



**Henrique Ajuz Holzmann  
João Dallamuta  
(Organizadores)**

# Impactos das Tecnologias na Engenharia Mecânica 2

**Atena**  
Editora  
Ano 2019

**Henrique Ajuz Holzmann**  
**João Dallamuta**  
(Organizadores)

**Impactos das Tecnologias na**  
**Engenharia Mecânica**  
**2**

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora

Copyright © da Atena Editora

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Diagramação e Edição de Arte: Lorena Prestes e Geraldo Alves

Revisão: Os autores

### Conselho Editorial

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Profª Drª Deusilene Souza Vieira Dall’Acqua – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Profª Drª Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I34 Impactos das tecnologias na engenharia mecânica 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Henrique Ajuz Holzmann, João Dallamuta. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Impactos das Tecnologias na Engenharia Mecânica; v. 2)

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

ISBN 978-85-7247-247-0

DOI 10.22533/at.ed.470190504

1. Automação industrial. 2. Engenharia mecânica – Pesquisa – Brasil. 3. Produtividade industrial. 4. Tecnologia. I. Holzmann, Henrique Ajuz. II. Dallamuta, João. III. Série.

CDD 670.427

**Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422**

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores.

2019

Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

## APRESENTAÇÃO

A Engenharia Mecânica pode ser definida como o ramo da engenharia que aplica os princípios de física e ciência dos materiais para a concepção, análise, fabricação e manutenção de sistemas mecânicos

Nos dias atuais a busca pela redução de custos, aliado a qualidade final dos produtos é um marco na sobrevivência das empresas. Nesta obra é conciliada duas atividades essenciais a um engenheiro mecânico: Projetos e Simulação.

É possível observar que na última década, a área de projetos e simulação vem ganhando amplo destaque, pois através de simulações pode-se otimizar os projetos realizados, reduzindo o tempo de execução, a utilização de materiais e os custos finais.

Dessa forma, são apresentados trabalhos teóricos e resultados práticos de diferentes formas de aplicação e abordagens nos projetos dentro da grande área das engenharias.

Trabalhos envolvendo simulações numéricas, tiveram um grande avanço devido a inserção de novos softwares dedicados a áreas específicas, auxiliando o projetista em suas funções. Sabe-los utilizar de uma maneira eficaz e eficiente é um dos desafios dos novos engenheiros.

Neste livro são apresentados vários trabalhos, alguns com resultados práticos, sobre simulações em vários campos da engenharia industrial, elementos de maquinas e projetos de bancadas práticas.

Um compendio de temas e abordagens que constituem a base de conhecimento de profissionais que se dedicam a projetar e fabricar sistemas mecânicos e industriais.

Boa leitura

Henrique Ajuz Holzmann  
João Dallamuta

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL COM SOLUÇÃO SUAVE UTILIZANDO MALHA ADAPTATIVA	
<i>Gabriel Marcos Magalhães</i> <i>Hélio Ribeiro Neto</i> <i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905041</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>14</b>
USO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO	
<i>Gabriel Marcos Magalhães</i> <i>Alessandro Alves Santana</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905042</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>29</b>
MÉTODOS NUMÉRICOS: DIFERENÇAS FINITAS E GUIA DE ONDAS DIGITAIS 1D E 2D - COMPARATIVO DE FREQUÊNCIAS	
<i>Brenno Lobo Netto Peixoto</i> <i>Marlipe Garcia Fagundes Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905043</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>43</b>
INFLUÊNCIA DA DISCRETIZAÇÕES ESPACIAL E TEMPORAL EM PROBLEMA PURAMENTE ADVECTIVO	
<i>Thiago Fernando Santiago de Freitas</i> <i>Andreia Aoyagui Nascimento</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905044</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>53</b>
FRONTEIRA IMERSA PARA CORPOS ESBELTOS	
<i>João Rodrigo Andrade</i> <i>Aristeu Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905045</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>61</b>
MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODELLING OF GAS-SOLID TURBULENT FLOWS IN COMPLEX GEOMETRIES	
<i>Stella Rodrigues Ferreira Lima Ribeiro</i> <i>Letícia Raquel de Oliveira</i> <i>João Marcelo Vedovoto</i> <i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905046</b>	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>69</b>
ESTUDO NUMÉRICO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA TRANSIENTE EM PLACAS	
<i>William Denner Pires Fonseca</i>	

*Táisa Santos Machado  
Eduardo Mendonça Pinheiro  
José Felipe Lopes de Carvalho  
Sidney da Conceição Alves  
Thiago Santana de Oliveira*

**DOI 10.22533/at.ed.4701905047**

**CAPÍTULO 8 ..... 83**

IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL E PROJETO DE UM PID PARA UM  
SERVOMECANISMO

*Wesley Pereira Marcos  
Rodrigo Hiroshi Murofushi  
Bruno Luiz Pereira*

**DOI 10.22533/at.ed.4701905048**

**CAPÍTULO 9 ..... 98**

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS CONTENDO  
SHUNT RESISTIVO PARA O CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES

*Lorrane Pereira Ribeiro  
Antônio Marcos Gonçalves de Lima  
Victor Augusto da Costa Silva*

**DOI 10.22533/at.ed.4701905049**

**CAPÍTULO 10 ..... 114**

PROJETO E ANÁLISE DE VIBRAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS DE UM CHASSI  
TIPO SPACE FRAME MINI-BAJA

*Marcos Claudio Gondim  
Ellberlandyo Lima Grangeiro  
Antonio Eurick Soares Campelo  
Lucas Rodrigues Oliveira  
Bruno de Oliveira Carvalho*

**DOI 10.22533/at.ed.47019050410**

**CAPÍTULO 11 ..... 126**

SIMULAÇÕES DOS ESFORÇOS VIBRACIONAIS DO CABO CAA 795 MCM (TERN)  
ATRAVÉS DE MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS DE VIBRAÇÃO

*Jhonattan Dias  
Rodrigo Canestraro Quadros  
Marcos Jose Mannala  
Marcio Tonetti*

