CAPÍTULO 11

TRIGONOMETRIA COMPLEXA

https://doi.org/10.22533/at.ed.5791125280211

Data de aceite: 03/10/2025

Luiz Berber Costa

RESUMO: A trigonometria complexa, também conhecida como gonoiometria complexa, representa uma abordagem inovadora no estudo dos triângulos, ao introduzir os conceitos de vetorização e a utilização de números complexos. Esta pesquisa destaca as diferenças entre a trigonometria complexa e a trigonometria tradicional, oferecendo uma interpretação mais adequada para lados e ângulos. Essa abordagem melhora a análise geométrica e oferece vantagens comparativas significativas. As principais descobertas sobre a trigonometria complexa indicam que sua aplicação pode otimizar o entendimento dos triângulos, ao simplificar cálculos e proporcionar uma nova perspectiva através das funções circulares complexas. Os resultados revelam que a complexidade adicional pode ser convertida em uma ferramenta poderosa que facilita a resolução de problemas em diversas áreas da matemática, Geometria e Mecânica, potencializando a eficácia nas aplicações práticas. O propósito deste estudo é aprofundar o entendimento da trigonometria, abrindo novas possibilidades de aplicação e método de análise. Ao explorar a integração da trigonometria complexa em outras disciplinas, buscamos mostrar como esse conceito pode se tornar uma linguagem universal, permitindo uma comunicação mais clara e eficiente entre diferentes ramos do conhecimento científico. Sugerimos que novas pesquisas se concentrem na investigação da aplicação da trigonometria complexa em campos como a física e a engenharia, onde a modelagem e a análise de fenômenos complexos são essenciais. Além disso, o estudo da relação entre a trigonometria complexa e diferentes sistemas de coordenadas, bem como sua utilidade em simulações computacionais, abre um leque de oportunidades que vale a pena explorar. A continuação deste trabalho poderá reforçar a compreensão e a utilização da trigonometria complexa como uma ferramenta indispensável nas ciências exatas.

PALAVRAS-CHAVE: gonoiometria; vetorização; modelagem.

COMPLEX TRIGONOMETRY

ABSTRAT: Complex trigonometry, also known as complex gonoiometry, represents an innovative approach to the study of triangles by introducing the concepts of vectorization and the use of complex numbers. This research highlights the differences between complex trigonometry and traditional trigonometry, offering a more appropriate interpretation for sides and angles. This approach improves geometric analysis and offers significant comparative advantages. The main findings regarding complex trigonometry indicate that its application can optimize the understanding of triangles by simplifying calculations and providing a new perspective through complex circular functions. The results reveal that the additional complexity can be converted into a powerful tool that facilitates problem-solving in various areas of mathematics, geometry, and mechanics, enhancing the effectiveness of practical applications. The purpose of this study is to deepen the understanding of trigonometry, opening up new possibilities for application and analytical methods. By exploring the integration of complex trigonometry into other disciplines, we seek to demonstrate how this concept can become a universal language, enabling clearer and more efficient communication between different branches of scientific knowledge. We suggest that further research focus on investigating the application of complex trigonometry in fields such as physics and engineering, where modeling and analysis of complex phenomena are essential. Furthermore, studying the relationship between complex trigonometry and different coordinate systems, as well as its usefulness in computer simulations, opens up a range of opportunities worth exploring. Further work on this topic could strengthen the understanding and use of complex trigonometry as an indispensable tool in the exact sciences.

KEYWORDS: gonoiometry; vectorization; modeling.

INTRODUÇÃO

A gonoiometria complexa é a gonoiometria dos sentidos, pois, ao considerar os lados e os ângulos de um triângulo, devemos dar-lhes o sentido adequado. Isto, torna o seu uso um pouco menos fácil, faz com que sua aplicação seja muito mais proveitosa, pois acrescenta uma dimensão a gonoiometria.

Precisando mais , diremos que a genoiometria complexa é a sua vetorialização da gonoiometria. Os lados de um triângulo podem ser expressos como números complexos, enquanto os ângulos correspondem a funções complexas, especificamente as funções circulares complexas. Lendo o estudo, o leitor verá como funciona a gonoiometria complexa, mas desta terá uma pálida ideia.

