



C A P Í T U L O 1

SUCESIONES DE FAREY Y SUS PROPIEDADES FUNDAMENTALES

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.345112619021>

Carlos Alberto Peña Miranda

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
<https://orcid.org/0000-0002-4339-4615>

Rodolfo José Gálvez Pérez

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
<https://orcid.org/0000-0002-6349-7793>

Humberto Emiliano Gálvez Pérez

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
<https://orcid.org/0000-0003-2827-3564>

Alex Armando Cruz Huallpara

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
<https://orcid.org/0000-0002-5453-6885>

Elizabeth Cusi Cruz

Universidad Norbert Wiener
<https://orcid.org/0000-0002-0255-7705>

RESUMEN: En este trabajo se estudian las sucesiones de Farey, que comprenden todas las fracciones irreducibles entre 0 y 1 con denominador menor o igual a un número positivo n . Se analizan sus propiedades fundamentales, mostrando que las fracciones consecutivas no comparten denominador, que existe una relación aritmética específica entre ellas y que la fracción mediatriz de dos fracciones consecutivas es irreducible y aparece en la sucesión de orden siguiente. Estos resultados permiten construir las sucesiones de Farey de manera sistemática, analizar la distribución de las fracciones racionales en el intervalo $[0,1]$ y generar nuevas fracciones preservando la irreducibilidad y controlando los denominadores.

PALABRAS CLAVE: Sucesiones de Farey; fracciones irreducibles; fracciones consecutivas, relación fundamental, mediatriz.

FAREY SUCCESSIONS AND ITS FUNDAMENTAL PROPERTIES

ABSTRACT: In this work, Farey sequences are studied, which comprise all irreducible fractions between 0 and 1 with denominators less than or equal to a positive integer n . Their fundamental properties are analyzed, showing that consecutive fractions do not share denominators, that a specific arithmetic relation exists between them, and that the mediant of two consecutive fractions is irreducible and appears in the sequence of the next order. These results allow the systematic construction of Farey sequences, the analysis of the distribution of rational fractions in the interval $[0,1]$, and the generation of new fractions while preserving irreducibility and controlling the denominators.

KEYWORDS: Farey sequences; irreducible fractions; consecutive fractions; fundamental relation; mediant.

INTRODUCCIÓN

La matemática no solo construye verdades, sino que también revela belleza. Detrás de cada definición, teorema o demostración existe una intuición que conecta ideas y despierta asombro. En este sentido, pocas áreas expresan con tanta claridad la unión entre rigor y creatividad como la Teoría de Números y el Análisis Real. Aunque distintas en apariencia, ambas comparten una misma esencia: la búsqueda de estructuras ocultas que dan forma al orden del mundo. Dentro de esa búsqueda, las sucesiones de Farey ocupan un lugar singular, pues articulan de manera sorprendente la organización aritmética de los números racionales dentro del continuo real.

Atribuidas a John Farey a comienzos del siglo XIX, estas sucesiones surgieron a partir de la simple idea de ordenar fracciones irreducibles, pero pronto revelaron una profundidad inesperada. La observación empírica de Farey, formalizada poco después por Augustin-Louis Cauchy, mostró que entre fracciones consecutivas emerge una estructura precisa y regular, donde cada racional parece ocupar un lugar natural. Este fenómeno, aparentemente elemental, abrió el camino a conexiones profundas con funciones aritméticas clásicas, como la función totiente de Euler, y con problemas centrales de la teoría analítica de números.

Con el paso del tiempo, matemáticos como Sylvester, Mertens, Landau, Hardy y Littlewood ampliaron el alcance de estas ideas, vinculando las sucesiones de Farey con la distribución de los racionales, la teoría de la aproximación diofántica y, de manera notable, con la Hipótesis de Riemann a través de los teoremas de Franel–Landau. En el siglo XX y comienzos del XXI, su estudio se ha extendido hacia áreas como la geometría hiperbólica, los sistemas dinámicos, la teoría ergódica y aplicaciones

computacionales, confirmando que estas sucesiones constituyen mucho más que un objeto elemental.

