CAPÍTULO 1

APLICACIONES DEL LEMA DE ZORN EN LA EXISTENCIA DE IDEALES MAXIMALES Y PRIMOS EN ANILLOS

https://doi.org/10.22533/at.ed.819112630011

Rodolfo José Gálvez Pérez
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
https://orcid.org/0000-0002-6349-7793

Carlos Alberto Peña Miranda
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
https://orcid.org/0000-0002-4339-4615

Alex Armando Cruz Huallpara
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
https://orcid.org/0000-0002-5453-6885

RESUMEN: En este trabajo se abordan resultados fundamentales sobre los ideales en anillos utilizando el lema de Zorn. En particular, se demuestra la existencia de ideales maximales en anillos no triviales, se establece que todo ideal propio está contenido en un ideal maximal bajo distintas hipótesis (como la finitud de la generación del anillo o la existencia de un elemento identidad), y se prueba la existencia de ideales primos asociados a subconjuntos multiplicativos. Las demostraciones se apoyan en técnicas de orden parcial y cadenas, ofreciendo una exposición clara y rigurosa de estos resultados esenciales en la teoría de anillos.

PALABRAS CLAVE: Lema de Zorn, Ideal maximal, Ideal primo, Anillo, Teoría de ideales

APPLICATIONS OF ZORN'S LEMA IN THE EXISTENCE OF MAXIMAL IDEALES AND PRIMOS IN ANILLOS

ABSTRACT: This work addresses fundamental results on ideals in rings using Zorn's Lemma. In particular, it proves the existence of maximal ideals in nontrivial rings, establishes that every proper ideal is contained in a maximal ideal under various assumptions (such as the finiteness of the ring's generation or the existence of a multiplicative identity), and demonstrates the existence of prime ideals associated with multiplicative subsets. The proofs rely on techniques involving partial orders and chains, providing a clear and rigorous exposition of these essential results in ring theory.

KEYWORDS: Zorn's Lemma, Maximal Ideal, Prime Ideal, Ring, Ideal Theory

INTRODUCCIÓN

El lema de Zorn es una herramienta fundamental en matemáticas que permite garantizar la existencia de ciertos objetos algebraicos sin necesidad de construirlos explícitamente. En la teoría de anillos, este lema se utiliza para demostrar que todo anillo no trivial posee al menos un ideal maximal, un resultado crucial para analizar la estructura interna de los anillos y la relación entre ideales maximales, ideales primos y subconjuntos multiplicativos.

Este trabajo comienza presentando algunas definiciones clave sobre relaciones de orden y enunciando el lema de Zorn, destacando su conexión con el principio de maximalidad de Hausdorff. A continuación, se exploran aplicaciones del lema en diversos contextos algebraicos, incluyendo la existencia de ideales maximales en anillos con identidad, en anillos finitamente generados, y en la construcción de ideales primos asociados a subconjuntos multiplicativos.

El objetivo de este trabajo es proporcionar una exposición clara y rigurosa que permita al lector comprender cómo el lema de Zorn garantiza la existencia de ideales maximales y primos. Sin asumir conocimientos previos avanzados, se busca mostrar la utilidad de las técnicas de orden parcial y las cadenas en la teoría de anillos, facilitando una comprensión profunda de estos conceptos fundamentales.

PRELIMINARES

En esta sección presentamos definiciones fundamentales sobre relaciones de orden, el principio de maximalidad de Hausdorff y el lema de Zorn, así como algunos conceptos básicos de teoría de anillos necesarios para las aplicaciones que se estudiarán en la sección siguiente.

Relaciones de Orden

Definición 1. Una relación binaria R sobre un conjunto A se llama *preorden* si es reflexiva y transitiva; es decir, si se cumple:

1. Para todo $a \in A$, aRa (reflexividad).
2. Si aRb y bRc, entonces aRc (transitividad).

Observación 1. Un conjunto que posee una relación preorder definida se denomina *conjunto preordenado.* El preorden R se denotará por $\preceq$ y un conjunto preordenado A se denotará por $(A, \preceq)$.

Definición 2. Si en un conjunto preordenado $(A, \preceq)$ se verifica la propiedad de antisimetría, es decir, $(a \preceq b) \wedge (b \preceq a) \Longrightarrow a = b$. En este caso, el conjunto $(A, \preceq)$ recibe el nombre de conjunto parcialmente ordenado y la relación $\preceq$ se conoce como un orden parcial.