**DOI 10.22533/at.ed.47019050411**

**CAPÍTULO 12 ..... 133**

PROJETO E CONSTRUÇÃO DE UM SISTEMA DE FREIO APLICADO A UM VEÍCULO  
OFF-ROAD DO TIPO BAJA-SAE

*Felipe Alencar Motta  
Lucas Rocha Dias da Silva*

**DOI 10.22533/at.ed.47019050412**

<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>146</b>
OTIMIZAÇÃO DA ESCOLHA DA RELAÇÃO DE TRANSMISSÃO DE VEÍCULOS AUTOMOTORES ATRAVÉS DE MODELAGEM MATEMÁTICA: O PROJETO BAJA SAE	
<i>Pedro Melo Biz</i>	
<i>Leonardo Gomes</i>	
<i>Antônio Brasil</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050413</b>	
<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>157</b>
ANÁLISE CINEMÁTICA DE SUSPENSÃO TRAILING ARM COM CAMBER LINKS PARA VEÍCULO OFF-ROAD	
<i>Francisco José Rodrigues de Sousa Júnior</i>	
<i>João Lucas Jacob Araújo</i>	
<i>Gustavo Luis dos Santos Silva</i>	
<i>Antônio Ítalo Rodrigues Pedrosa</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050414</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>169</b>
APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM EM SUSPENSÃO VEICULAR	
<i>Alaí de Souza Machado</i>	
<i>Pedro Henrique Rodrigues Taveira</i>	
<i>Filipe Gomes Soares</i>	
<i>Domingos dos Santos Ponciano</i>	
<i>Marcus Victor de Brito Rodrigues</i>	
<i>João Lucas Jacob Araújo</i>	
<i>Gean Carlos Moura Mota</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050415</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>178</b>
ANÁLISE AERODINÂMICA: SIMULAÇÃO FLUIDO DINÂMICA DO PROTÓTIPO EC-05 DE EFICIÊNCIA ENERGÉTICA DA EQUIPE COYOTE	
<i>Paulo Henrique Pereira Araujo</i>	
<i>Josué Alves Rodrigues Junior</i>	
<i>Thaiane Mayara Marques Licar</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050416</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>190</b>
APLICAÇÃO DE SISTEMAS NEURO-FUZZY NA PREDIÇÃO DO COEFICIENTE DE SUSTENTAÇÃO DO AEROFÓLIO NACA 1412	
<i>Vitor Taha Sant'Ana</i>	
<i>Bruno Luiz Pereira</i>	
<i>Tobias Moraes</i>	
<i>Roberto Mendes Finzi Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050417</b>	

<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>195</b>
AVALIAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE ATIVO DE RUÍDO EM VENEZIANAS ACÚSTICAS COM CONFIGURAÇÕES DISTINTAS VIA ELEMENTOS FINITOS	
<i>Geisa Arruda Zuffi</i>	
<i>Fabiana Alves Pereira</i>	
<i>Marcus Antonio Viana Duarte</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050418</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>203</b>
ABSORVEDORES ACÚSTICOS DE RUÍDO: MODELAGEM NUMÉRICA	
<i>Fabiana Alves Pereira</i>	
<i>Geisa Arruda Zuffi</i>	
<i>Israel Jorge Cárdenas Nuñez</i>	
<i>Marcus Antonio Viana Duarte</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050419</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>211</b>
INVESTIGAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA ESCOLHA DAS DIMENSÕES DO RECEPTOR NO MÉTODO DO TRAÇADO DE RAIOS ACÚSTICOS	
<i>Henrique Gebran Silva</i>	
<i>Marlipe Garcia Fagundes Neto</i>	
<i>Pollyana Alves Resende</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050420</b>	
<b>SOBRE OS ORGANIZADORES</b> .....	<b>228</b>

## USO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO

### Gabriel Marcos Magalhães

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade  
de Engenharia Mecânica  
Uberlândia – MG

### Alessandro Alves Santana

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade  
de Matemática  
Uberlândia – MG

**RESUMO:** Muitos problemas da área de engenharia envolvem a análise da taxa de variação, de uma ou mais propriedades físicas em relação ao tempo e/ou espaço. Assim sendo, a modelagem matemática de diversos fenômenos físicos é realizada por meio de equações diferenciais. O chamado Método dos Volumes Finitos (MVF) é uma das técnicas numéricas que existem para resolver equações diferenciais, e possui uma característica em sua metodologia de grande valor: a conversação da média da propriedade física em cada volume de controle. A resolução por este método exige o cálculo dos fluxos nas faces dos volumes de controle e para realizar esses cálculos se faz necessária uma técnica de reconstrução para que os mesmos possam ser avaliados. Uma dessas técnicas consiste na reconstrução da solução baseada em mínimos quadrados em cada volume de controle. Essa técnica foi apresentada por Gooch, e foi desenvolvida

para aplicação em malhas não-estruturadas, o que permite uma melhor adequação para resolução numérica de Equações Diferenciais Parciais (EDP) definidas em domínios espaciais com geometrias complexas. O Método de Reconstrução de Alta Ordem via Mínimos Quadrados (MRAOMQ) proposto por Gooch tem como base a aproximação de uma função, em cada volume de controle, por um polinômio cujos coeficientes são baseados na série de Taylor da função e correspondem a valores de derivadas parciais. O presente trabalho se propõe a apresentar a resolução da equação da difusão utilizando o MRAOMQ junto ao MVF, em domínios bidimensionais, utilizando a reconstrução com precisão de segunda ordem.

**PALAVRAS-CHAVE:** Método de reconstrução de alta ordem, método dos volumes finitos, equação da difusão, malha não-estruturada.

**ABSTRACT:** Many engineering problems involving the analysis of the variation rate of one or more physical properties over time and/or space. Thus, the mathematical modeling of several physical phenomena is performed through differential equations. The Finite-Volume Method (FVM) is one of the numerical techniques that exist for solving differential equations, and has a feature of great value: the average conversation physical property in each volume control. The resolution by

this method requires the calculation of flows on the faces of control volumes and to perform these calculations is required a reconstruction technique so that they can be evaluated. One of these techniques consists of the reconstruction of the solution based on minimum squares in each volume control. This technique was presented by Gooch and was developed in unstructured grids, a fact that allows a better match for numerical solution of Partial Differential Equations (PDE) defined in spatial domains with complex geometries. The High-Order Reconstruction Method based on Minimum Square proposed by Gooch is based on the approximation of a function in each control volume, by a polynomial whose coefficients is based on the Taylor series of the function and corresponds to values partial derivatives. This study aims to present the numerical technique for solving the diffusion equation via the finite volume method using the High Order Reconstruction Method to calculate the flows on the faces of control volumes in bi-dimensional domains using the second order reconstruction.