Este trabajo nace de la fascinación por aquello que, bajo una apariencia sencilla, encierra una complejidad rica en conexiones. El estudio de las sucesiones de Farey pone de manifiesto que la matemática no es una colección de técnicas aisladas, sino una red coherente donde cada noción ilumina a otra. En esa interacción entre orden numérico, estructura histórica e intuición analítica reside no solo el poder del pensamiento matemático, sino también su capacidad para inspirar y dar sentido a la búsqueda intelectual del ser humano.

PRELIMINARES

Antes de presentar los resultados principales sobre las propiedades de las sucesiones de Farey, es necesario introducir algunos conceptos y notaciones fundamentales que permitirán comprender de manera clara los teoremas, proposiciones y ejemplos que se desarrollarán a continuación.

Números racionales y fracciones irreducibles

Denotamos por $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Una fracción $a/b \in \mathbb{Q}$ se dice *irreducible* si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $\gcd(a, b) = 1$. Es decir, a y b no tienen divisores comunes distintos de 1, donde $\gcd(a, b)$ denota el máximo común divisor de a y b .

Función totiente de Euler

La *función totiente de Euler*, denotada por $\varphi(n)$, se define para todo entero $n \geq 1$ como el número de enteros positivos menores o iguales que n que son coprimos con n . Es decir,

$$\varphi(n) = \left| \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n, \gcd(k, n) = 1\} \right|$$

En otras palabras, $\varphi(n)$ cuenta el número de enteros positivos menores o iguales que n que son coprimos con n .

Ejemplo 1. Para $n = 12$ los enteros coprimos con 12 son 1, 5, 7, 11; por lo tanto,

$$\varphi(12) = 4$$

Proposición 1. Si $a/b = c/d$ y $\gcd(a, b) = \gcd(c, d) = 1$, entonces $a = c$ y $b = d$

Demostración. De la hipótesis $a/b = c/d$ se obtiene

$$ad = cb.$$

Como $\gcd(a, b) = 1$, ningún primo que divide b puede dividir a . Por lo tanto, $b|d$. Por simetría, usando $\gcd(c, d) = 1$, se obtiene $d|b$.

De $b|d$ y $d|b$ se sigue que $b = d$.

Sustituyendo $b = d$ en $ad = cb$, obtenemos $a = c$. Esto concluye la demostración.

Proposición 2. Si a/b y c/d son dos fracciones irreducibles consecutivas, entonces

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Demostración. Como a/b y c/d son consecutivas, podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Calculamos la diferencia:

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{(a+c)b - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{a+c}{b+d} > \frac{a}{b}$$

De manera similar:

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{cb - ad}{d(b+d)} > 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Combinando los resultados anteriores, se obtiene:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Definición 1 (Fracción mediatriz).

Dadas dos fracciones irreducibles consecutivas a/b y c/d , su *fracción mediatriz* se define como:

$$\frac{a+c}{b+d}$$

Observación 1. La fracción mediatriz es una herramienta útil para generar nuevas fracciones entre dos fracciones dadas sin perder la irreducibilidad relativa.

SUCESIONES DE FAREY: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

En esta sección se presentan las propiedades fundamentales de las sucesiones de Farey y se analizan de manera clara las fracciones consecutivas, la relación entre ellas y la construcción de nuevas fracciones mediante la mediatriz, estableciendo así las bases para el estudio sistemático de estas sucesiones.

Definición 2 (Sucesión de Farey).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define la sucesión de Farey de orden n como

$$F_n = \left\{ \frac{a}{b} \in [0, 1] : 0 \leq a \leq b \leq n \text{ y } \gcd(a, b) = 1 \right\}$$

Además, consideramos que F_n está ordenado de manera creciente.

Ejemplo 2. Para $n = 4$, la sucesión de Farey de orden 4 es

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

Observamos

- Todas las fracciones están en forma irreducible, por ejemplo, $2/4$ no aparece porque $\gcd(2,4) = 2 \neq 1$
- Siempre se incluye los extremos $0 = 0/1$ y $1 = 1/1$.

