



Henrique Ajuz Holzmann  
João Dallamuta  
(Organizadores)

# Impactos das Tecnologias na Engenharia Mecânica 2

Atena  
Editora  
Ano 2019

**Henrique Ajuz Holzmann**  
**João Dallamuta**  
(Organizadores)

**Impactos das Tecnologias na  
Engenharia Mecânica**  
**2**

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora

Copyright © da Atena Editora

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Diagramação e Edição de Arte: Lorena Prestes e Geraldo Alves

Revisão: Os autores

### Conselho Editorial

- Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Profª Drª Deusilene Souza Vieira Dall’Acqua – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Profª Drª Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I34 Impactos das tecnologias na engenharia mecânica 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Henrique Ajuz Holzmann, João Dallamuta. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Impactos das Tecnologias na Engenharia Mecânica; v. 2)

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

ISBN 978-85-7247-247-0

DOI 10.22533/at.ed.470190504

1. Automação industrial. 2. Engenharia mecânica – Pesquisa – Brasil. 3. Produtividade industrial. 4. Tecnologia. I. Holzmann, Henrique Ajuz. II. Dallamuta, João. III. Série.

CDD 670.427

**Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422**

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores.

2019

Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

## APRESENTAÇÃO

A Engenharia Mecânica pode ser definida como o ramo da engenharia que aplica os princípios de física e ciência dos materiais para a concepção, análise, fabricação e manutenção de sistemas mecânicos

Nos dias atuais a busca pela redução de custos, aliado a qualidade final dos produtos é um marco na sobrevivência das empresas. Nesta obra é conciliada duas atividades essenciais a um engenheiro mecânico: Projetos e Simulação.

É possível observar que na última década, a área de projetos e simulação vem ganhando amplo destaque, pois através de simulações pode-se otimizar os projetos realizados, reduzindo o tempo de execução, a utilização de materiais e os custos finais.

Dessa forma, são apresentados trabalhos teóricos e resultados práticos de diferentes formas de aplicação e abordagens nos projetos dentro da grande área das engenharias.

Trabalhos envolvendo simulações numéricas, tiveram um grande avanço devido a inserção de novos softwares dedicados a áreas específicas, auxiliando o projetista em suas funções. Sabe-los utilizar de uma maneira eficaz e eficiente é um dos desafios dos novos engenheiros.

Neste livro são apresentados vários trabalhos, alguns com resultados práticos, sobre simulações em vários campos da engenharia industrial, elementos de maquinas e projetos de bancadas práticas.

Um compendio de temas e abordagens que constituem a base de conhecimento de profissionais que se dedicam a projetar e fabricar sistemas mecânicos e industriais.

Boa leitura

Henrique Ajuz Holzmann  
João Dallamuta

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL COM SOLUÇÃO SUAVE UTILIZANDO MALHA ADAPTATIVA	
<i>Gabriel Marcos Magalhães</i> <i>Hélio Ribeiro Neto</i> <i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905041</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>14</b>
USO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO	
<i>Gabriel Marcos Magalhães</i> <i>Alessandro Alves Santana</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905042</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>29</b>
MÉTODOS NUMÉRICOS: DIFERENÇAS FINITAS E GUIA DE ONDAS DIGITAIS 1D E 2D - COMPARATIVO DE FREQUÊNCIAS	
<i>Brenno Lobo Netto Peixoto</i> <i>Marlipe Garcia Fagundes Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905043</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>43</b>
INFLUÊNCIA DA DISCRETIZAÇÕES ESPACIAL E TEMPORAL EM PROBLEMA PURAMENTE ADVECTIVO	
<i>Thiago Fernando Santiago de Freitas</i> <i>Andreia Aoyagui Nascimento</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905044</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>53</b>
FRONTEIRA IMERSA PARA CORPOS ESBELTOS	
<i>João Rodrigo Andrade</i> <i>Aristeu Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905045</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>61</b>
MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODELLING OF GAS-SOLID TURBULENT FLOWS IN COMPLEX GEOMETRIES	
<i>Stella Rodrigues Ferreira Lima Ribeiro</i> <i>Letícia Raquel de Oliveira</i> <i>João Marcelo Vedovoto</i> <i>Aristeu da Silveira Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4701905046</b>	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>69</b>
ESTUDO NUMÉRICO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA TRANSIENTE EM PLACAS	
<i>William Denner Pires Fonseca</i>	

*Táisa Santos Machado  
Eduardo Mendonça Pinheiro  
José Felipe Lopes de Carvalho  
Sidney da Conceição Alves  
Thiago Santana de Oliveira*

**DOI 10.22533/at.ed.4701905047**

**CAPÍTULO 8 ..... 83**

IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL E PROJETO DE UM PID PARA UM SERVOMECANISMO

*Wesley Pereira Marcos  
Rodrigo Hiroshi Murofushi  
Bruno Luiz Pereira*

**DOI 10.22533/at.ed.4701905048**

**CAPÍTULO 9 ..... 98**

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS CONTENDO SHUNT RESISTIVO PARA O CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES

*Lorrane Pereira Ribeiro  
Antônio Marcos Gonçalves de Lima  
Victor Augusto da Costa Silva*

**DOI 10.22533/at.ed.4701905049**

**CAPÍTULO 10 ..... 114**

PROJETO E ANÁLISE DE VIBRAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS DE UM CHASSI TIPO SPACE FRAME MINI-BAJA

*Marcos Claudio Gondim  
Ellberlandyo Lima Grangeiro  
Antonio Eurick Soares Campelo  
Lucas Rodrigues Oliveira  
Bruno de Oliveira Carvalho*

**DOI 10.22533/at.ed.47019050410**

**CAPÍTULO 11 ..... 126**

SIMULAÇÕES DOS ESFORÇOS VIBRACIONAIS DO CABO CAA 795 MCM (TERN) ATRAVÉS DE MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS DE VIBRAÇÃO

*Jhonattan Dias  
Rodrigo Canestraro Quadros  
Marcos Jose Mannala  
Marcio Tonetti*

