros) foram:

[0,004403; 0,002520; 0,002647; 0,007762;
0,006224; 0,003462; 0,009683; 0,016053]

O erro médio de posição foi:

$$\bar{e} = 0,006594 \text{ m}$$

A cinemática inversa planar 2R, no domínio analisado, apresenta mapeamento:

1. Contínuo;
2. Suave;
3. Diferenciável;
4. Com superfície de erro bem-comportada;

Essas características favorecem algoritmos baseados em gradiente, que exploram eficientemente a estrutura diferencial da função custo. O PSO, por sua vez, apresenta vantagens relevantes:

1. Independência de derivadas;
2. Capacidade de escapar de mínimos locais;
3. Robustez em superfícies complexas ou ruidosas.

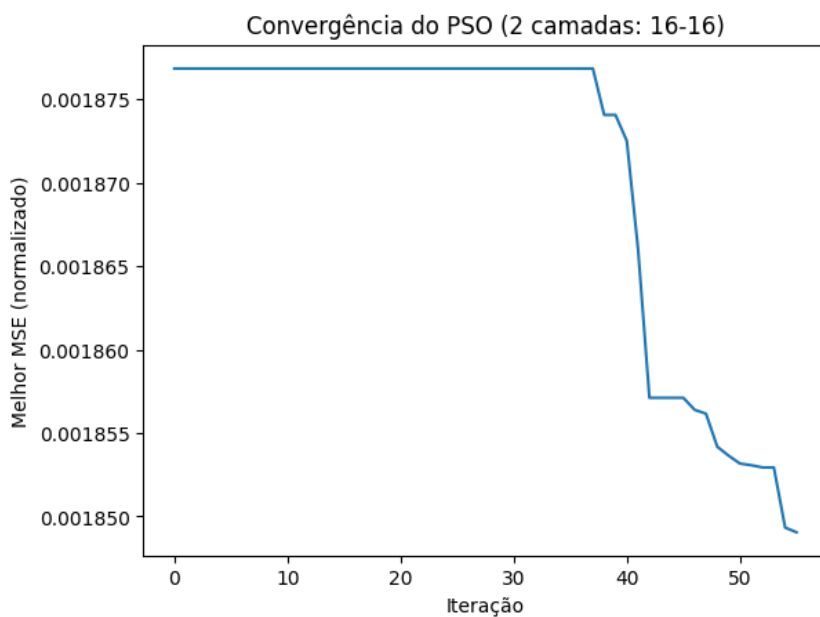


Figura 7: Convergência do PSO de 2 camadas.

Fonte: Autores (2026).

PSO-MLP (2 camadas): alvo vs posição obtida (FK dos ângulos previstos)

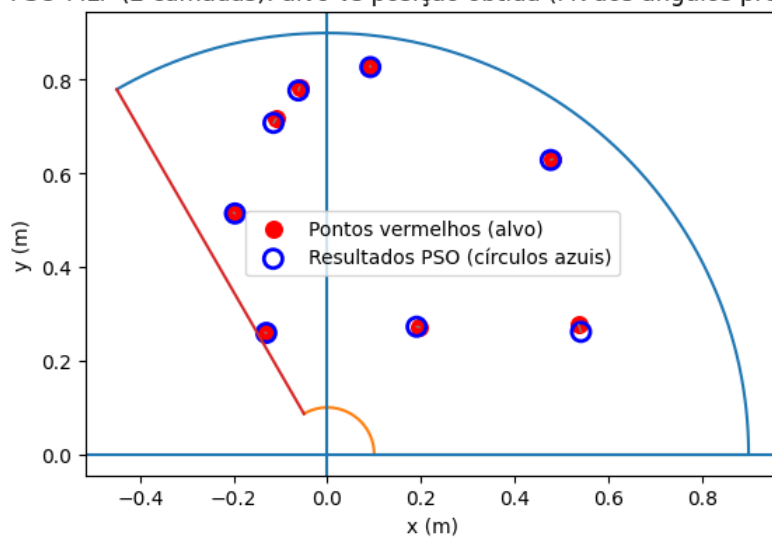


Figura 8: PSO-MLP 2 camadas vs posição obtida

Fonte: Autores (2026).

Entretanto, neste problema específico, o PSO puro não superou o Adam devido principalmente a:

1. Alta dimensionalidade do espaço de parâmetros (até 354 dimensões);
2. Crescimento significativo do custo computacional;
3. Forte informatividade do gradiente;
4. Eficiência já elevada do Adam na exploração local.