Definición 3. Sea $(A, \preceq)$ conjunto parcialmente ordenado.

1. Un subconjunto no vacío $B \subsetneq A$ es ***superiormente acotado*** si existe $x \in A$ tal que

$$y \preceq x \text{ para todo } y \in B.$$

y todo elemento x con esta propiedad es una cota superior de B.

2. Un elemento $m \in A$ es llamado elemento *maximal* de A si

$$(\forall x \in A)(m \preceq x \Longrightarrow m = x).$$

Debe observarse que un conjunto parcialmente ordenado puede poseer muchos elementos maximales.

3. Un subconjunto $B \subsetneq A$ se llama cadena si para cualesquiera $x, y \in B$, se verifica que

$$x \preceq y \text{ o } y \preceq x.$$

Es decir, todos los elementos de B son comparables entre sí. También se dice que B es un subconjunto totalmente ordenado de A. En particular, los elementos de la cadena pueden ser una familia de conjuntos.

El siguiente axioma garantiza la existencia de una cadena maximal.

Principio de maximalidad de Hausdorff

Sea $(F, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado, entonces, dada una cadena C de F , existe una cadena maximal M tal que $C \preceq M$.

Lema de Zorn

Sea (, F, $\preceq$) un conjunto parcialmente ordenado no vacío. Si toda cadena C de F está acotada superiormente, entonces F posee un elemento maximal.

Proposición 1. Sea X un conjunto no vacío y sea $F \subsetneq P(X)$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Entonces, existe una relación de orden parcial definida sobre F.

Demostración. Como $F \neq \emptyset$, se tiene $F \times F \neq \emptyset$.

Definimos una relación, denotada por $\preceq$, sobre la familia F de la siguiente manera:

$$(\forall (A, B) \in F \times F)(A \preceq B \Leftrightarrow A \subsetneq B) \ldots\ldots\ldots(1)$$

La relación definida en (1) satisface las siguientes propiedades:

i) Reflexividad: Como $A \subsetneq A$ para todo $A \in F$, se tiene que $A \preceq A$ todo $A \in F$. Por lo tanto, $\preceq$ es reflexiva sobre la familia *F*.

ii) Antisimétrica: Para cualesquiera $(A, B) \in F \times F$, si $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A \subsetneq B$ y $B \subsetneq A$. Por consiguiente, A = B, lo que muestra que es antisimétrica sobre la familia F.

iii) Transitividad: Si (A, B); (B, C) $\in F \times F$ tales que $A \preceq B$ y $B \preceq C$, entonces $A \subsetneq B$ y $B \subsetneq C$, lo que implica $A \subsetneq C$. Así, $A \preceq C$, demostrando que es transitiva sobre la familia F.

En consecuencia, por la reflexividad, antisimetría y transitividad, la relación definida en (1) sobre F es una relación de orden parcial. Por lo tanto, el par $(F, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Corolario 1. Sea X un conjunto no vacío. Entonces ((X), es un conjunto parcialmente ordenado, donde $\subsetneq$ es la relación definida sobre P(X) como en (1).

Demostración. Inmediata.

Corolario 2. Todo conjunto X puede estar dotado de una relación de orden parcial.

Demostración. Ver Muñoz (2002).

CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE ANILLOS

Definición 4. Un *anillo* es un conjunto no vacío R equipado con dos operaciones binarias, adición + y multiplicación , que cumplen las siguientes propiedades:

1. (R, +) es un grupo abeliano con identidad $0 = 0_R$.
2. La multiplicación es asociativa:

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) \text{ para todo } a, b, c \in R$$

3. La multiplicación es distributiva respecto de la adición:

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c \text{ y } (a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c \quad \forall\ a, b, c \in R$$

Además

4. Si

$$a \bullet b = b \bullet a \quad \forall\ a, b \in R,$$

el anillo R se llama *conmutativo*.

5. Si existe un elemento $1_R \in R$ tal que

$$1_R \bullet a = a \bullet 1_R = a \text{ para todo } a \in R,$$

el anillo se llama *anillo con identidad* y el elemento 1_R se denota simplemente por 1.