**DOI 10.22533/at.ed.47019050411**

**CAPÍTULO 12 ..... 133**

PROJETO E CONSTRUÇÃO DE UM SISTEMA DE FREIO APLICADO A UM VEÍCULO OFF-ROAD DO TIPO BAJA-SAE

*Felipe Alencar Motta  
Lucas Rocha Dias da Silva*

**DOI 10.22533/at.ed.47019050412**

<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>146</b>
OTIMIZAÇÃO DA ESCOLHA DA RELAÇÃO DE TRANSMISSÃO DE VEÍCULOS AUTOMOTORES ATRAVÉS DE MODELAGEM MATEMÁTICA: O PROJETO BAJA SAE	
<i>Pedro Melo Biz</i> <i>Leonardo Gomes</i> <i>Antônio Brasil</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050413</b>	
<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>157</b>
ANÁLISE CINEMÁTICA DE SUSPENSÃO TRAILING ARM COM CAMBER LINKS PARA VEÍCULO OFF-ROAD	
<i>Francisco José Rodrigues de Sousa Júnior</i> <i>João Lucas Jacob Araújo</i> <i>Gustavo Luis dos Santos Silva</i> <i>Antônio Ítalo Rodrigues Pedrosa</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050414</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>169</b>
APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM EM SUSPENSÃO VEICULAR	
<i>Alaí de Souza Machado</i> <i>Pedro Henrique Rodrigues Taveira</i> <i>Filipe Gomes Soares</i> <i>Domingos dos Santos Ponciano</i> <i>Marcus Victor de Brito Rodrigues</i> <i>João Lucas Jacob Araújo</i> <i>Gean Carlos Moura Mota</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050415</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>178</b>
ANÁLISE AERODINÂMICA: SIMULAÇÃO FLUIDO DINÂMICA DO PROTÓTIPO EC-05 DE EFICIÊNCIA ENERGÉTICA DA EQUIPE COYOTE	
<i>Paulo Henrique Pereira Araujo</i> <i>Josué Alves Rodrigues Junior</i> <i>Thaiane Mayara Marques Licar</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050416</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>190</b>
APLICAÇÃO DE SISTEMAS NEURO-FUZZY NA PREDIÇÃO DO COEFICIENTE DE SUSTENTAÇÃO DO AEROFÓLIO NACA 1412	
<i>Vitor Taha Sant'Ana</i> <i>Bruno Luiz Pereira</i> <i>Tobias Moraes</i> <i>Roberto Mendes Finzi Neto</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050417</b>	

<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>195</b>
AVALIAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE ATIVO DE RUÍDO EM VENEZIANAS ACÚSTICAS COM CONFIGURAÇÕES DISTINTAS VIA ELEMENTOS FINITOS	
<i>Geisa Arruda Zuffi</i>	
<i>Fabiana Alves Pereira</i>	
<i>Marcus Antonio Viana Duarte</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050418</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>203</b>
ABSORVEDORES ACÚSTICOS DE RUÍDO: MODELAGEM NUMÉRICA	
<i>Fabiana Alves Pereira</i>	
<i>Geisa Arruda Zuffi</i>	
<i>Israel Jorge Cárdenas Nuñez</i>	
<i>Marcus Antonio Viana Duarte</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050419</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>211</b>
INVESTIGAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA ESCOLHA DAS DIMENSÕES DO RECEPTOR NO MÉTODO DO TRAÇADO DE RAIOS ACÚSTICOS	
<i>Henrique Gebran Silva</i>	
<i>Marlipe Garcia Fagundes Neto</i>	
<i>Pollyana Alves Resende</i>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.47019050420</b>	
<b>SOBRE OS ORGANIZADORES</b> .....	<b>228</b>

## RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL COM SOLUÇÃO SUAVE UTILIZANDO MALHA ADAPTATIVA

### **Gabriel Marcos Magalhães**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade  
de Engenharia Mecânica  
Uberlândia – MG

### **Hélio Ribeiro Neto**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade  
de Engenharia Mecânica  
Uberlândia – MG

### **Aristeu da Silveira Neto**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade  
de Engenharia Mecânica  
Uberlândia – MG

**RESUMO:** Em problemas de engenharia é comum que se tenha singularidades de propriedades: físicas, geométricas e na própria solução. Para a solução numérica desses problemas é necessário um determinado passo espacial para que se obtenha a acurácia pretendida. Nas demais regiões do domínio a utilização do mesmo passo espacial é desnecessária e indesejada, pois não existirão grandes ganhos na acurácia da solução e o custo computacional será elevado. Nesses casos, a utilização da metodologia de Refinamento Adaptativo de Malhas Estruturadas (RAME) é um bom recurso, pois possibilita o elevado refinamento da malha em regiões de interesse, enquanto permite o uso de malhas mais grosseiras nas demais regiões do domínio

numérico. No presente trabalho apresenta-se a solução da equação da difusão unidimensional e transiente utilizando a metodologia RAME. As derivadas espacial e temporal foram discretizadas respectivamente via Método de Diferenças Finitas Centradas e Método de Euler de primeira ordem. Conhecendo as características da solução optou-se pelo posicionamento dos níveis de máximo refinamento em torno dos pontos de máxima derivada da função. O critério de remalhagem dinâmica adotado depende da velocidade com que a função se movimenta no domínio. O programa desenvolvido permite a utilização de quantos níveis e blocos de refinamento forem necessários. A decisão da topologia da malha inicial deve ser tomada pelo usuário. Dessa forma, vários testes podem ser realizados e analisados. Foram realizadas diferentes simulações para se analisar os ganhos que a metodologia RAME pode proporcionar.