**KEYWORDS:** High-order reconstruction method, finite-volume method, diffusion equation, unstructured mesh.

## 1 | INTRODUÇÃO

O estudo de diversos problemas de engenharia envolve a análise da taxa de variação espacial e/ou temporal de uma ou mais propriedades físicas. Pode-se objetivar conhecer, por exemplo, a variação da pressão, da tensão, da velocidade, da temperatura, dentre outras propriedades e, por envolverem taxas de variação, o conhecimento dessas propriedades está ligado a resolução de equações diferenciais parciais (EDP). Tais equações diferenciais, na maioria das vezes, só tem solução via aplicação de métodos numéricos, uma vez que os métodos analíticos possuem muitas limitações tais como a não linearidade das EDP, as condições de fronteira e as geometrias dos domínios onde as mesmas são definidas.

Dentre os métodos de resolução numérica de EDP, um bastante utilizado é o chamado Método dos Volumes Finitos (MVF). O Método de Volumes Finitos possui uma característica muito interessante na resolução de problemas de engenharia, além de outras áreas, que é a conservação da média da propriedade física envolvida na EDP em cada volume de controle. Utilizando o MVF há várias técnicas para se resolver uma EDP, entre elas estão os métodos de alta ordem.

Os métodos de alta ordem têm o potencial de reduzir o esforço computacional requerido para um dado nível de precisão da solução mantendo ou aumentando a acurácia da solução. Alguns trabalhos foram desenvolvidos no sentido de se mostrar, com resultados, o poder desses métodos, dos quais podemos citar como exemplos os trabalhos de Bassi e Rebay (1997) e Zingg *et al.* (2000).

Os métodos dessa classe são desenvolvidos de uma maneira mais ampla, de modo geral, para problemas que trabalham com malhas estruturadas e Método dos

Elementos Finitos. O desenvolvimento de métodos de alta ordem via método de volumes finitos remonta ao trabalho desenvolvido por Barth e Frederickson (1990). Posteriormente vários avanços foram conseguidos no que tange aos métodos de alta ordem, como por exemplo, o desenvolvimento das técnicas ENO (*Essentially Non-Oscillatory*) (HARTEN e OSHER, 1987) e ENO ponderado (*Weighted ENO ou WENO*) (HARTEN *et al.*, 1987).

Os esquemas ENO foram desenvolvidos buscando corrigir uma deficiência dos métodos que o precederam, garantindo maior uniformidade na precisão para todos os pontos com uma vizinhança suave. Apesar do ganho obtido e da obtenção da reconstrução por polinômios de alta ordem, os métodos em questão possuem uma dificuldade no que diz respeito ao estêncil utilizado. Muitas vezes a procura pelo estêncil “mais suave” para a reconstrução em um determinado volume de controle é uma tarefa bastante complexa. Buscando administrar essa questão surgiram os métodos WENO, uma nova família de esquemas que faz uso da soma de todos os estênceis possíveis buscando pelo estêncil mais suave, usando todos os polinômios possíveis na forma de pesos dependentes dos dados, os pesos são da ordem do erro de truncamento em estênceis não-suaves. A maior dificuldade enfrentada frente a tais proposições é a difícil implementação de esquemas que utilizam a busca de estênceis em malhas não-estruturadas, já que estes devem ser procurados em todas as direções simultaneamente e o número de prováveis estênceis é muito grande.

Frente as dificuldades e deficiências de tais métodos, Ollivier-Gooch e Van Altena (2002) se basearam no trabalho de Barth e Frederickson (1990), extendendo-o para ordens mais elevadas, e assim apresentaram o método chamado de Método de Reconstrução de Alta Ordem baseado em Mínimos Quadrados (MRAOMQ). A proposta de Gooch consiste em uma técnica de alta ordem sem a necessidade dessa busca pelo estêncil mais adequado, ou seja, é um método que independe de qualquer tipo de topologia da malha, requerendo somente dados espaciais. A técnica usa estêncil fixo para uma dada ordem, pesos dependentes dos dados e a solução das equações de conservação.

O MRAOMQ tem por essência a aproximação de uma função  $\phi$ , em cada volume de controle, por um polinômio cujos coeficientes são baseados na série de Taylor da função e correspondem a valores de derivadas parciais. Esses coeficientes são obtidos de tal forma que se tenha garantia da conservação da média da propriedade  $\phi$  em cada volume de controle. Os autores enxergavam um alto potencial no uso da técnica para a resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDP) via Método dos Volumes Finitos (MVF). O polinômio obtido em cada volume de controle, nessa estratégia, é utilizado para calcular os fluxos nas faces de cada um dos mesmos.

No que diz respeito ao MVF existem duas possibilidades de esquemas: *cell-vertex* e *cell-centered*. Quando se utiliza a primeira técnica as informações das propriedades físicas definidas pela função  $\Psi$  são armazenadas nos vértices dos triângulos da malha, já quando utiliza-se a segunda as informações são guardadas no centroide

dos triângulos da malha.

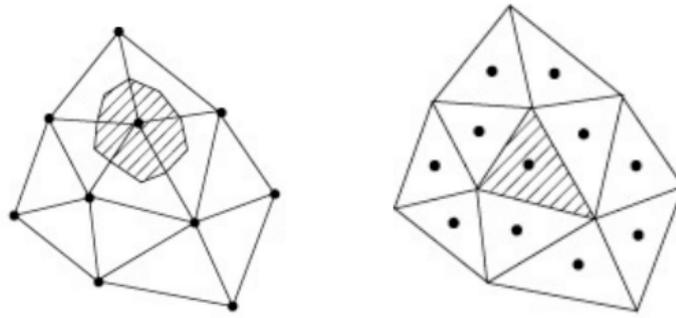


Figura 1. Volume de controle para as técnicas *cell-vertex* (esquerda) e *cell-centered* (direita). Os volumes de controle são representados pelas áreas hachuradas.

Os volumes de controle (VC) gerados para cada as técnicas *cell-vertex* e *cell-centered* são apresentados na Fig. (1), onde é possível observar com maior clareza o fato de que as duas técnicas conduzem a volumes de controle distintos. No presente trabalho foi usado o volume de controle centrado na célula, correspondente a técnica *cell-centered*.