Para poder apreciar, em toda sua extensão, a sua exuberante força ser-lhe-á necessário conhecer as suas aplicações às outras ciências, especialmente a geometria e a mecânica. Por outro lado, para tornar as suas aplicações mais fáceis e mais eficientes será necessário estender a vetorialização a essas outras ciências. Somente, então, falando uma linguagem aperfeiçoada e única os – complexos – veremos o conjunto funcionar como um todo, onde a harmonia e a beleza se entrelaçam.

DESENVOLVIMENTO

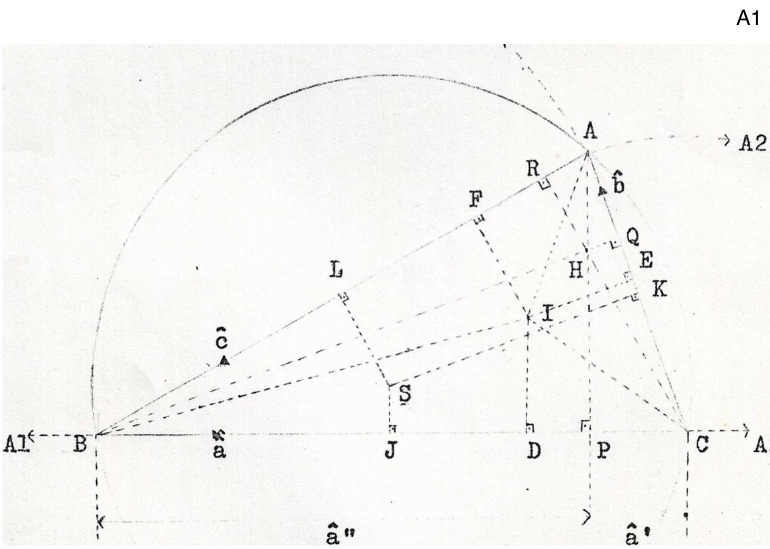
- Relações entre os elementos de um triângulo

Seja o triângulo ABC (Fig.1) , de orientação positiva (1) que tem:

S (ponto de encontro das 3 mediatrizes JS, KS, LS) para centro do círculo circunscrito;;

I (ponto de encontro das 3 bissetrizes IA, IB, IC) para centro do círculo inscrito;

H (ponto de encontro das 3 alturas AP, BQ, CR) para ortocentro.



(1): Um polígono é de orientação positiva quando percorrendo o seu perímetro, realizamos.um movimento no sentido contrário ao dos ponteiros de un relógio. Se o sentido for contrário, ele será de orientação negativa.

Então:

I) $\hat{a} = BC = C - B = |\hat{a}|.\ \hat{a}1 = a.\ \hat{a}1$

$\hat{b} = CA = A - C = |\hat{b}|.\ \hat{b}1 = b.\ \hat{b}1$

$\hat{c} = AB = B - A = |\hat{c}|.\ \hat{c}1 = c.\ \hat{c}1$

II) $a + b + c = 2p$

III) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$

IV) $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 0\ [\hat{a}]$

V) $\hat{a}1.\overline{a1} = \hat{b}1.\overline{b1} = \hat{c}1.\overline{c1} = 1$;

VI) $\hat{a}1 = -\ \hat{b}1.$ cis C;

$\hat{b}1 = -\ \hat{c}1.$ cis A;

$\hat{c}1 = -\ \hat{a}1.$ cis B, pois, rotando o vetor $-b1$, contrário ao versor de $\hat{b}$, em torno do vértice c, do ângulo $\hat{c}$, / obteremos o versor $\hat{a}1$; etc.