**PALAVRAS-CHAVE:** Equação da difusão, malha com refinamento móvel, malha estruturada.

**ABSTRACT:** In engineering problems it is common to have properties of singularities: physical, geometric and own solution. For the numerical solution of these problems a certain spatial step to obtain the desired accuracy is required. In other regions of the domain using

the same spatial step is unnecessary and unwelcome, because there will be not big gains in the accuracy of the solution and the computational cost will be high. In such cases, the use of Adaptive Mesh Refinement (AMR) methodology is a good approach, it allows the high refinement of the mesh in areas of interest, while allowing use coarse grid in other regions of the numerical domain. This paper presents the solution of one-dimensional and transient diffusion equation using the AMR methodology. The spatial and temporal derivatives respectively were discretized with Finite Difference Method Centered and Euler method of the first order. Knowing the solution characteristics opted for the positioning of the finer levels of refinement around the points of maximum derivative of the function. The criteria of dynamic remeshing adopted depends on the speed that the function moves in the field. The developed code allows the use of as many levels and refining blocks are desired. The decision of the initial mesh topology should be taken by the user. Thus various tests can be performed and analyzed. Different simulations were made to analyze the gains that AMR methodology can provide.

**KEYWORDS:** Diffusion equation, mesh with dynamic refinement, structured mesh.

## 1 | INTRODUÇÃO

Muitos problemas que aparecem corriqueiramente na engenharia envolvem a análise da taxa de variação, ou seja, a análise da derivada, de uma ou mais propriedades físicas em relação ao tempo e/ou espaço. Por exemplo, em Mecânica dos Fluidos, uma das áreas da Engenharia Mecânica, é muito comum o desenvolvimento de pesquisas cuja finalidade reside em analisar a variação da pressão, da temperatura, da velocidade e de outras propriedades físicas em relação ao espaço e/ou tempo. Dessa forma, a modelagem matemática de fenômenos na área supracitada conduz, em muitos desses casos, à Equações Diferenciais Parciais (EDP).

As EDP podem ser divididas em três classes: as parabólicas, as hiperbólicas e as elípticas. As equações diferenciais parciais parabólicas, classe enfocada no presente trabalho, segundo Chapra and Canale (2009), determinam como uma incógnita varia tanto no espaço quanto no tempo. Isso se manifesta pela presença tanto de derivadas espaciais quanto temporais. A equação da difusão é uma EDP parabólica e, portanto, possui as características citadas.

Nesta área do conhecimento utilizam-se técnicas muito difundidas para solução numérica de equações diferenciais ordinárias e parciais, dentre as quais podemos destacar: Método dos Elementos Finitos, o Método de Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Volumes Finitos. Patankar (1980) diz que o método de diferenças finitas pode ser definido como uma aproximação das derivadas por razões incrementais finitas calculadas sobre malhas espaço-temporal, utilizando séries de Taylor truncadas. Sua dedução é puramente matemática. O método dos volumes finitos é similar ao MDF, nele os valores são calculados em razões discretas em uma malha espacial que representa o domínio. A diferença, de acordo com Ferziger and Peric (2012), é que neste método

as equações diferenciais são integradas em volumes de controle que formam a malha computacional, o que resulta em uma formulação fisicamente conservativa. Em uma malha cartesiana, as discretizações de algumas equações via MDF ou MVF levam ao mesmo resultado.

No presente trabalho utiliza-se uma malha estruturada composta por blocos de diferentes níveis que acompanham a solução. A técnica utilizada é baseada no que foi proposto por Berger (1984) utiliza blocos de malhas retangulares, orientadas e organizadas de acordo com uma hierarquia de níveis de refinamento, devidamente aninhadas. Com a utilização desse método é possível diminuir o custo computacional de uma simulação, pois não é preciso refinar todo o domínio para capturar informações que necessitam do uso de malhas finas. O refinamento dinâmico bloco-estruturado utiliza esse método e identifica os locais nos quais são necessários o uso de menores espaçamentos. Isso possibilita a solução de vários escoamentos, nos quais a região que requer refinamento é móvel. Escoamentos multifásicos são exemplos de problemas que podem ser resolvidos com essa metodologia. Villar (2007) utiliza essa metodologia para avaliar escoamentos multifásicos bidimensionais e Pivello (2012) resolve problemas multifásicos tridimensionais com a mesma metodologia.

A proposta apresentada ao longo do texto faz o uso de uma técnica de remalhagem para que os pontos de interesse do domínio sejam resolvidos sempre por um bloco de malha refinada. Existem diversas estratégias de reconstrução de malha sobre um domínio conforme abordado por Brito (1998) e por outros autores. A técnica escolhida é chamada de Método de Redistribuição Nodal Estática (MRNE) que pode acontecer com redistribuição nodal ou com refinamento de malha sendo que, no caso tratado será utilizada o primeiro.

A resolução da equação da difusão unidimensional será resolvida em duas configurações de malha diferentes, porém ambas utilizam apenas dois níveis de refinamento, variando apenas o número de blocos presentes no domínio.

## 2 | PROBLEMA DE INTERESSE

O presente trabalho possui como objetivo uma abordagem puramente matemática de uma Equação Diferencial Parcial (EDP) parabólica unidimensional com termo fonte, a qual é apresentada abaixo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

Na Equação (1),  $U$  é a propriedade a ser transportada, esta propriedade é dependente do tempo  $t$  e da localização espacial  $x$  no domínio unidimensional. O parâmetro  $\alpha$  da EDP é uma constante que pode ser considerada como o coeficiente de difusividade, determinando a rapidez com que a propriedade se difunde no domínio,

por fim,  $f(x, t)$  é uma função chamada de termo fonte.

O termo fonte do problema de interesse é determinado com base em uma técnica de verificação computacional chamada método da solução manufaturada, a qual é apresentada na seção a seguir.

### 3 | MÉTODO DA SOLUÇÃO MANUFATURADA

O termo fonte da Eq. (1) faz parte de uma técnica de verificação de códigos computacionais chamado método da solução manufaturada ou *Method of Manufactured Solutions (MMS)*. Segundo Salari (2000) esse método é bastante robusto pois permite a identificação de qualquer erro no código que afete a taxa de convergência do método numérico.