## 2 | MÉTODO DE RECONSTRUÇÃO DE SEGUNDA ORDEM

O método de reconstrução de segunda ordem, o qual é abordado no presente trabalho, é um caso particular do método de reconstrução de alta ordem elaborado por Ollivier-Gooch e Van Altena (2002) junto aos seus colaboradores. A essência de tal técnica consiste em aproximar uma função  $\Phi$ , em cada volume de controle, por um polinômio baseado na série de Taylor da função. Para tanto, os coeficientes desses polinômios, que são derivadas parciais da função, precisam ser determinados. Tal determinação é realizada obedecendo o princípio de conservação da média da propriedade  $\Phi$  em cada volume de controle. Com isso, a ordem de precisão da reconstrução é diretamente dependente do número de termos da série de Taylor utilizada. Considere a expansão em série de Taylor da função  $\Phi_i$  em torno do ponto  $(x_i, y_i)$ , onde  $i$  é o volume de controle e  $\phi^R$  é o valor da solução obtida através da reconstrução.

$$\begin{aligned} \phi_i^R = & \phi|_i + \phi|_i + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i (x - x_i) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_i (y - y_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_i (x - x_i)^2 \\ & + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_i (x - x_i)(y - y_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_i (y - y_i)^2 + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

A precisão da reconstrução da solução depende do número de termos do polinômio apresentado na Eq. (1). No que tange a precisão para funções suaves, uma reconstrução é dita ser  $k$ -exata, ou tem precisão de ordem  $k + 1$ , quando tem-se válido que  $P(\vec{x}) \in \{x^m y^n : m + n \leq k\}$ , onde  $m$  e  $n$  são as potências dos monômios que

aparecem na expansão em série de Taylor da função  $\phi$ . Com isso tem-se a seguinte equivalência:

$$\phi_i^R(\vec{x}) \equiv P(\vec{x})$$

O presente trabalho visa a utilização do MRAOMQ de segunda ordem, o que determina que a série deve ser truncada após o terceiro termo, ou seja, para a reconstrução de segunda ordem a parte necessária da Eq. (1) é mostrada na Eq. (2):

$$\phi_i^R = \phi|_i + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i (x - x_i) + \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_i (y - y_i) \quad (2)$$

A escolha dos coeficientes da expansão é realizada de modo que, no volume de controle, o valor médio seja conservado e o erro na representação de uma solução suave seja minimizado. O valor médio da função de reconstrução em um volume de controle qualquer  $V_i$  é dado por:

$$\frac{1}{A_i} \iint_{A_i} \phi_i^R dA = \bar{\phi}_i \quad (3)$$

Portanto, para segunda ordem, substituindo a Eq. (1) na Eq. (3), tem-se:

$$\frac{1}{A_i} \iint_{A_i} \left[ \phi|_i + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i (x - x_i) + \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_i (y - y_i) \right] dA = \bar{\phi}_i \quad (4)$$

Que pode ser escrita como:

$$\phi|_i + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i \bar{x}_i + \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_i \bar{y}_i = \bar{\phi}_i \quad (5)$$

onde

$$\bar{x}_i = \frac{1}{A_i} \iint_{A_i} (x - x_i) dA \quad \text{e} \quad \bar{y}_i = \frac{1}{A_i} \iint_{A_i} (y - y_i) dA \quad (6)$$

são os termos chamados de momentos. As duas integrais da Eq. (6) foram calculadas utilizando uma fórmula de integração numérica, com precisão de grau três, presente em Quarteroni et al. (2010). A técnica utilizada faz uso de sete pontos no triângulo: vértices, pontos médios das arestas e centroide, para o cálculo da integral. Para obter as derivadas parciais que irão determinar os polinômios de reconstrução é necessário agregar mais informações a Eq. (5) para cada volume de controle. Isso é feito acrescentando a exigência de que o valor médio de  $\phi_i^R$  nos volumes de controle vizinhos seja conservado. Portanto, chega-se a:

$$\frac{1}{A_j} \iint_{A_j} \phi_i^R dA = \bar{\phi}_j \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_v \quad (7)$$

onde  $N_v$  corresponde ao número de volumes de controle vizinhos ao  $i$ -ésimo

volume de controle.

Para o cálculo da integral apresentada na Eq. (7) foi utilizada uma integração numérica via quadratura gaussiana. Uma regra de quadratura gaussiana consiste na aproximação da integral de uma função, estabelecendo um somatório com pesos dos valores assumidos pela função em pontos específicos dentro do domínio de integração, os chamados pontos e pesos de Gauss. Para o cálculo da equação em questão foram utilizados 13 valores relativos aos pontos e pesos de Gauss propostos por Dunavant (1985), visando a obtenção de uma aproximação de ordem 7.

Substituindo a Eq. (1) na Eq. (7), após algumas operações, obtém-se a seguinte equação:

$$\phi|_i + \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_i \hat{x}_{ij} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_i \hat{y}_{ij} = \bar{\phi}_j \quad (8)$$

onde  $\hat{x}_{ij} = \bar{x}_j + x_j - x_i$  e  $\hat{y}_{ij} = \bar{y}_j + y_j - y_i$  são chamados termos geométricos. Nos volumes de controle internos da malha, que não tem nenhuma face na fronteira, o polinômio de reconstrução é obtido então resolvendo o sistema linear sobredeterminado dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_i & \bar{y}_i \\ \omega_{i1} & \omega_{i1}\hat{x}_{i1} & \omega_{i1}\hat{y}_{i1} \\ \omega_{i2} & \omega_{i2}\hat{x}_{i2} & \omega_{i2}\hat{y}_{i2} \\ \omega_{i3} & \omega_{i3}\hat{x}_{i3} & \omega_{i3}\hat{y}_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_i \\ \omega_{i1}\bar{\phi}_1 \\ \omega_{i2}\bar{\phi}_2 \\ \omega_{i3}\bar{\phi}_3 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^2} \quad (9)$$

sendo  $\omega_{ij}$  parâmetros de ponderação baseados no inverso da distância do volume de controle  $i$  para o volume de controle vizinho  $j$  que são inserido com o objetivo de se levar em consideração a influência pela distância deste último na obtenção da solução.

Com relação a reconstrução dos volumes de controle da fronteira, é necessário um tratamento especial para levar em consideração o tipo de condição de fronteira, as quais, no presente trabalho, podem ser Dirichlet ou Neumann.