- Lei do Seno Complexo:

Nos triângulos APB e APC, temos: $AP = BA.\ sen(-B) = CA.sen\ C$ $\therefore$ $AP = -\ \hat{c}.\ sen\ (-B) = \hat{b}.\ sen\ C$ $\therefore$ $\dfrac{\hat{b}}{sen(-B)} = \dfrac{-\hat{c}}{senC}$

Procedendo analogamente com os outros dois pares de triângulos, ou, melhor, permutando circularmente as 3 letras, chegaríamos a:

1 $\Big[$ $\hat{a}$: sen $(-A) = -\hat{b}$: sen B , $\hat{b}$: sen $(-B) = -\hat{c}$: sen c , $\hat{c}$: sen $(-C) = -\hat{a}$: sen (A) (S), que é a lei do seno. Os senos dos ângulos são proporcionais aos lados opostos. Podemos concluir, como regra prática o seguinte:

1 - Lados: Os dois lados considerados em cada proporção são ambos convergentes ou divergentes, isto é, tem sinais contrários um o sinal (+) outro o sinal (-)

2 - Ângulos: o sentido de cada ângulo é o de cada um dos dois lados considerados.

- Lei da Tangente Complexa: De (1) tiramos empregando uma propiedade das proporcões o seguinte :

$\hat{a}$: sen $(-A) = -\ \hat{b}$ Cis C : sen B.Cis C

$[\hat{a} + \hat{b}.CisC]$: $[sen(-A) - Sen\ B.\ Cis\ C]$

$[\hat{a} - \hat{b}\ CisC]$: $[sen(-A) + Sen\ B.\ Cis\ C]$

Mas: Cis C = Cis(180° − A − B) = − Cis (−A−B)

obs. Cis S = Cos S − i.sen S

$(\hat{a} + \hat{b}.\text{cis}C) : (\hat{a} - \hat{b}\text{Cis}C) =$

$[\text{sen}(-A) + \text{sen}B.\text{Cis}(-A-B)] : [\text{sen}(-A) - \text{sen}B.\text{Cis}(-A-B)]$

$(\bar{a} + \hat{b}.\text{Cis } C) : (\bar{a} - \hat{b}.\text{Cis } C) =$

$\text{Tan } [(-A + B) : 2] : \text{Tan } [(-A-B) : 2] =$

$(\hat{a} - \hat{b}.\text{Cis } C) : (\hat{a} + \hat{b}.\text{ Cis } C)$

$\text{Tan } [(A + B) : 2] : \text{Tan } [(A-B) : 2]$

Por permutacão das 3 letras, chegaríamos a :

$$\left[\begin{array}{l} (\hat{a} - \hat{b}.\text{Cis}C) : (\hat{a} + \hat{b}.\text{Cis}C) = \text{Tan}[(A + B):2 : \text{Tan } (\frac{A-B}{2})] \\ (\hat{b} - \hat{c}.\text{Cis}A) : (\hat{b} + \hat{c}.\text{Cis}A) = \text{Tan}[(B + C):2 : \text{Tan } (\frac{B-C}{2})] \\ (\hat{c} - \hat{a}\ \text{Cis}B) : (\hat{c} + \hat{a}.\text{Cis}B) = \text{Tan}[(C + A):2 : \text{Tan } (\frac{C-A}{2})] \end{array}\right. \quad 2$$

que é a Lei da Tangente.

- Lei do cosseno Complexo:

De $[\hat{a}]$ tiramos :

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 0 \therefore - \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} \quad - \hat{c} = \hat{a} + \hat{b}$

$\hat{c}.\bar{c} = (\hat{a} + \hat{b}).(\bar{a} + \bar{b}) =$

$\hat{a}.\bar{a} + \hat{b}.\bar{b} + \hat{a}.\bar{b} + \hat{b}.\bar{a}$

Mas (Nº 1; $\underline{V}$, $\underline{VI}$) : $\hat{a}.\bar{b} + \bar{b}.\hat{a} = ab(\hat{a}:\bar{a} - \hat{b}:\bar{b}) =$

$\hat{a}.\bar{b}\ (\hat{a}1^2 + \hat{b}1^2)$, $\hat{a}1 = - \hat{b}1.\ \text{Cis } C \therefore$

$\hat{a}1^2 = \hat{b}1^2 . \text{Cis } 2C$, logo: $\bar{a}b + ba = \bar{a}.\bar{b}.b1^2(1+\text{Cis}2c)$

$2.\bar{a}.\hat{b}.$ Cos C. Esta expressão, por ser real, é igual a sua conjugada, isto é : $2\ \bar{a}.\hat{b}.\text{Cos } C = 2\ \hat{a}.\bar{b}.\ \text{Cos } (-C)$.