A solução manufaturada  $U_e(x, t)$  utilizada no presente trabalho é dependente de  $x$  e  $t$  e se movimenta no domínio ao longo do tempo. Essa escolha foi realizada visando possibilitar a implementação de uma estratégia para a reconstrução da malha sobre o domínio, mantendo os blocos de malha mais refinados sobre os pontos mais críticos da função  $U$  e ao longo do tempo. A solução manufaturada escolhida para o presente trabalho é apresentada na Eq. (2), onde  $U_o$  corresponde a amplitude de  $U_e(x, t)$ ,  $L$  é o tamanho do domínio e  $c$  é a velocidade com a qual a função se movimenta.

$$U_e(x, t) = U_o \operatorname{sen} \left( \frac{2 \pi x}{L} - \frac{c \cdot t}{L} \right) \quad (2)$$

Para a obtenção do termo fonte  $f(x, t)$  parte-se da Eq. (1), realizando a substituição de  $U$  por  $U_e$ , como pode ser visto na Eq.(3):

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U_e}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (3)$$

Isolando o termo fonte  $f(x, t)$  na Eq. (3) tem-se:

$$f(x, t) = \frac{\partial U_e}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 U_e}{\partial x^2} \quad (4)$$

Calculando a primeira derivada de  $U_e(x, t)$  em relação a  $t$  e a segunda derivada em relação a  $x$  teremos, respectivamente:

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} = -\frac{c}{L} \cos \left( \frac{2 \pi x}{L} - \frac{c \cdot t}{L} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 U_e}{\partial x^2} = -\frac{4\pi^2}{L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{2 \pi x}{L} - \frac{c \cdot t}{L} \right) \quad (6)$$

Substituindo-se a Eq. (5) e a Eq. (6) na Eq. (4) chega-se a Eq. (7):

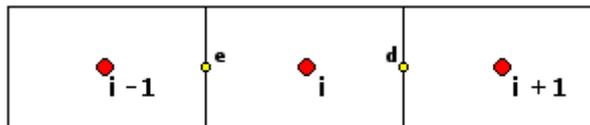
$$f(x, t) = -\frac{c}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{c \cdot t}{L}\right) + \alpha \left[ \frac{4\pi^2}{L^2} \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{c \cdot t}{L}\right) \right] \quad (7)$$

Definindo-se  $L = 2\pi[\text{m}]$ ,  $\alpha = L^2$ ,  $U_o = 1[\text{m/s}]$  e chamando  $c/L$  de  $b$  podemos reescrever a Eq. (7) como a forma final do termo fonte, que é apresentado na Eq. (8).

$$f(x, t) = -b \cos(x - bt) + 4\pi^2 \text{sen}(x - bt) \quad (8)$$

#### 4 I MÉTODO NUMÉRICO UTILIZADO

Para o desenvolvimento do trabalho foi utilizado o método dos volumes finitos com a formulação de diferenças centradas para avaliação dos fluxos. Utilizando a Eq. (1), faz-se a integral de superfície em um volume discreto, tanto o volume quanto os pontos utilizados nesse processo são ilustrados a seguir:



**Figura 1.** Representação dos pontos envolvidos na discretização.

Realizando a integração citada acima, tem-se:

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_e^d \frac{\partial U}{\partial t}}_I = \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_e^d \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}_{II} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_e^d f(x, t)}_{III} \quad (9)$$

É pertinente que se realize as seguintes observações a respeito dos termos I, II e III da Eq. (9):

- Termo I: a função integrada não é dependente de  $x$ ;
- Termo II: o parâmetro  $\alpha$  é constante e, portanto, pode ser colocado fora da integral. Além disso, a parte restante da função não é dependente de  $t$ ;
- Termo III: considera-se o termo forçante constante dentro do volume de controle no tempo  $t$ , com valor definido em  $t$  e em  $x_i$ , onde  $x_i$  é o valor de  $x$  no centro da célula. Isso faz com que o valor da integral apresentada nesse termo seja aproximada por  $\Delta x \Delta t f(x_i, t)^n$ . Essa aproximação se torna exata, quando  $\Delta x$  e  $\Delta t$  tendem a zero.

Após tais considerações podemos reescrever a Eq. (9) como:

$$(U^{n+1} - U^n) \Delta x = \alpha \Delta t \left( \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_d - \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_e \right)^n + \Delta x \Delta t f(x_i, t)^n \quad (10)$$

Fazendo uso da técnica de diferenças centradas nas derivadas parciais presentes na Eq. (10) tem-se:

$$(U^{n+1} - U^n)\Delta x = \alpha\Delta t \left( \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} - \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} \right)^n + \Delta x\Delta t f(x_i, t)^n \quad (11)$$

onde o índice superior corresponde ao instante de tempo no qual a informação é avaliada, sendo que  $n + 1$  corresponde a uma informação no tempo atual ( $t + \Delta t$ ) e  $n$  corresponde ao tempo precedente ( $t$ ). O índice inferior corresponde ao volume de controle no qual a função é avaliada, tomando como base a Fig. (1), além disso,  $\Delta x$  e  $\Delta t$  são, respectivamente, o passo espacial e o passo temporal.

Para que se obtenha a equação explícita os termos obtidos no tempo atual são colocados do lado esquerdo da igualdade. Readequando a Eq. (11) segue:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) + \Delta t f(x_i, t)^n \quad (12)$$

De posse da equação discretizada, antes de apresentar o critério de remalhagem e as interpolações utilizadas, são apresentadas as malhas utilizadas na obtenção dos resultados. Tal exposição é realizada na seção subsequente.

## 5 | MALHAS UTILIZADAS

A proposta do trabalho é posicionar blocos mais refinados de malha sobre os pontos de máxima derivada da função ao longo do domínio. A princípio a solução manufaturada  $U_e$  está posicionada no domínio de modo que os valores a serem captados, seguindo o critério proposto, estão posicionados no início, no meio e no final do domínio.

Quanto ao passo espacial de cada nível, tem-se que o passo espacial do nível mais grosso ( $k = 1$ ) deve ser definido pelo usuário e o passo espacial de um nível  $k + 1$  será calculado como sendo a metade do passo espacial do nível  $k$ , conforme mostrado na Eq. (13).

$$\Delta x(k + 1) = \frac{\Delta x(k)}{2} \quad (13)$$

Em uma primeira tentativa, visando captar o comportamento da solução numérica à não conformidade com os critérios de posicionamento da malha utilizou-se uma configuração de malha conforme mostra a Fig. (2). Nessa situação é usado somente um bloco do nível mais fino de malha, capturando somente o ponto de máxima derivada situado no meio do domínio.