Para garantir que a ordem do método seja preservada no contorno, são adicionadas restrições adicionais na formação do sistema, já que os triângulos da fronteira possuem apenas um ou dois vizinhos no estêncil da reconstrução de segunda ordem, porém, o número de vizinhos vai depender da ordem desejada para a reconstrução. Tais adições são equações aplicadas nos pontos de Gauss da fronteira. Esses pontos, nada mais são que, as coordenadas dos pontos médios dos lados de cada triângulo na fronteira quando se trata de uma reconstrução de segunda ordem, porém, o número de pontos vai depender da ordem desejada para a reconstrução. Os sistemas obtidos para os volumes de controle posicionados nas fronteiras tanto sob condição de Dirichlet quanto de Neumann são apresentados a seguir:

### Dirichlet

### Neumann

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_i & \bar{y}_i \\ 1 & \Delta x_g & \Delta y_g \\ \omega_{i1} & \omega_{i1}\hat{x}_{i1} & \omega_{i1}\hat{y}_{i1} \\ \omega_{i2} & \omega_{i2}\hat{x}_{i2} & \omega_{i2}\hat{y}_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_i \\ \phi_g \\ \omega_{i1}\bar{\phi}_1 \\ \omega_{i2}\bar{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_i & \bar{y}_i \\ 0 & (n_x)_g & (n_y)_g \\ \omega_{i1} & \omega_{i1}\hat{x}_{i1} & \omega_{i1}\hat{y}_{i1} \\ \omega_{i2} & \omega_{i2}\hat{x}_{i2} & \omega_{i2}\hat{y}_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_i \\ (\nabla\phi \cdot \vec{\eta})_g \\ \omega_{i1}\bar{\phi}_1 \\ \omega_{i2}\bar{\phi}_2 \end{bmatrix}$$

Nos sistemas lineares sobredeterminados apresentados acima tem-se que  $\Delta x_g = x_g - x_i$ ,  $\Delta y_g = y_g - y_i$ ,  $\vec{\eta}_g = (n_x, n_y)$ , (coordenadas da normal em relação aos ponto de Gauss na fronteira)  $\nabla\phi_g = (\phi_x(x_g, y_g), \phi_y(x_g, y_g))$  sendo  $(x_g, y_g)$  o ponto de Gauss na face da fronteira. Os pontos de Gauss no caso da reconstrução de segunda ordem são os pontos médios da respectiva face do volume de controle que está na fronteira.

Objetivando-se a obtenção de aproximações com alto grau de precisão, no sentido dos mínimos quadrados, foram utilizadas, na resolução de todos os sistemas sobredeterminados supracitados, transformações de Householder. Tais transformações, conforme consta na teoria apresentada por Leon (2000), são baseadas em transformações ortogonais, os quais são bastante estáveis com relação aos erros de arredondamento do computador.

### 3 | RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO

Para a resolução será considerada a equação da difusão com termo fonte estacionária, a qual é dada por:

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) = f \quad (10)$$

A Eq. (10) é dependente apenas das variáveis  $x$  e  $y$  e não varia com o tempo. Desse modo, se é adicionado  $\phi_t$  no primeiro membro da equação a relação de igualdade é mantida, já que  $\phi_t$  é zero.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) = f \quad (11)$$

Realizando-se a integração do termo transiente, o fluxo difusivo e o termo fonte da Eq. (11), em cada VC do domínio discretizado  $\Omega$  segue que:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \iint_{\Omega} [-\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi)] d\Omega = \iint_{\Omega} f d\Omega \quad (12)$$

Com a aplicação do teorema de Gauss sobre a Eq. (12) tem-se:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [-\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi)] \cdot n ds = \iint_{\Omega} f d\Omega \quad (13)$$

O termo transiente da Eq. (13) pode ser aproximado considerando o seu valor médio no volume de controle. Denotando por  $A_{\Omega}$  a área do domínio  $\Omega$  segue que

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} A_{\Omega} + \oint_{\partial \Omega} [-\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi)] \cdot n \, ds = \iint_{\Omega} f \, d\Omega \quad (14)$$

Realizando a discretização do termo temporal por diferenças progressivas, chega-se a:

$$\frac{\bar{\phi}^{n+1} - \bar{\phi}^n}{\Delta t} A_{\Omega} + \oint_{\partial \Omega} [-\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi)] \cdot n \, ds = \iint_{\Omega} f \, d\Omega \quad (15)$$

$$\bar{\phi}^{n+1} = \bar{\phi}^n - \frac{\alpha_k \Delta t}{A_{\Omega}} \left[ \underbrace{\oint_{\partial \Omega} [-\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi)] \cdot n \, ds}_{\text{IF}} - \underbrace{\iint_{\Omega} f \, d\Omega}_{\text{TF}} \right] \quad (16)$$

com  $k = 1, 2, \dots, np$ , sendo  $np$  o número de estágios e  $\alpha_k$  os parâmetros do método de Runge-Kutta (Runge-Kutta time-stepping scheme segundo Haelterman et al. (2009)) que foi utilizado.

Percebe-se que, no desenvolvimento, a derivada de  $\phi$  em relação ao tempo acrescentada tem uma função auxiliar no processo de obtenção da solução numérica. Foi acrescentada com a finalidade de se montar um processo de integração temporal. O método de Runge-Kutta multiestágio é um método de evolução temporal. Assim sendo, por ser um problema pseudotransiente, a integração temporal deverá ser realizada até atingir um estado estacionário. Dessa forma, a partir de uma solução inicial, a solução irá evoluir no tempo, e em cada iteração do processo de integração temporal, a solução será reconstruída com as aproximações nodais obtidas em cada volume de controle. Essas reconstruções, que são polinômios, são então utilizadas para calcular as integrais dos fluxos. Os passos são realizados até que, como comentado anteriormente, a solução fique estacionária em cada volume de controle.

Os parâmetros  $\alpha_k$  que aparecem na Eq. (16) são calibrados de acordo com o problema, e na literatura podem ser encontrados diversos valores para esses parâmetros. No presente trabalho optou-se pela utilização do método de Runge-Kutta com 5 estágios e, baseado nisso, foram utilizados os parâmetros propostos por Ollivier-Gooch (1995), os quais são dados por

$$\alpha_1 = \frac{1}{15}, \quad \alpha_2 = \frac{7}{45}, \quad \alpha_3 = \frac{2}{7}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_5 = 1$$

O termo IF é a integral dos fluxos difusivos, e envolve o cálculo de uma integral de linha em torno do volume de controle. O contorno de um dado VC faz comunicação, tem intersecção, com outros volumes de controle. Assim sendo, dado um volume de controle I que tem uma face em comum com um volume de controle J, para calcular a integral na face AB, conforme mostrado na Fig. 2, são realizadas as seguintes considerações:

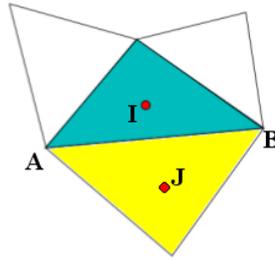


Figura 2. Representação da face AB que é comum aos volumes de controle I e J.