- Está ordenada de menor a mayor.

La siguiente proposición establece una propiedad importante sobre los denominadores de fracciones consecutivas: la suma de sus denominadores siempre es mayor que el orden de la sucesión.

Teorema 1. Si a/b y c/d son dos fracciones consecutivas en F_n , entonces

$$b + d > n.$$

Demostración. Supongamos que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Por la proposición 2, se cumple que:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Si se tuviera que

$$b + d \leq n$$

Entonces la fracción mediatriz

$$\frac{a+c}{b+d}$$

estaría en F_n , lo cual contradice la consecutividad de a/b y c/d . Por lo tanto, necesariamente

$$b + d > n.$$

El siguiente teorema establece que dos fracciones consecutivas en una sucesión de Farey nunca tienen el mismo denominador, lo que asegura que la sucesión crece de manera estricta sin repeticiones.

Teorema 2. Si $n > 1$, entonces no existe dos fracciones consecutivas en F_n que tenga el mismo denominador.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que existe dos fracciones consecutivas con el mismo denominador

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{b} \quad \text{en } F_n$$

Como $a < c$ son enteros, se tiene que $a + 1 \leq c$. Luego,

$$\frac{a+1}{b} \leq \frac{c}{b} \leq 1$$

Además, para $b > 1$ se cumple que

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b-1} \leq \frac{a+1}{b}$$

Por lo tanto, la fracción

$$\frac{a}{b-1}$$

estaría entre a/b y c/b . Como $b-1 \leq n$, esta fracción pertenece a F_n , lo cual contradice la hipótesis de que a/b y c/b son consecutivas.

Por lo tanto, no existen dos fracciones consecutivas en F_n que tengan el mismo denominador.

El siguiente teorema establece una propiedad fundamental de las fracciones consecutivas en las sucesiones de Farey: la diferencia cruzada entre dos fracciones consecutivas es siempre 1.

Teorema 3. Si a/b y c/d dos fracciones consecutivas en F_n , entonces

$$bc - ad = 1.$$

Demostración. Supongamos que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

son fracciones consecutivas en F_n .

Como $a/b \in F_n$, se tiene:

$$0 \leq \frac{a}{b} \leq 1 \quad y \quad \gcd(a, b) = 1. \quad (1)$$

Por el lema de Bézout, existen enteros x_0 e y_0 tales que

$$bx_0 - ay_0 = 1. \quad (2)$$

Todas las soluciones de (2) son de la forma

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Elegimos t de modo que

$$n - b \leq y_0 + tb \leq n. \quad (3)$$

De $bx - ay = 1$ se obtiene

$$bx = 1 + ay$$

Dividiendo entre b :

$$x = \frac{1 + ay}{b} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b}y,$$

de (1) se obtiene

$$\frac{1}{b} \leq x \leq \frac{1}{b} + y.$$

Luego, como x es entero y $0 < 1/b < 1$, se concluye

$$1 \leq x \leq y \leq n$$

Por lo tanto,

$$\frac{x}{y} \in F_n$$

Además,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by} > \frac{a}{b}$$

Si

$$\frac{x}{y} \neq \frac{c}{d}$$

entonces por la consecutividad de a/b y c/d en F_n ,

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{x}{y}$$

Entonces,

$$\frac{x}{y} - \frac{c}{d} = \frac{xd - yc}{yd} \geq \frac{1}{yd}$$

y

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{db} \geq \frac{1}{db}.$$

Sumando estas desigualdades,

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{yb} + \frac{1}{db} = \frac{y+b}{ydb}$$

Por (3), $y+b \geq n$, por lo que:

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} \geq \frac{n}{ydb}$$

Pero como $d \leq n$, se tiene

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{yb}$$

Multiplicando por by :

$$bx - ay > 1$$

lo cual contradice $bx - ay = 1$.

Por lo tanto, necesariamente

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{d}$$

Además, como $\gcd(x, y) = 1$ y $\gcd(c, d) = 1$, por la proposición 1 se deduce que

$$x = c, y = d$$

Sustituyendo estos valores en (2), se obtiene finalmente

$$bc - ad = 1.$$

Esto concluye la demostración.