Definición 5. Sea R un anillo y $\emptyset \neq S \subsetneq R$. Se dice que S es un *subanillo* de R si se cumple las siguientes condiciones:

Si $a, b \in S$, entonces $a - b \in S$

Si $a, b \in S$, entonces $ab \in S$

Definición 6. Sea R un anillo y $I \subsetneq R$ un subanillo. Se dice que I es un *ideal* de R si para todo $r \in R$, $a \in I$ se cumple que:

$$r \bullet a \in I \text{ y } a \bullet r \in I.$$

Definición 7. Sea R un anillo y $I \subseteq R$.

1. Si I es un subconjunto no vacío del anillo R, decimos que I es un ideal de R si se cumplen las siguientes condiciones

i) Para todo $a, b \in I$, se tiene $a - b \in I$

ii) Para todo $r \in R$, $a \in I$, se tiene $r\ a$, $a\ r \in I$

2. Se dice que un ideal I de R es *propio* si $I \subset R$ y $I \neq R$.
3. Si $S \subseteq R$ subconjunto no vacío, el ideal generado por S se denota por

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i s_i : a_i \in R,\ s_i \in S, n \in N \right\}.$$

Si $S = \{s_1,,s_k\}$ conjunto finito, entonces

$$I = \langle S \rangle = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle$$

se llama ideal finitamente generado.

Si $S = \{s\}$ contiene un solo elemento, entonces

$$I = \langle s \rangle$$

se llama *ideal principal*.

4. Un anillo R se dice finitamente generado si existen elementos $,x_1,x_2\ldots, x_N \in R$, $n \in$ tal que

$$R = \langle x_1, x_2 \ldots, x_n \rangle.$$

Definición 8. Sea R un anillo

1. Un ideal $M \subseteq R$ es llamado *ideal maximal* si:

a) $M \neq R$

b) Para cualquier ideal $J \subseteq R$ tal que si $M \subseteq J \subseteq R$, se cumple $M = J$ o $J = R$.

2. Un ideal $P \subseteq R$ recibe el nombre de *ideal primo* cuando:

1.$P \neq R$

2. Dados cualesquiera ideales $I, J \subseteq R$, si se cumple $IJ \subset P$, entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.

Definición 9. Sea R un anillo y $\emptyset \neq S \subseteq R$. Diremos que S es un *conjunto multiplicativo* si cumple:

1. $0 \notin S$

2. Para todo a, b ∈ S, se cumple a b ∈ S

RESULTADOS PRINCIPALES

A continuación, se presentan algunos resultados clave sobre la existencia de ideales maximales en anillos, los cuales son fundamentales en la teoría de anillos y se demuestran utilizando el Lema de Zorn.

Teorema 1. Sea R un anillo tal que $R \neq (0)$. Entonces R posee al menos un ideal maximal.

Demostración. Consideremos el conjunto de todos los ideales propios del anillo R, es decir,

$$F = \{I \subset R : I \text{ es ideal de } R \text{ y } I \neq R\}.$$

Como $(0) \neq F$, se tiene que $F \neq \emptyset$.

Definimos sobre la familia una relación del siguiente modo:

$$(\forall (J', J'') \in F \times F\ )\ (J' \leq J'' \Leftrightarrow J' \subseteq J'') \ldots\ldots\ldots(2)$$

Por la proposición 1, $(F, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea una cadena arbitraria de la familia F, es decir, C es una subfamilia de F totalmente ordenada respecto a la relación definida en (2). Consideremos

$$I := ¿ J \in C\, J$$

Debemos verificar las siguientes afirmaciones:

1. La cadena está acotada superiormente.

2. I es un elemento de F. Para esto, debemos demostrar que:

a) I es un ideal del anillo R

b) $I \neq R$.

Obsérvese que, dado cualquier $J \in C$ se tiene

$$J \subseteq ¿ J \in C\, J = I$$

entonces $J \leq I$ para todo $J \in C$. Luego, I es una cota superior de la cadena C . Por lo tanto, C está acotada superiormente, lo que verifica el ítem 1.

Tenemos también que para todo $J \in C$, $J \in F$, entonces $J \subsetneq R$. Luego,

$$¿ J \in C J \subsetneq R$$

es decir, $I \subsetneq R$.

Además, para cualquier elemento $x \in I$ y $r \in R$ tendremos que existe $J \in C$ tal que $x \in J$ y $J \subsetneq R$ es ideal; entonces

$$xr, rx \in J \subseteq ¿ J \in C J = I$$

Luego, $xr, rx \in I$.