- Pontos de Gauss: A ordem do polinômio de reconstrução determina o número e a localização dos pontos de Gauss nas faces dos volumes de controle. As derivadas dos polinômios (que são as aproximações dos fluxos) são avaliadas nesses pontos localizados sobre a face AB ao se realizar o cálculo da integral de contorno.
- Fluxos difusivos: Os fluxos difusivos nos pontos de Gauss da face AB são calculados tomando as médias ponderadas pelas áreas dos volumes de controle  $\phi_I$  e  $\phi_J$  em cada ponto de Gauss. No caso do presente trabalho, que aborda o MRAOMQ de segunda ordem, foi utilizado um único ponto de Gauss em cada face do VC para cálculo dos fluxos das integrais de contorno.
- Termo fonte: para o cálculo do termo fonte foram utilizados os valores para os pontos e pesos de Gauss propostos por Dunavant visando a obtenção de uma aproximação de ordem 7.

Para calcular o termo IF da Eq. (16) utiliza-se, para o caso da reconstrução de segunda ordem, a seguinte fórmula:

$$IF = \sum_{i=1}^3 \left[ -\kappa(x_g^{(i)}, y_g^{(i)}) \nabla \phi_m^R(x_g^{(i)}, y_g^{(i)}) \right] \cdot n_g^{(i)} \quad (17)$$

onde

- $(x_g^{(i)}, y_g^{(i)})$  são os pontos de Gauss em uma dada face AB que está na intersecção de um volume de controle I com outro J.
- $n_g = (n_x, n_y)$  são as componentes das normais nos pontos de Gauss.
- $\nabla \phi_m^R(x_g^{(i)}, y_g^{(i)})$  é a média do gradiente na face que, tomando por AVC a área do volume de controle, é dada por:

$$\nabla \phi_m^R(x_g^{(i)}, y_g^{(i)}) = \frac{\kappa_I(x_g^{(i)}, y_g^{(i)}) \nabla_I \phi^R(x_g^{(i)}, y_g^{(i)}) AVC_I + \kappa_J(x_g^{(i)}, y_g^{(i)}) \nabla_J \phi^R(x_g^{(i)}, y_g^{(i)}) AVC_J}{AVC_I + AVC_J} \quad (18)$$

## 4 | TESTES COMPUTACIONAIS

Para a exemplificação do método e de seu comportamento quando utilizado na resolução da equação da difusão são apresentados alguns resultados visando explorar diferentes parâmetros. Os testes realizados visam mostrar o comportamento da técnica em uma situação onde apenas uma fronteira está sob condição de Dirichlet com as demais sob condição de Neumann e outra situação onde se utiliza uma função teste com alta variação ao longo de um domínio com geometria mais complexa.

### 4.1 Teste 1

Na primeira situação foi utilizada uma geometria com um nível de complexidade não tão alto. O foco desse teste é mostrar a reação do método à presença da maioria das fronteiras sob condição de Neumann, para isso apenas a base foi submetida a condição de Dirichlet, com as demais fronteiras sob condição de Neumann. A função teste utilizada foi  $\phi = 100e^{-y}sen(\pi x)$  e o coeficiente de difusão  $\alpha = 0,01$ .

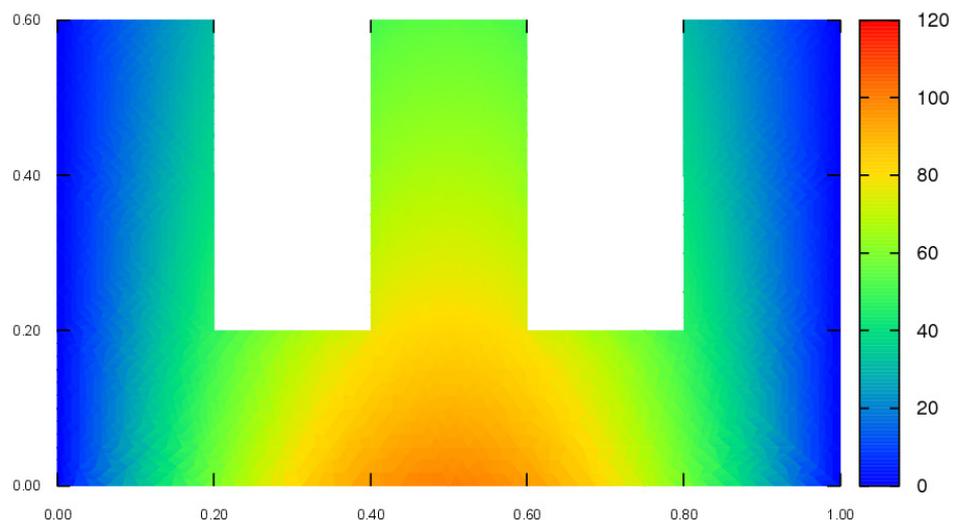


Figura 3. Gráfico da solução gerada no teste 1.

### 2.2 Teste 2

No segundo teste realizado a reconstrução foi realizada sobre uma geometria complexa com uma função teste que possui alta variação ao longo do domínio. O objetivo deste teste é demonstrar como o método se comporta em uma situação na qual a geometria não é simples como a demonstrada anteriormente. A função utilizada foi  $\phi = sen(\pi x)sen(\pi y)$  e todos os lados da geometria se encontram sob condição de fronteira de Dirichlet.

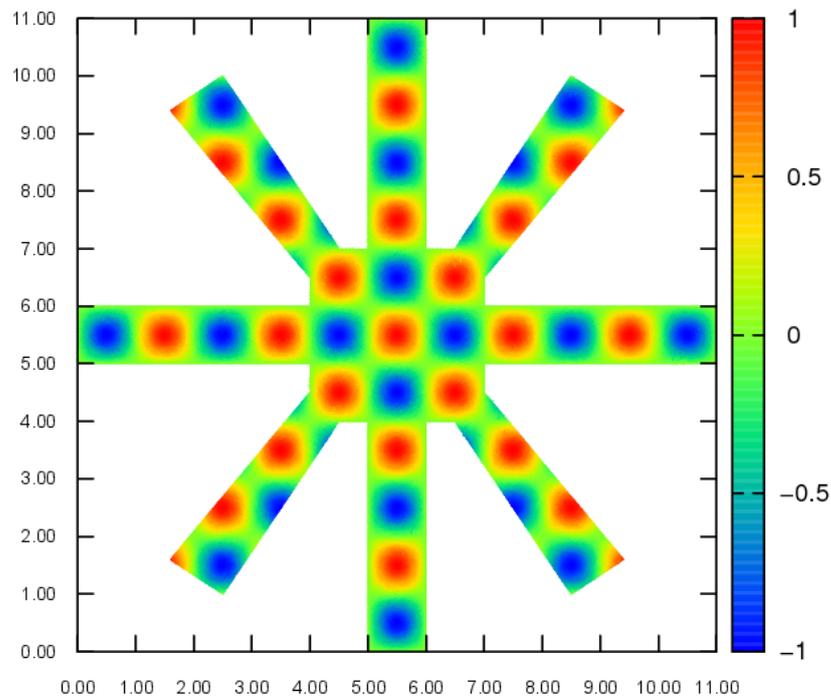


Figura 4. Gráfico da solução gerada no teste 2.