Portanto: $\hat{c}.\bar{c} = \hat{a}.\bar{a} + \hat{b}.\bar{b} + 2\ \bar{a}.\hat{b}.\text{Cos } C$. Por permutacão circular das 3 letras chegaríamos à lei do Cosseno:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{a}.\bar{a} = \hat{b}.\bar{b} + \hat{c}.\bar{c} + 2.\bar{b}.\hat{c}.\text{Cos } A \\ \hat{b}.\bar{b} = \hat{c}.\bar{c} + \hat{a}.\bar{a} - 2.\bar{c}.\hat{a}.\text{Cos } B \\ \hat{c}.\bar{c} = \hat{a}.\bar{a} - \hat{b}.\bar{b} - 2.\bar{a}.\hat{b}.\text{Cos } C \end{array}\right] \quad 3$$

obs: Se o triângulo for retângulo $A = 90°$, $\text{Cos } A = 0$

$\hat{a}.\bar{a} = \hat{b}.\bar{b} - \hat{c}.\bar{c}$

Variante: O ângulo de $\hat{a}1$ e $\hat{b}1$ que é o ângulo de $\hat{a}$ e $\hat{b}$, é de $180° - C \therefore -\text{arg}.\hat{a}1 + \text{arg}.\ \hat{b}1 = 180° - C$, como temos que: $\text{arg}.\ a1^2 = 2.\text{arg}.\ \hat{a}1$, $\text{arg}.\ b1^2 = 2\text{arg}.\hat{b}1$, concluimos que $\text{arg } b1^2 - \text{arg } a1^2 = 2(\ 180° - C)$

Logo aplicando o teorema: "Os dois lados Z1 e Z2 de mu losango qualquer estão ligados pelas relações:

$Z1 = r1.\ Cis.2\ S1$

$Z2 = r2.\ Cis.2\ S2$

a) $Z2 + Z1 = 2\ Z1.\ Cos(S2 - S1)$

b) $Z2 - Z1 = 2\ Z1.\ Sen(S2 - S1)$ desde que:

$0 < S2 - S1 < \pi : 2$.

Teremos: $\hat{a}1^2 + \hat{B}1^2 = 2\ \hat{a}1^2.\ Cos\ (180^o - C) = 2\hat{a}1^2.Cos(-C)$

$\hat{a}.\hat{b} - \hat{b}.\overline{a} = \overline{a}.\overline{b}\ (al^2 + bl^2) = 2.\overline{a}.b.\overline{\hat{a}1}^2.\ Cos\ (-C) =$

$= 2.\hat{a}.\overline{b}.Cos\ (-C) = 2.\overline{a}.\ \hat{b}.\ Cos\ C$, pois $\overline{a}.\ \hat{a}1^2 = a.\overline{a1}.\hat{a}1^2$

$= a.\overline{\hat{a}1} = \hat{a}$

– <u>Lei das projeções complexas:</u>

Sejam $\hat{a}' = CP$ e $\hat{a}'' = PB$ as projeções ortogonais de $\hat{b}$ e $\hat{c}$ sobre $-\hat{a}$. Temos $\hat{a} + \hat{a}' + \hat{a}'' = 0$, como $Cos\ B = -\hat{c} : \hat{a}$ nos triângulos APC e APB vem : $CP = \hat{a}' = CA.Cos\ C = \hat{b}.\ Cos\ C$, $BP = -\hat{a}'' = BA.\ Cos\ (-B) = -C.\ Cos\ (-B)\ \therefore\ \hat{a} + b.CosC + \hat{c}cos(-B) = 0$.