También, si $x, y \in I$ entonces existen $J_x, J_y \in C$ tales que $x \in J_x$, $y \in J_y$. Como $J_x, J_y \in C$ y es una cadena, se tiene que $J_x \leq J_y$ o $J_y \leq J_x$. Además, como $J_x, J_y \in F$, se sigue que J_x y J_y son ideales propios de R. Luego, $x - y \in J_x \subseteq I$ o bien $x - y \in J_y \subseteq I$. Por lo tanto, I es un ideal del anillo R, según la definición 7.

Supongamos que $I = R$. Entonces, para todo $a \neq 0$ en R, se tiene que

$$a \in I = ¿ J \in C J$$

Por lo tanto, existe $J \in C$ tal que $a \in J$. Luego, $R \subset J$ y como J es un ideal propio de R entonces $J = R$ contradicción pues $J \in F$. Por lo tanto, $I \neq R$. Así queda verificada la parte b) del ítem 2.

Luego, por el Lema de Zorn, existe al menos un elemento maximal de la familia F, es decir, existe un ideal maximal del anillo R.

Teorema 2. Si el anillo R finitamente generado, entonces cada ideal propio de R está contenido en un ideal maximal.

Demostración.

Sea I un ideal propio finitamente generado de un anillo R, es decir,

$$R = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle, \quad n \in N.$$

Consideremos la familia de ideales propios del anillo R que contienen al ideal I, es decir,

$$F = \{J : I \subseteq J,\ J \subset R,\ J \neq R\}.$$

Notemos que, $I \subset R$, $I \neq R$ y $I \subseteq I$, por lo que $I \in F$. Por lo tanto, la familia F es no vacía.

Ahora definimos una relación $\preccurlyeq$ sobre la familia $\mathcal{F}$ como sigue:

$$(\forall (J', J'') \in F \times F)\ (J' \preccurlyeq J'' \Leftrightarrow J' \subseteq J'') \ldots\ldots\ldots(3)$$

Por la proposición 1, $(F, \preccurlyeq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea C una cadena cualquiera de F, es decir, C es una subfamilia totalmente ordenada mediante la relación definida en (3).

Consideremos la unión de los elementos de la cadena C:

$$\mathbf{M} := ¿\, J \in C\, J$$

Se debe verificar lo siguiente:

1. M es una cota superior de la cadena C respecto a la relación dada en (3).
2. M es un elemento de F. Para esto debemos demostrar que:

    (a) M es un ideal propio del anillo R,

    (b) M contiene al ideal I.

Como para todo J de la cadena C se tiene $J \subseteq M$, entonces $J \preceq M$. Esto nos dice que M es una cota superior para la cadena C, con lo que queda verificado el ítem 1.

Debido a que C es una cadena cuyos elementos son ideales del anillo R, se tiene que

$$\mathbf{M} := ¿\, J \in C\, J$$

es un ideal del anillo R.

Además, para todo J $\in$ C se tiene que J $\in$ F, entonces I $\subseteq$ J $\subseteq$ M con lo cual queda verificada la parte (b) del ítem 2.

Demostremos ahora que M es un ideal propio del anillo R.

Asumamos que M = R. Entonces

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle = R = M = ¿ J \in C J$$

Como $a_1, a_2 \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ = M, existen elementos J_{a_1}, J_{a_2} de la cadena C tales que $a_1, \in J_{a_1}$ $a_2 \in J_{a_2}$ pero $J_{a_1} \preceq J_{a_2}$ o $J_{a_2} \preceq J_{a_1}$ entonces $a_1, a_2 \in J_{a_1}$ o $a_1, a_2 \in J_{a_2}$. Por lo cual existe J′ $\in$ C tal que $a_1, a_2 \in$ J′.

Siguiendo este razonamiento un número finito de veces, existe un elemento J $\in$ C tal que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son elementos de J. Entonces $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \subseteq$ J.

Por lo tanto, resulta R = J, lo cual es una contradicción, ya que J $\in$ C $\subseteq$ F, J $\subset$ R, J $\neq$ R para todo J $\in$ C Por lo tanto, M $\neq$ R. Así queda verificada la parte (a) del ítem 2. Luego M $\in$ F.