## 5 | VERIFICAÇÃO COMPUTACIONAL

A verificação computacional é uma etapa que deve estar presente em projetos de resolução numérica, pois é nesta etapa que torna-se possível verificar se a solução aproximada pela técnica utilizada está retornando resultados com a ordem de precisão declarada pela teoria do método.

A metodologia utilizada no presente trabalho para a realização desta etapa foi adotada por Van Altena (1999) e se baseia na análise dos fluxos difusivos que aparecem na equação da difusão, onde  $R$  corresponde ao que chama-se de resíduo e  $\Omega$  é o domínio sobre o qual realiza-se a integração

$$R = \iint_{\Omega} [-\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) - f] d\Omega \quad (19)$$

considerando o comportamento dos dois tipos de condições de fronteira tratados (Dirichlet e Neumann). Nesse processo, uma sequência de integrais são calculadas, utilizando polinômios de reconstrução, sobre malhas não-estruturadas que aumentam sucessivamente o refinamento.

Após o cálculo do resíduo, através da Eq. (19) é construído um gráfico  $\log(\text{número de volumes de controle}) \times \log(\text{erro})$ , onde o erro é obtido pelo cálculo da norma  $L_2$ , que é dada pela Eq. (20), sendo  $n$  o número de volume de controles e  $A_i$  corresponde a área do volume de controle  $i$ .

$$L_2 = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n A_i R_i^2}{\sum_{i=1}^n A_i} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

Logo após a determinação do erro em malhas progressivamente refinadas sobre o domínio são geradas tabelas com os dados obtidos, os quais são apresentados na Tab. (1) para o teste 1 e na Tab. (2) para o teste 2.

$n$	$L_2$	$\log(n)$	$\log(L_2)$
37	8,62075e+00	3,61092	2,15417
148	2,15947e+00	4,99721	0,76986
592	5,39860e-01	6,38351	-0,61644
2368	1,34922e-01	7,76980	-2,00306
9472	3,37249e-02	9,15610	-3,38952

Tabela 1. Tabela dos dados utilizados na verificação computacional com a função teste  $\phi = 100e^{-y} \text{sen}(\pi x)$  relativa ao teste 1 da seção anterior.

$n$	$L_2$	$\log(n)$	$\log(L_2)$
1604	2,47837e-01	7,38026	-1,39498
6416	6,31510e-02	8,76655	-2,76223
25664	1,58606e-02	10,15284	-4,14392
102656	3,96944e-03	11,53914	-5,52913
410624	9,92593e-04	12,92543	-6,91519

Tabela 2. Tabela dos dados utilizados na verificação computacional com a função teste  $\phi = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$  relativa ao teste 2 da seção anterior.

De posse dos dados é possível a geração do gráfico citado anteriormente. Os gráficos para os dois testes são apresentados nas Figs. (5) e (6) para os casos 1 e 2, respectivamente.

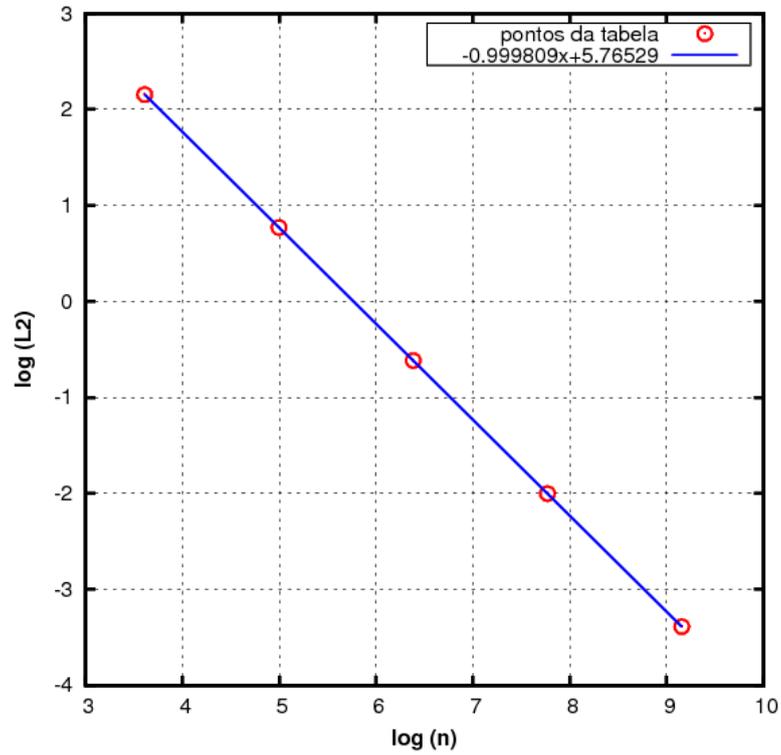


Figura 5. Gráfico construído com os dados da Tab. (1) para mostrar a taxa de convergência do método.