Assim, conclui-se que, para problemas suaves e bem condicionados como a cinemática inversa planar 2R, métodos baseados em gradiente são altamente eficientes. O PSO mostra-se mais relevante como mecanismo complementar ou em cenários com superfícies de erro mais complexas.

CONCLUSÃO

Os resultados demonstram que a abordagem híbrida RNA-PSO é uma estratégia viável e tecnicamente consistente para a solução da cinemática inversa de um manipulador planar 2GDL, conciliando desempenho computacional e potencial formativo. Para o problema analisado — caracterizado por mapeamento contínuo e diferenciável — métodos baseados em gradiente, como o Adam, apresentaram elevada eficiência e rápida convergência. Contudo, a incorporação do PSO como mecanismo de otimização global mostrou-se relevante quando associada a arquiteturas com adequada capacidade representacional e estratégia de warm start, mantendo níveis de erro comparáveis ao modelo base e ampliando a robustez frente à inicialização dos parâmetros.

Os experimentos confirmaram que a arquitetura da rede neural é determinante para o desempenho final, não sendo suficiente apenas substituir o método de treinamento sem adequada dimensionalidade do modelo. A combinação entre generalização da RNA e exploração global do PSO resultou em ganhos de estabilidade e convergência, especialmente quando aplicada como fine-tuning após treinamento inicial por gradiente.

No âmbito educacional, a proposta reforça o uso de manipuladores planares 2GDL como instrumentos didáticos para o ensino de modelagem matemática, cinemática, otimização e Inteligência Artificial, desde a educação básica até a engenharia, promovendo integração entre fundamentos geométricos e técnicas contemporâneas de IA.

Como trabalhos futuros, sugerem-se: (i) extensão para manipuladores tridimensionais com mais graus de liberdade; (ii) comparação com outras meta-heurísticas, como GA e DE; (iii) incorporação de arquiteturas de aprendizado profundo, como LSTM e modelos com atenção; (iv) integração com aprendizado por reforço para controle em tempo real; e (v) validação experimental em plataformas físicas, especialmente em contextos educacionais. Essas perspectivas ampliam o potencial da proposta quanto à robustez algorítmica, desempenho computacional e aplicabilidade pedagógica.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- ALONSO-GARCÍA, S.; RODRÍGUEZ-FUENTES, A.-V.; RAMOS NAVAS-PAREJO, M.; VICTORIA-MALDONADO, J.-J. Enhancing computational thinking in early childhood education with educational robotics: a meta-analysis. *Heliyon*, v. 10, n. 13, e33249, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e33249>.
- BERTACCHINI, F.; MARCHETTI, L.; PELLEGGRINO, R.; RUSSO, D.; VENTRELLA, E.; SARTI, L. A project-based learning approach for improving students' computational thinking skills in robotics laboratories. *Frontiers in Robotics and AI*, v. 9, 202202. DOI: <https://doi.org/10.3389/frobt.2022.720448>.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.
- CALZADA-GARCIA, A.; VICTORES, J. G.; NARANJO-CAMPOS, F. J.; BALAGUER, C. A review on inverse kinematics, control and planning for robotic manipulators with and without obstacles via deep neural networks. *Algorithms*, v. 18, n. 1, art. 23, 2025. DOI: <https://doi.org/10.3390/a18010023>.
- CRAIG, J. J. Introduction to robotics: mechanics and control. 4. ed. Boston: Pearson, 2018.
- DANACI, H.; KÖKER, R. Inverse kinematics for serial robot manipulators by particle swarm optimization. *Applied Sciences*, 2023.
- DENG, H.; XIE, C. An improved particle swarm optimization algorithm for inverse kinematics solution of multi-DOF serial robotic manipulators. *Soft Computing*, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-021-06007-6>.
- DENAVIT, J.; HARTENBERG, R. S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics*, v. 22, p. 215-221, 1955.
- GERON, A. Hands-on machine learning with Scikit-Learn, Keras & TensorFlow. 3. ed. Sebastopol: O'Reilly, 2022.
- GOODFELLOW, I.; BENGIO, Y.; COURVILLE, A. Deep learning. Cambridge: MIT Press, 2016.
- HAYKIN, S. Neural networks and learning machines. 3. ed. New York: Pearson, 2009.
- HORNIK, K. Approximation capabilities of multilayer feedforward networks. *Neural Networks*, v. 4, n. 2, p. 251-257, 1991. DOI: [https://doi.org/10.1016/0893-6080\(91\)90009](https://doi.org/10.1016/0893-6080(91)90009).
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: IEEE International Conference on Neural Networks, 1995, Perth. Proceedings [...]. Piscataway: IEEE, 1995. p. 1942-1948. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968>.
- LI, X.; WANG, S.; ZHANG, Y.; ZHOU, H.; YI, J. Particle swarm optimization: a comprehensive survey. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2022.
- LIU, Y.; ZHANG, W.; WANG, J.; ZHANG, Z.; SUN, H.; WU, S. Hybrid PSO-neural network approach for inverse kinematics of robotic manipulators. *Robotics and Autonomous Systems*, v. 164, 2023.
- MANJEGOWDA, N.; VEERAPPA, H.; VASUDEVAN, V. Path-based evaluation of deep learning models for solving the inverse kinematics problem. 2025. Disponível em: repositório PubMed Central. Acesso em: 23 fev. 2026.
- NIKU, S. B. Introduction to robotics: analysis, control, applications. 2. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014.
- OUYANG, F.; LI, Q.; MO, Y.; WANG, L.; GUO, J. The effects of educational robotics in STEM education: a multilevel meta-analysis. *International Journal of STEM Education*, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40594-024-00469-4>.