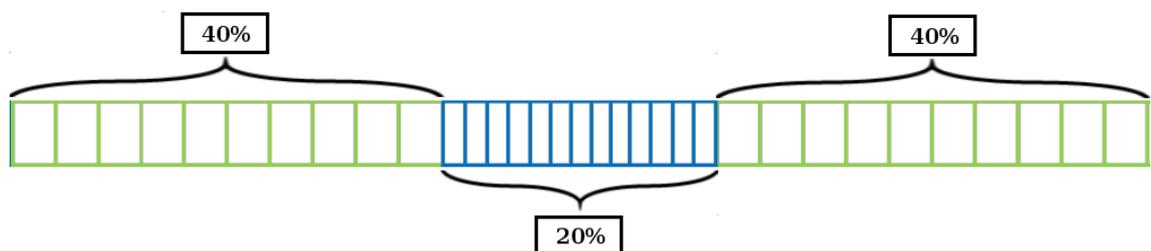


Figura 2. Configuração de malha 1: utilizando apenas um bloco de malha do nível mais fino.

A segunda configuração de malha utilizada no domínio atende ao critério preestabelecido, posicionando três blocos do nível mais fino, localizados exatamente no início, no meio e no final do domínio, locais de ocorrência dos valores de máxima derivada da função  $U_e$  no instante  $t_0$ . A malha em questão, bem como a proporção do domínio tomada por cada bloco são apresentadas na Fig. (3).

Ao longo do presente trabalho, por questão de facilidade, a malha apresentada na Fig. (2) será tratada por CM1 (configuração de malha 1), já a apresentada na Fig. (3) será referenciada por CM2 (configuração de malha 2). Além disso, é muito importante ressaltar que a malha utilizada não faz uso de sobreposição de níveis.

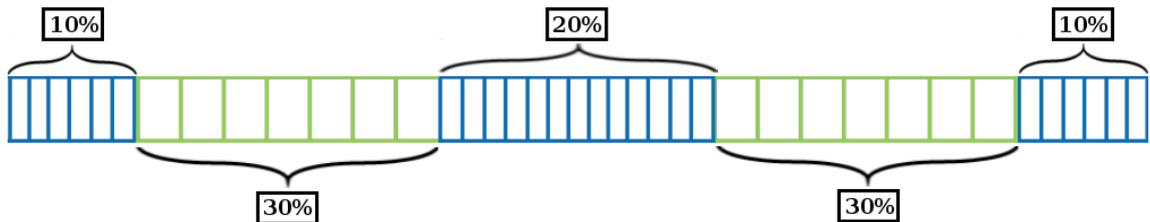


Figura 3. Configuração de malha 2: utilizando três blocos de malha do nível mais fino.

Na resolução do problema as fronteiras do domínio foram submetidas a condição de Dirichlet. De modo a possibilitar o processo de reconstrução da malha foi considerado que o valor analítico da função  $U_e$  é conhecido tanto na primeira quanto na última célula do domínio e não somente no ponto central de tais células.

## 6 | REMALHAGEM NO DOMÍNIO

Dentre as várias estratégias de remalhagem existentes optou-se por utilizar o Método de Redistribuição Nodal Estática com Redistribuição Nodal (MRNERN), que também pode ser classificado como *h-refinement* com número de pontos constante no domínio.

A estratégia trabalhada mantém o número de pontos constante no domínio e não precisa, necessariamente, trabalhar com uma equação governante da remalhagem, podendo simplesmente estabelecer um critério. Algumas características do MRNERN são listadas a seguir:

- Movimentação da malha em intervalos de tempo previamente fixados;
- Algoritmo de solução totalmente independente do algoritmo de remalhagem;
- Reconstrução da malha por meio de interpolações utilizando informações da configuração anterior;
- Reposicionamento dos nós no domínio, mantendo o número de nós cons-

tante;

O critério de remalhagem adotado é dependente do parâmetro  $p$ , que corresponde ao valor de  $c/L$ , e do passo de tempo. Em suma, a malha é reconstruída todas as vezes que um determinado ponto discreto da função desloca uma distância correspondente a  $\Delta x(1)$ . Obedecendo tal determinação os pontos de máxima derivada da função inicialmente envolvidos pelo nível fino não sairão do mesmo, partindo-se do pressuposto que o usuário coloque um número de células suficientes após o ponto crítico.

## 7 | INTERPOLAÇÕES

As interpolações são parte fundamental do método pois são responsáveis pela comunicação entre níveis de malha diferentes e também pela transferência de informações durante o processo de remalhagem.

No presente trabalho, utilizaram-se interpolações de terceiro grau em todos os casos nos quais existe a necessidade deste processo, para minimizar os erros, que são da ordem de  $\Delta x^n$ , onde  $n$  é a ordem do polinômio. Um polinômio de terceira ordem é suficiente para não influenciar nos erros inerentes ao MVF utilizado, pois a ordem do método de discretização espacial é 2, que implica em erros da ordem de  $\Delta x^2$ , e a ordem do método de discretização temporal é 1, implicando em erros da ordem de  $\Delta t$ . Como  $\Delta t$  é calculado pela equação  $\Delta t = CLF \cdot (\Delta x^2/\alpha)$ , o erro da discretização temporal também é da ordem de  $\Delta x^2$ . Para a determinação do polinômio interpolador no caso de comunicação entre níveis devem ser utilizados quatro pontos em torno da célula fantasma, sem levar em consideração outras células fantasmas que estejam na vizinhança. No processo de remalhagem são utilizados quatro pontos da malha anterior, conforme será melhor explicado posteriormente.

Todas as interpolações realizadas ao longo do processo de resolução utilizaram a formulação de Lagrange que pode ser encontrada em vários livros de cálculo numérico, como em Franco (2006). A interpolação de Lagrange utiliza, no caso da obtenção de um polinômio interpolador de terceiro grau, quatro pontos em torno da localização do domínio onde se deseja obter o valor da propriedade e o valor que a solução assume em tais pontos.