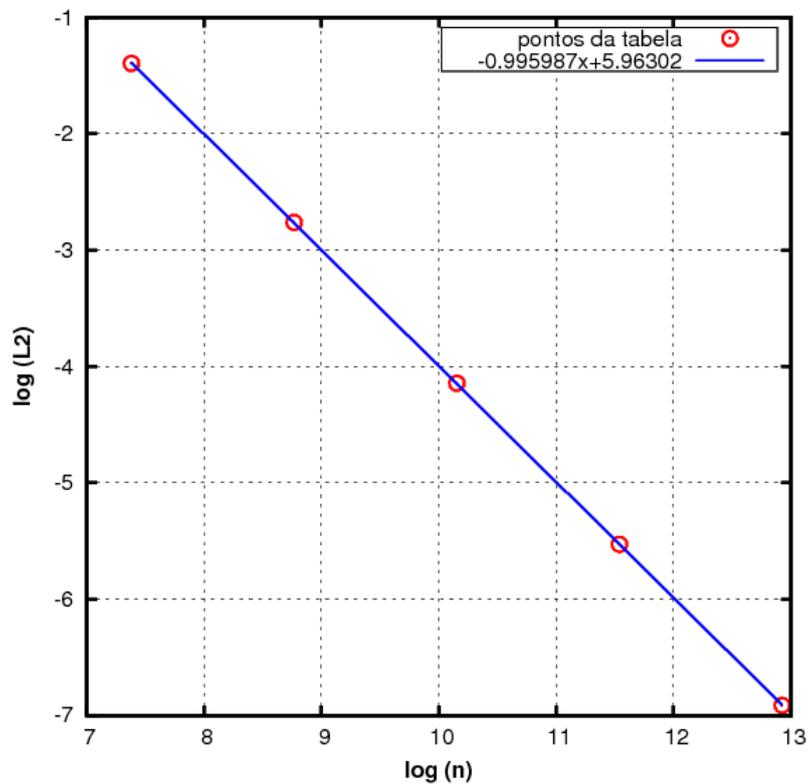


Figura 6. Gráfico construído com os dados da Tab. (2) para mostrar a taxa de convergência do método.

Nos gráficos mostrados na Fig. (5) e na Fig. (6) as retas apresentadas foram obtidas por meio da regressão linear dos pontos apresentados na Tab. (1) e na Tab. (2),

respectivamente. A legenda de tais retas apresenta a equação geradora das mesmas, tornando possível observar que para o teste 1 o coeficiente de inclinação da reta é  $-0,999809$ , já para a segunda situação esse parâmetro assume o valor de  $-0,995987$ .

O coeficiente angular de ambas as retas de ajuste é negativo e o dobro de seu valor, em módulo, irá fornecer a ordem de precisão do método, conforme apresentado por Van Altena (1999). Realizando-se tais operações com o valor apresentado no primeiro gráfico, que corresponde ao teste 1 apresentado na seção anterior, obtêm-se  $1,999618$ , já para o segundo, que corresponde ao teste 1 apresentado na seção anterior, o valor calculado é  $1,991974$ , verificando assim que, conforme pretendido, o método utilizado na resolução é de segunda ordem para ambos os teste apresentados, que envolvem diferentes tipos de condições de contorno.

## 6 | CONCLUSÕES

O presente trabalho aplica a técnica de Reconstrução de Alta Ordem via Mínimos Quadrados a resolução da equação da difusão em geometrias com diferentes níveis de complexidade e diferentes combinações de condições de contorno. Tais situações foram verificadas e, conforme mostrado anteriormente, atingiram os resultados almejados. Apesar de ter demonstrado a resolução de uma EDP relativamente simples é possível observar que o MRAOMQ é uma ferramenta que pode ser utilizada para lidar com outras EDP de interesse na área de mecânica dos fluidos e diversas outras áreas da engenharia pela acurácia nos resultados e a flexibilidade quanto a diversas geometrias. Na sequência do trabalho a equação da advecção-difusão foi resolvida utilizando o mesmo método demonstrado no presente trabalho, exigindo um tratamento a mais para o termo advectivo. A solução da EDP da advecção-difusão também apresentou bons resultados em domínios com diferentes níveis de complexidade e diferentes composições de condições de contorno. Frente os resultados obtidos pode-se concluir que o MRAOMQ é um método robusto e capaz de ser aplicado em diversos problemas de engenharia de diferentes áreas.

## 7 | AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer à FAPEMIG, ao CNPq, à FAMAT/UFU e à FEMEC/UFU pelo suporte no desenvolvimento do presente trabalho.

## REFERÊNCIAS

Barth, T.J., Frederickson, P.O., 1990. **Higher order solution of the euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction**. AIAA paper, Vol. 13, p. 1990.

Bassi, F., Rebay, S., 1997. **A high-order accurate discontinuous finite element method for the**

**numerical solution of the compressible navier–stokes equations.** Journal of computational physics, Vol. 131, No. 2, pp. 267–279.

Dunavant, D., 1985. **High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle.** International journal for numerical methods in engineering, Vol. 21, No. 6, pp. 1129–1148.

Haelterman, R., Vierendeels, J. e Van Heule, D., 2009. **A generalization of the runge–kutta iteration.** Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 224, No. 1, pp. 152–167.

Harten, A. e Osher, S., 1987. **Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. I.** *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24(2), pp.279-309.

Harten, A., Engquist, B., Osher, S. and Chakravarthy, S.R., 1987. **Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III.** In *Upwind and high-resolution schemes* (pp. 218-290). Springer, Berlin, Heidelberg.

Leon, S.J., 2000. *Álgebra linear com aplicações.* Grupo Gen-LTC.

Ollivier-Gooch, C. e Van Altena, M., 2002. **A high-order-accurate unstructured mesh finite-volume scheme for the advection–diffusion equation.** Journal of Computational Physics, Vol. 181, No. 2, pp. 729–752.

Ollivier-Gooch, C.F., 1995. **Multigrid acceleration of an upwind euler solver on unstructured meshes.** AIAA journal, Vol. 33, No. 10, pp. 1822–1827.

Quarteroni, A., Sacco, R. e Saleri, F., 2010. **Numerical mathematics**, Vol. 37. Springer Science & Business Media.

Van Altena, M., 1999. **High-order finite-volume discretisations for solving a modified advection–diffusion problem on unstructured triangular meshes.**

Zingg, D., De Rango, S., Nemec, M. e Pulliam, T., 2000. **Comparison of several spatial discretizations for the navier-stokes equations.** Journal of computational Physics, Vol. 160, No. 2, pp. 683–704.

## **SOBRE OS ORGANIZADORES**

**Henrique Ajuz Holzmann** - Professor assistente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Graduação em Tecnologia em Fabricação Mecânica e Engenharia Mecânica pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Mestre em Engenharia de Produção pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Doutorando em Engenharia e Ciência dos Materiais pela Universidade Estadual de Ponta Grossa. Trabalha com os temas: Revestimentos resistentes a corrosão, Soldagem e Caracterização de revestimentos soldados.

**João Dallamuta** - Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Engenheiro de Telecomunicações pela UFPR. Especialista em Inteligência de Mercado pela FAE Business School. Mestre em Engenharia pela UEL. Trabalha com os temas: Inteligência de Mercado, Sistemas Eletrônicos e Gestão Institucional.

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-247-0