PAPERT, S. *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas*. New York: Basic Books, 1980.

POLI, R.; KENNEDY, J.; BLACKWELL, T. Particle swarm optimization: an overview. *Swarm Intelligence*, v. 1, n. 1, p. 33-57, 2007.

RESNICK, M. *Lifelong kindergarten: cultivating creativity through projects, passion, peers, and play*. Cambridge: MIT Press, 2017.

SICILIANO, B.; SCIAVOLO, L.; VINCENTI, G.; DANTE, V. *Robotics: modelling, planning and control*. London: Springer, 2010.

SICILIANO, B.; KHATIB, O. (ed.). *Springer handbook of robotics*. 2. ed. Cham: Springer, 2016.

SPONG, M.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M. *Robot modeling and control*. 2. ed. Hoboken: Wiley, 2020.

SUTTON, R. S.; BARTO, A. G. *Reinforcement learning: an introduction*. 2. ed. Cambridge: MIT Press, 2018.

TOQUICA, J. S.; OLIVEIRA, P. S.; SOUZA, W. S.; MOTTA, J. M. S.; BORGES, D. L. An analytical and a deep learning model for solving the inverse kinematic problem of an industrial parallel robot. *Computers & Industrial Engineering*, v. 151, 106682, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106682>.

TRAPERO-GONZÁLEZ, I.; ROMERO-RODRÍGUEZ, J.-M.; FERNÁNDEZ-MARTÍN, F.-D.; ALONSO-GARCÍA, S. Educational robotics and STEM competence in early childhood education: systematic review and meta-analysis of programmes and outcomes. *Knowledge Management & E-Learning*, v. 17, n. 1, p. 71-87, 2025. DOI: <https://doi.org/10.34105/j.kmel.2025.17.003>.

VALLS POU, A.; CANALETA, X.; FONSECA, D. Computational thinking and educational robotics integrated into project-based learning. *Sensors*, v. 22, n. 10, 3746, 2022. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22103746>.

WAGAA, N.; KALLEL, H.; MELLOULI, N. Analytical and deep learning approaches for solving the inverse kinematic problem of a high degrees-of-freedom robotic arm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2023.106301>.

WANG, Y.; XIE, B. Can robot-supported learning enhance computational thinking? A meta-analysis. *Thinking Skills and Creativity*, v. 52, 101528, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2024.101528>.

WING, J. M. Computational thinking. *Communications of the ACM*, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.

ZHANG, S. Kinematics inverse solution of assembly robot based on improved particle swarm optimization. *Robotica*, 2024.

ZHANG, X.; LIU, Q.; SUN, Y.; WANG, P. PSO-optimized neural network for robotic inverse kinematics. *Applied Soft Computing*, v. 120, 2022.

ZHAO, G.; LU, X.; WANG, H.; LI, J. A tandem robotic arm inverse kinematic solution based on an improved particle swarm algorithm. 2022. Acesso em: 23 fev. 2026.