El siguiente teorema muestra cómo la fracción mediatriz de dos fracciones consecutivas en una sucesión de Farey no solo se mantiene irreducible, sino que también pertenece a la sucesión de orden inmediatamente superior. Esto permite generar nuevas fracciones entre fracciones consecutivas de manera ordenada, extendiendo la sucesión de Farey al siguiente orden.

Teorema 4. Si a/b y c/d son fracciones consecutivas en F_n , entonces la mediatriz de estas fracciones

$$\frac{a+c}{b+d}$$

es irreducible y pertenece a la sucesión F_{n+1} .

Demostración. Por hipótesis, a/b y c/d son consecutivas en F_n , es decir, no existe ninguna fracción $p/q \in F_n$ tal que

$$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$$

Por el teorema 3, se cumple

$$bc - ad = 1. \quad (1)$$

Considerando ahora la fracción mediatriz:

$$\frac{a+c}{b+d}$$

Según la proposición 2, se tiene:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Para demostrar que es irreducible, supongamos que $\gcd(a+c, b+d) = g > 1$. Entonces:

$$g|(a+c) \text{ y } g|(b+d),$$

lo que implica

$$g|(a+c)d - (b+d)c = ad - bc = -1.$$

lo cual es imposible si $g > 1$. Por lo tanto,

$$\gcd(a+c, b+d) = 1$$

y la fracción mediatriz es irreducible.

Por otro lado, del teorema 1, al ser a/b y c/d consecutivas en F_n resulta

$$b+d > n$$

En particular, si $b+d = n+1$, la mediatriz tiene denominador $n+1$ y, al ser irreducible, pertenece a F_{n+1} . Esto concluye la demostración.

Observación. En las condiciones del teorema 4, si

$$b+d > n+1,$$

entonces la fracción mediatriz

$$\frac{a+c}{b+d}$$

no pertenece a F_{n+1} , ya que su denominador excede a $n+1$.

Más aún, la mediatriz aparece por primera vez en la sucesión F_{b+d} , pues es irreducible y su denominador es exactamente $b+d$.

Ejemplo 3. Consideremos la sucesión de Farey de orden 4 es:

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

Tomemos las fracciones consecutivas

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{3}, \quad \frac{c}{d} = \frac{1}{2}$$

Relación fundamental de Farey

Calculamos:

$$ad - bc = (1)(2) - (3)(1) = -1.$$

Luego,

$$|ad - bc| = 1.$$

Esto confirma que $1/3$ y $1/2$ son fracciones consecutivas en F_4 .

Fracción Mediatriz

La mediatriz

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$$

no pertenece a F_4 porque su denominador $5 > 4$.

Como $\gcd(2, 5) = 1$ y se cumple que

$$\frac{2}{5} \in F_5.$$

CONCLUSIONES

Este trabajo ha permitido un análisis profundo de las sucesiones de Farey, destacando sus propiedades fundamentales, como la consecutividad de fracciones irreducibles y la propiedad de la mediatriz. Se ha demostrado que la fracción mediatriz de dos fracciones consecutivas no solo es irreducible, sino que también aparece en la sucesión de orden siguiente, lo que facilita la construcción de nuevas fracciones dentro de estas sucesiones.

Asimismo, se ha resaltado la importancia de la relación fundamental entre fracciones consecutivas, que proporciona una base sólida para estudiar la estructura y la distribución de los números racionales en el intervalo $[0, 1]$.

Estos resultados contribuyen a una comprensión sistemática de las sucesiones de Farey y ponen de manifiesto su relevancia en la teoría de números y en la matemática discreta.

REFERENCIA

Apostol, T. M. (1976). *Introduction to analytic number theory*. Springer.

Farey, J. (1815). On a curious property of vulgar fractions. *The Philosophical Magazine*, 47, 385–386.

Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). *An introduction to the theory of numbers* (6th ed.). Oxford University Press.

Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (1965). *An introduction to the theory of numbers* (5th ed.). Wiley.