Aplicando el lema de Zorn a (F, $\preccurlyeq$), se obtiene la existencia de un ideal maximal $\widehat{M} \in F$ que contiene al ideal I.

Verifiquemos que $\widehat{M}$ es un ideal maximal.

Supongamos que existe un ideal J de R tal que $\widehat{M}$ $\subseteq$ J $\subseteq$ R. Dado que $\widehat{M}$ es un elemento maximal de la familia F y J $\in$ F, se sigue que J = R. Por consiguiente, $\widehat{M}$ es un ideal maximal del anillo R.

Teorema 3. En un anillo con elemento identidad, todo ideal propio está contenido en un ideal maximal.

Demostración.

Sea (R,1_R) un anillo con identidad. Entonces $1_R \in$ R y $1_R \neq 0$, luego R $\neq$ {0}

Sea I un ideal propio del anillo R. Consideremos la familia de ideales propios del anillo R que contienen al ideal I, es decir,

$$F = \{J : I \subseteq J, J \subseteq R, J \neq R\}.$$

Dado que I $\subseteq$ I, I $\subset$ R y I $\neq$ R, se concluye que I $\in$ F . Por lo tanto, F $\neq \varnothing$.

Definimos una relación ⪯ sobre la familia F del modo siguiente:

$$(\forall (J', J'') \in F \times F)\ (J' \preceq J'' \Leftrightarrow J' \subseteq J'') \ldots\ldots..(4)$$

Por la proposición 1, (F, ⪯) es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea C una subfamilia arbitraria de la familia F totalmente ordenada respecto a la relación definida en (4); es decir, C es una cadena de la familia F.

Consideremos la unión de los elementos de la cadena C y sea

$$\mathrm{T} := \text{¿} J \in C\, J$$

Debemos verificar lo siguiente:

1. T es una cota superior de la cadena C respecto a la relación definida en (4).
2. T es un elemento de la familia F, para lo cual verificaremos que:

   (a) T es un ideal propio del anillo R (R ≠ T).

   (b) I ⊆ T.

Debido a que para todo J ∈ C se tiene

$$J \subseteq \text{¿} J \in C\, J = \mathrm{T}$$

entonces J ⪯ T. Por lo tanto, T es una cota superior para la cadena C; es decir, la cadena C está acotada superiormente respecto a la relación dada en (4). De esta manera queda garantizado el ítem 1.

Además, para todo J ∈ C se tiene que J ∈ F; entonces J ⊂ R, J ≠ R y I ⊆ J ⊆ T. Así queda satisfecha la parte (b) del ítem 2.

Debido a que C es una cadena, se tiene que T es un ideal del anillo R; es decir, T ⊆ R.

Si T = R, entonces 1_R ∈ T; luego existe J ∈ *C* tal que J con J R, J R, ya que J ∈ F. Entonces J = R, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, T ⊂ R y T ≠ R; así se satisface la parte (a) del ítem 2. En consecuencia, T ∈ F.

Aplicando el lema de Zorn, existe un ideal maximal T* ∈ F. Entonces T* es un ideal propio del anillo R con I ⊆ T*.

Finalmente, verifiquemos que T* es un ideal maximal. Supongamos que existe un ideal propio S de R tal que T* ⊆ S ⊂ R y debido a que T* es un el elemento maximal de la familia F y como S ∈ *F* entonces S = T*.

Esto prueba que T^* es un ideal maximal del anillo R, con lo cual queda demostrada el teorema.

Teorema 4. Sea I un ideal del anillo R. Si el subconjunto $S \subseteq R$ es multiplicativo y $I \cap S = \varnothing$, entonces existe un ideal maximal P tal que:

i) $I \subsetneq P$,

ii) $P \cap S = \varnothing$,

iii) P es un ideal primo.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos la familia de ideales del anillo R que contienen al ideal I y son disjuntos con el conjunto S, es decir,

$$F = \{J \subseteq R : I \subseteq J, J \cap S = \varnothing\}.$$

Dado que $I \subseteq R$, $I \subseteq I$ y $I \cap S = \varnothing$, concluye que $I \in F$. Por lo tanto, $F \neq \varnothing$.