A opção por tal método se deu pela generalidade e flexibilidade frente as situações ocorrentes, mas apesar de tais características utilizou-se sempre dois nós precedentes e dois nós posteriores ao ponto em que se deseja conhecer o valor de determinada informação.

### 7.1 Comunicação entre níveis

Sempre que acontece a transição entre níveis a distância entre o último nó de um e o primeiro nó do outro não obedece ao passo espacial de nenhum dos dois, e

isso causa um grande problema já que o método de discretização utilizado exige a utilização de dois pontos igualmente espaçados em torno do ponto no qual se deseja obter o valor numérico da informação difundida. A solução utilizada para tal situação no presente trabalho foi a utilização de células fantasmas, ou seja, células que obedecem a exigência do método de diferenças finitas centradas mas que não fazem parte do domínio computacional e, dessa forma, não se sobrepõem as células existentes.

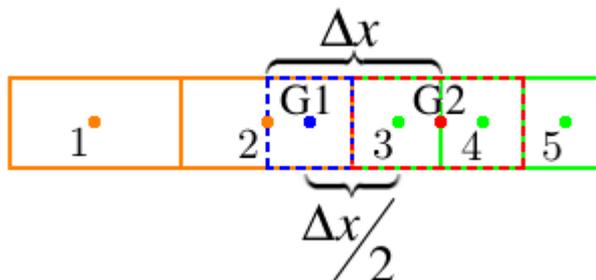


Figura 4. Células fantasmas utilizadas na comunicação entre níveis e os pontos envolvidos no cálculo das mesmas.

A Fig.4 mostra uma situação de comunicação entre níveis. Tomando como base os pontos mostrados tem-se que a distância entre os pontos 2 e 3 não é a mesma que ocorre entre os pontos 3 e 4, exigindo assim que se utilize uma célula ghost, no caso G1, para possibilitar a obtenção do valor da propriedade no nó 3. Para se obter o valor da informação em G1 são utilizadas as informações dos pontos 1, 2, 3 e 4 e, posteriormente, utiliza-se o valor de G1 para a realização do cálculo em questão. De maneira análoga, para a obtenção do valor no ponto 2 se faz necessária a utilização da célula fantasma G2, que é obtida por meio das informações dos pontos 2, 3, 4 e 5.

## 7.2 Remalhagem

O processo de remalhagem é uma parte importante já que necessita transferir informações de uma malha que estava sendo utilizada para uma outra configuração que foi gerada obedecendo ao critério imposto. Na Fig. (5) e na Fig. (6) são mostradas as situações de criação de uma célula grossa e de duas células finas na nova malha, respectivamente. Trata-se em ambas as figuras a situação (a) como a malha que estava sendo usada na resolução e (b) a malha atualizada.

Na Fig. (5) duas células finas (3 e 4) da malha (a) são fundidas originando uma célula grossa (3) na malha (b). Projetando o ponto 3(b) na malha (a) chega-se a conclusão de que, seguindo os critérios de interpolação expostos anteriormente, são usados os pontos 2, 3, 4 e 5 da malha (a) para se atualizar a informação no nó referido. Nas demais partes do domínio a informação de 1(a) é transferida para 1(b), bem como a de 2(a) para 2(b) e de 5(a) para 4(b). Em suma, quando os pontos possuem a mesma posição no domínio em ambas as configurações a informação pode ser transferida de forma direta, mas quando um ponto da nova malha não possui

posição correspondente na configuração anterior é necessário interpolar.

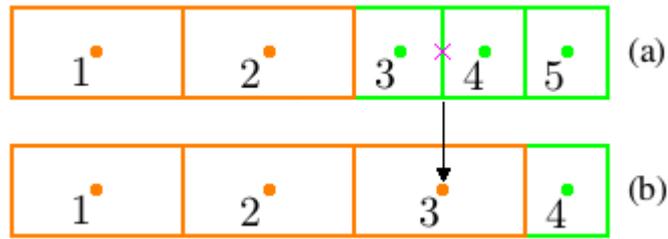


Figura 5. Atualização da malha com criação de célula grossa.

De forma análoga, quando existe a criação de pontos do nível mais fino, existem nós na nova malha que podem ter a informação transferida de maneira direta por possuírem a mesma posição de pontos da configuração anterior mas agora dois pontos necessitam ter o valor da função determinado via interpolação. Na Fig. (6) os pontos que podem ter a informação transferida de maneira direta na nova malha são 1, 2, 5 e 6, os pontos 3 e 4 devem ser determinados utilizando a técnica de Lagrange.

Partindo do pressuposto de se utilizar dois pontos precedentes e dois pontos subsequentes ao nó em que se deseja realizar a interpolação, para se determinar o valor da propriedade no ponto 3(b) é necessário que utilize-se os pontos 1, 2, 3 e 4 da malha (a). Já para se encontrar a informação do ponto 4(b) é necessário que se utilize os pontos 2, 3, 4 e 5 da malha (a).

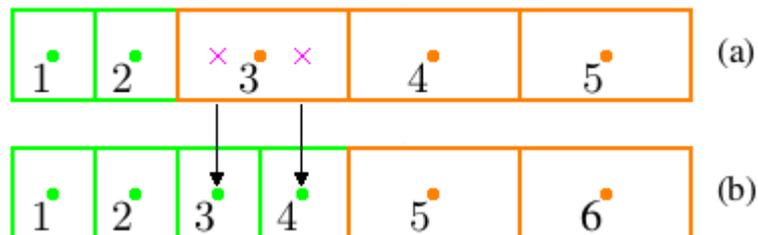


Figura 6. Atualização da malha com criação de células finas.

## 8 | VERIFICAÇÃO COMPUTACIONAL

A verificação computacional é uma etapa fundamental para a implementação da técnica numérica, pois através deste processo é possível verificar se a solução aproximada está com erros da ordem de discretização do método. No presente trabalho a ordem de precisão obtida é determinada utilizando-se um gráfico  $\log_2(\Delta x) \times \log_2(L_2)$  onde o cálculo da norma  $L_2$ , que é dado pela Eq. (14), sendo  $n$  o número de células no domínio,  $x_{num}$  é o valor obtido numericamente e  $x_{analtico}$  é o valor dado pela Eq. (2) no volume de controle  $i$ .