Permutando circularmente as 3 letras , chegaríamos à lei das projeções:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{a} + \hat{b}.Cos\ C + \hat{c}\ .\ Cos\ (-B) = 0 \\ \hat{b} + \hat{c}.Cos\ A + \hat{a}.\ \ Cos\ (-C) = 0 \\ \hat{c} + \hat{a}.Cos\ B + \hat{b}.\ \ Cos\ (-A) = 0 \end{array}\right] \quad 4$$

– <u>Formula do ângulo metade</u> :

De (3) tiramos:

$Cos\ A = (\hat{a}.\overline{a} - \hat{b}.\overline{b} - \hat{c}.\overline{c}) : 2\ .\ \overline{\hat{b}}.\ \hat{c}$, logo:

$2.\ Cos^2\ (A:2) = Cos\ A - Cis\ A =$

$= [\ \hat{a}.\overline{a} - (\ \hat{b}.\overline{b} + \hat{c}.\overline{c} - 2.\ \overline{b}.\hat{c}.\ Cis\ A)]\ : 2.\overline{b}.\hat{c}$, mas

$-2b.\hat{c}.\ Cis\ A = -\ 2bc.Cis(180^o - A).Cis\ A = 2.b.c$

$2.Cos^2\ (\ A:2) = [(\ b^2 - c^2 - 2bc\ ) - a^2\ ].\ Cis\ A : 2bc$

ora: $a + b + c = 2p\ \therefore\ (b+c)^2 - a^2 = (a+b+c)(b+c-a) =$

$= 4p(p-a)$.

$Cos\ (\ A:\ 2\ ) = Cis\ (\ A:2)\sqrt{p(p-a):bc} \qquad (3.1)$

Procedendo analogamente, mas usando:

$sen\ (A:2) = i.\ Cis\ (A:2).\ \sqrt{(p-b)(p-c):bc}$ (3.2)

Dividindo (3.2) por (3.1), teríamos:

$Tan\ (A:2) = i.\sqrt{(p-b)(p-c):p(p-a)}$ (3.3), e ainda multiplicando os dois termos da fracão do radicando de (3.3) por (p-a), obteríamos:

$Tan\ (A:2) = i.r:(p-a)$ (3.3') onde r é o raio do círculo inscrito no triângulo ABC: $r=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c):p}$

Perímetros Complexos:

Com centro em B (fig.1) e raio = C, descrevamos um arco circular, que leve A para A1, sobre o prolongamento esquerdo da base BC. Do mesmo modo com centro em C e raio = b descrevamos um arco circular que leve A para A2, sobre o prolongamento direito da base BC. Teremos então :

$A1.A2 = A1.B - BC - C.A2 = - BA.Cis\ (180^o - B) + BC + CA.Cis\ [-(180^o - C)] = \hat{c}\ [-Cis(-B)] + \hat{a} + \hat{b}.(-CisC) = \hat{a} - \hat{b}.CisC - \hat{c}.Cis(-B) = 2\hat{p}.a$

$2\hat{p}.a$ = perímetro complexo relativo a $\hat{a}$ igual a:

$a.\hat{a}1 - b.\hat{b}1.Cis\ C - c\ .\ \hat{c}1.Cis(-B) = \hat{a}1(a+b+c)=2p\hat{a}1.$

Analogamente, por permutacão circular, obteríamos :

$2\hat{p}b$ = perímetro complexo relativo a $\hat{b}$ igual a :

$\hat{b} - \hat{c}.Cis\ A - \hat{a}.Cis\ (-C) = b.\hat{b}1 - c.\ \hat{c}1.CisA - a.\hat{a}1\ .\ Cis\ (-C) = \hat{b}1\ (b + c + a) = 2.p.b1$

perímetro complexo relativo a $\hat{c}$: $(2\hat{p}c)$

$\hat{c} = \hat{c} - \hat{a}.CisB - \hat{b}.Cis\ (-A) = c.c\hat{1} - a.\hat{a}1.CisB - b.\hat{b}1.Cis(-A) = \hat{c}1\ (\hat{c} + \hat{a} + \hat{b}) = 2p.\hat{c}1.$

E também $\hat{p}a - \hat{a} = \hat{p}a1 - a.\hat{a}1 = (p-a).\hat{a}1$, $\hat{p}b - \hat{b} - p\hat{b}1 - b.\hat{b}1 = (p-b).\hat{b}1$, $\hat{p}c - \hat{c} = p.\hat{c}1 - c.\hat{c}1 = (p-c).\hat{c}1$.