Definimos sobre la familia una relación $\preccurlyeq$ mediante la siguiente forma:

$$(\forall (J', J'') \in F \times F)\ (J' \preccurlyeq J'' \Leftrightarrow J' \subseteq J'') \ldots\ldots. (5)$$

Por la proposición 1, $(F, \preccurlyeq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea C cualquier cadena de la familia F, es decir, C es una subfamilia totalmente ordenada de F respecto a la relación definida en (5).

Consideremos la unión de los elementos de la cadena , definiendo

debemos verificar que:

1. P es una cota superior de la cadena respecto a la relación dada en (5).
2. $P \in F$, es decir, debemos verificar:

a) $I \subseteq P$

b) $P \cap S = \varnothing$

Tenemos que para todo $J \in C$:

$$J \subseteq \text{¿} J \in C\, J = P$$

luego, $J \preccurlyeq P$ para todo $J \in C$. Esto muestra que la cadena C está acotada superiormente. Así se verifica el ítem 1.

Como para todo $J \in C$ se tiene que $J \in F$, entonces

$$I \subseteq J \subseteq \text{¿} J \in C\, J = P$$

lo cual verifica la parte (a) del ítem 2.

Además, se observa que

$$P \llcorner S = \left(\text{¿} J \in C\, J\right) \llcorner S = \text{¿} J \in C\, (J \llcorner S) = \text{¿} J \in C\, \varnothing = \varnothing$$

lo que demuestra que $P \cap S = \varnothing$, verificando la parte (b) del ítem 2. Por consiguiente, $P \in F$.

Aplicando el Lema de Zorn, existe un elemento maximal de la familia F. Digamos que P* es dicho maximal; este es el ideal que deseamos, ya que $I \subseteq P^*$ y $P^* \cap S = \emptyset$.

Ahora, demostraremos que P* es un ideal primo. Sea $a, b \in R$ tal que $ab \in P^*$, pero con $a \notin P^*$ y $b \notin P^*$. Consideremos el ideal generado por P* y a*, es decir, ⟨P*, a⟩. . Por definición del ideal generado, tenemos que

$$P^* \subseteq \langle P^*, a \rangle,$$

luego, $P^* \preceq \langle P^*, a \rangle$.

Además, existe $r \in S$ tal que $r \in \langle P^*, a \rangle$, En efecto, si para todo $s \in S$ se tuviera $s \notin \langle P^*, a \rangle$, entonces $\langle P^*, a \rangle \in F$. Como $P^* \preceq \langle P^*, a \rangle$, se tendría $P^* = \langle P^*, a \rangle$ P*, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $r \in S$ con $r \in \langle P^*, a \rangle$.

De manera análoga, existe $s \in S$ tal que $s \in \langle P^*, b \rangle$. Luego, tenemos

$$rs \in \langle P^*, a \rangle \langle P^*, b \rangle \subseteq \langle P^*, ab \rangle \subseteq P^*.$$

Pero $rs \in S$, lo cual contradice la hipótesis de que $P^* \cap S = \varnothing$. Por lo tanto, P* es un ideal primo.

CONCLUSIONES

Los resultados presentados en este trabajo demuestran que, a través del lema de Zorn, todo anillo no trivial posee al menos un ideal maximal, y que cualquier ideal propio de un anillo, con o sin identidad, está contenido en uno de estos ideales maximales. Además, se garantiza la existencia de ideales primos que contienen un ideal dado y son disjuntos de un conjunto multiplicativo adecuado.

Estas propiedades son fundamentales en álgebra y teoría de anillos, ya que proporcionan las bases necesarias para la construcción de estructuras algebraicas cruciales. Además, permiten estudiar fenómenos clave como factorizaciones, localizaciones y otras características esenciales de los anillos, demostrando cómo las herramientas de la teoría de conjuntos, como el lema de Zorn, influyen directamente en la comprensión y el desarrollo de la estructura algebraica.

REFERENCIA

Bandini, A., Gianni, P., & Sbarra, E. (2024). *Commutative algebra through exercises*. Springer.

Burton, D. M. (1970). *A first course in rings and ideals*. Addison–Wesley.

Dugundji, J. (1972). *Topology*. Allyn and Bacon.

Goodearl, K. R., & Warfield, R. B., Jr. (2004). *An introduction to noncommutative Noetherian rings*. Cambridge University Press.

Hungerford, T. W. (1980). *Algebra*. Springer.

Lanski, C. (2005). *Concepts in abstract algebra*. Thomson Brooks/Cole.

Muñoz Q., J. M. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.