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{num} - x_{analtico})^2}{n}} \quad (14)$$

Logo após a determinação do valor da norma  $L_2$ , no instante  $t_f$  (tempo final), em malhas progressivamente refinadas sobre o domínio, é realizada uma regressão linear dos pontos no gráfico. O coeficiente angular da reta de ajuste ( $m$ ) irá fornecer a ordem de precisão do método. Na Fig. (7a), onde é apresentada a taxa de convergência para a CM1, pode-se observar que  $m = 2,00496$  e na Fig. (7b), a qual mostra o resultado da convergência para CM2, tem-se  $m = 1,99081$ , confirmando que, conforme pretendido, o método implementado é de ordem 2 para ambas as configurações de malha utilizadas.

Além da análise da ordem apresentada pelo método se faz importante a análise do comportamento de outra norma, a  $L_\infty$ , cujo valor é dado pela Eq. (15). Esta norma informa o maior valor de erro presente no domínio em dado instante de tempo, além de possibilitar junto ao código computacional determinar o ponto de ocorrência de tal valor.

$$L_\infty = |x_{num} - x_{analtico}| \quad (15)$$

A seguir é apresentado o comportamento da norma  $L_\infty$  para 4 configurações de malha, sendo as duas primeiras configurações compostas por malha uniforme com 100 nós na Fig. (8a) e 200 pontos na Fig. (8b). Os dois casos restantes fazem uso de malha adaptativa conforme CM1 (Fig. (8c)) e CM2 (Fig. (8d)). É importante ressaltar que todos os resultados apresentados são para  $t_f = 57[s]$  e  $b = 2,0[s^{-1}]$ .

A Figura (8a) apresenta a norma  $L_\infty$  para o caso em que se usa uma malha uniforme com 100 pontos, tendo-se um passo espacial  $\Delta x = 0,0628318$ . O gráfico da norma  $L_\infty$  mostrado na Fig. (8b) é também para uma situação de malha uniforme, porém utilizando 200 pontos sobre o domínio, levando a um passo espacial  $\Delta x = 0,0314159$ .

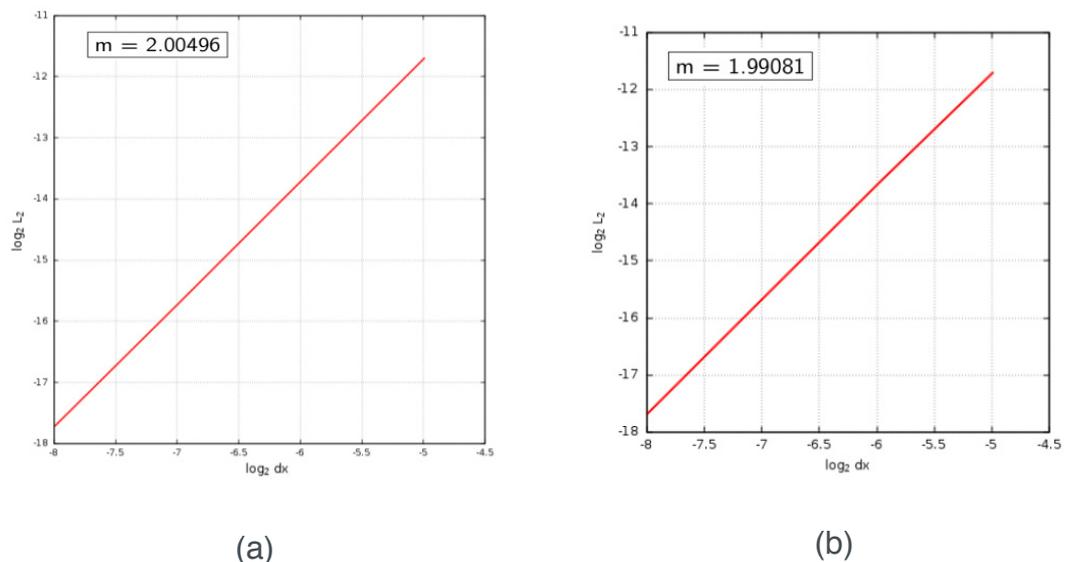


Figura 7. Gráfico da taxa de convergência para (a) CM1 e (b) CM2.

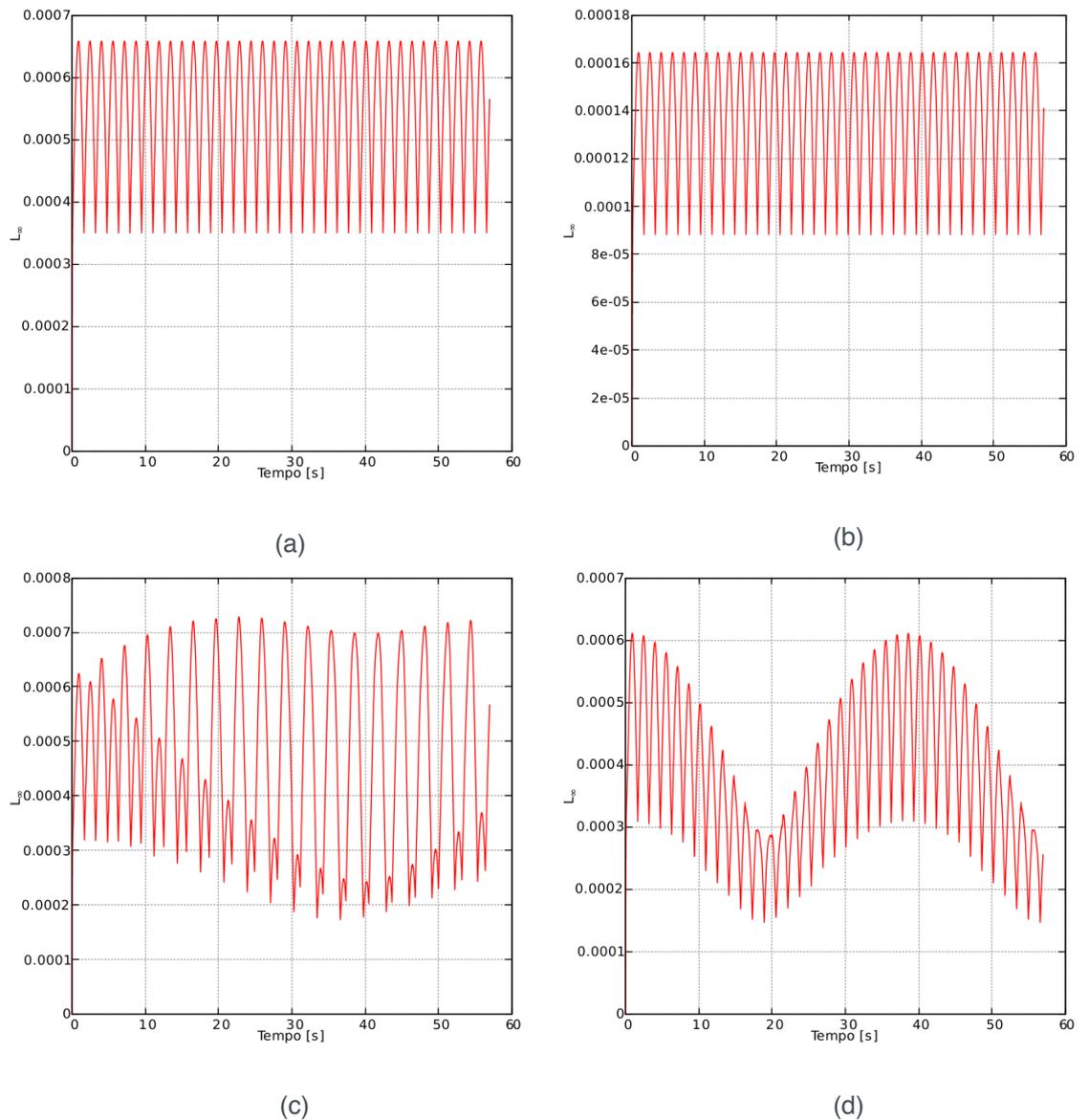


Figura 8. Gráfico da norma  $L_\infty$  para um domínio com malha uniforme de (a) 100 pontos, (b) 200 pontos e para os casos de (c) CM1 e (d) CM2.

A Fig. (8c) mostra a norma  $L_\infty$  para uma simulação fazendo uso da CM1, na qual cada bloco possui 40 pontos, levando a malhas com passos espaciais de  $\Delta x(1) = 0,0628318$  e  $\Delta x(2) = 0,0314159$  para os blocos de malha grossa e malha fina, respectivamente. Por fim, a Fig. (8d) mostra a norma  $L_\infty$  para uma simulação usando a CM2, na qual os blocos posicionados nos extremos do domínio possuem 20 pontos, os blocos de nível grosso 30 pontos e o bloco central de nível fino, 40 pontos. O espaçamento da malha no nível grosso e no nível fino são, respectivamente,  $\Delta x(1) = 0,0628318$  e  $\Delta x(2) = 0,0314159$  nessa situação.

Todos os resultados apresentados tanto para a norma  $L_\infty$  foram obtidos através da análise de todo o domínio, já para a norma  $L_2$  o cálculo foi realizado levando em conta somente os blocos de malha mais refinada.

## 9 | CONCLUSÃO

O presente trabalho tem como objetivo avaliar a utilização da malha adaptativa em um problema unidimensional de difusão, utilizando o método da solução manufaturada para avaliar o erro e a taxa de convergência do método. Como esperado, observou-se que não houveram ganhos de acurácia com o uso do método. O ganho em se utilizar a malha adaptativa pode ser notado no tempo computacional. Em problemas industriais onde o tempo para se realizar simulações computacionais e obter resultados é importante, o uso de malha adaptativa se apresenta como uma alternativa interessante.

## 10 | AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer à Petrobras, CAPES, FAPEMIG, CNPq, MFLab e à FEMEC/UFU pelo suporte no desenvolvimento do presente trabalho.

## REFERÊNCIAS

Berger, Marsha J e Olinger, J., 1984. **Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations**. Journal of computational Physics, Vol. 53, No. 3, pp. 484–512.

Brito, P.M.P.d., 1998. **Aplicação de métodos numéricos adaptativos na integração de sistemas algébrico-diferenciais caracterizados por frentes abruptas**.

Chapra, S.C. and Canale, R.P., 2009. **Métodos numéricos para engenharia**. AMGH Editora.

Ferziger, J.H. and Peric, M., 2012. **Computational methods for fluid dynamics**. Springer Science & Business Media.

Franco, N.B., 2006. **Cálculo numérico**. Pearson.

Patankar, S., 1980. **Numerical heat transfer and fluid flow**. CRC press.

Pivello, M.R., 2012. **Um método front-tracking completamente adaptativo para a simulação de escoamentos tridimensionais bifásicos**. Ph.D. thesis.

Salari, Kambiz e Knupp, P., 2000. **Code verification by the method of manufactured solutions**. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (US); Sandia National Labs., Livermore, CA (US).

Villar, M.M., 2007. **Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais**. Ph.D. thesis.

## **SOBRE OS ORGANIZADORES**

**Henrique Ajuz Holzmann** - Professor assistente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Graduação em Tecnologia em Fabricação Mecânica e Engenharia Mecânica pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Mestre em Engenharia de Produção pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Doutorando em Engenharia e Ciência dos Materiais pela Universidade Estadual de Ponta Grossa. Trabalha com os temas: Revestimentos resistentes a corrosão, Soldagem e Caracterização de revestimentos soldados.

**João Dallamuta** - Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Engenheiro de Telecomunicações pela UFPR. Especialista em Inteligência de Mercado pela FAE Business School. Mestre em Engenharia pela UEL. Trabalha com os temas: Inteligência de Mercado, Sistemas Eletrônicos e Gestão Institucional.

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-247-0