<u>Raios Complexos do círculo inscrito</u> :

Os vetores $\overline{ID} = \hat{r}a$, $\overline{IE} = \hat{r}b$, e $\overline{IF} = \hat{r}c$ (fig. 1) são os raios complexos do círculo inscrito no triângulo ABC e relativos aos lados $\hat{a}, \hat{b}$, e $\hat{c}$. Como os seus versores são respectivamente : $-i\hat{a}1$; $-i\hat{b}1$ e $-i\hat{c}1$, teremos chamando r o seu módulo: $\hat{r}a = - r.i.\hat{a}1$, $\hat{r}b = -r.i.\hat{b}1$; $\hat{r}c = -r.i.\hat{c}1$, como o ângulo entre os dois perímetros complexos $2\ \hat{p}a$ e $2\ \hat{p}b$ é o ângulo entre os seus versores $\hat{a}1$ e $\hat{b}1$ e vale $180^o - C$, sendo tam bém este o ângulo entre os dois raios inscritos complexos $\hat{r}a$ e $\hat{r}b$, concluimos que entre os perímetros complexos, bem como entre os raios inscritos complexos existem as relacões rotacionais já constatadas entre os versores dos lados (Nº 1, VI) que é:

$\hat{p}a = -\hat{p}b.\ \mathrm{Cis}\ C$; $\hat{p}b = -\hat{p}c.\ \mathrm{Cis}\ A$

$\hat{p}c = -\hat{p}a.\ \mathrm{Cis}\ B$; $\hat{r}a = -\hat{r}b.\ \mathrm{Cis}\ C$

$\hat{r}b = -\hat{r}c.\ \mathrm{Cis}\ A$; $\hat{r}c = -\hat{r}a.\ \mathrm{Cis}\ B.$

A introducão do fator $\hat{a}1$ nos dois termos da fracão de (3.3') levá-nos, pois, a :

$\mathrm{Tan}\ (\ A:2\ ) = \hat{r}a : (\hat{p}a - \hat{a})$ (5)

Controle: A aplicacão da soma de dois ângulos ao triângulo AIF da fig. 1 dá-nos :

$IF = \hat{r}c = AF.\ \tan\ (\ -A:\ 2)$. Ora, da sonsideracão dos 3 pares de tangentes iguais ao círculo I, tiramos ;

$|AF| - |BD| - |DC| = p$

$AF = (p-a).\hat{c}1 = -(p-a).\hat{a}1.\mathrm{Cis}\ B = -(\hat{p}a-\hat{a}).\mathrm{Cis}\ B \therefore$

$\mathrm{Tan}(-A:2) = -\hat{r}c.\mathrm{Cis}(-B):\ (\hat{p}a-\hat{a}) = \hat{r}a:\ (\hat{p}a - \hat{a}).$

OBS.: As fórmulas (3.1,3.2,3.3,3.3' e 5) em número de 5 devemos juntar outras 10, provenientes da permutacão circular das 3 letras.

- <u>Relacões entre as funcões circulares complexas e as funcões circulares</u> :

Vimos que os 2 lados $z1 = r1.\ \mathrm{Cis}2S1$ e $z2=r2.\mathrm{Cis}2S2$ de um losango qualquer estão ligados pelas relacões :

a) $z2 + z1 = 2.z1.\ \mathrm{Cos}\ (\ S2 - S1\ )$

b) $z2 - z1 = 2.z1.\ \mathrm{Sen}\ (\ S2 - S1\ )$ desde que :

$0 < S2 - S1 < \pi:2$

a) $\mathrm{Cis}\ 2S + 1 = 2\ \mathrm{Cos}\ S$

b) $\mathrm{Cis}\ 2S - 1 = 2\ \mathrm{Sen}\ S$

a') $\mathrm{Cos}\ S = (\ \mathrm{Cis}.\ 2S + 1):\ 2$

b') $\mathrm{Sen}\ S = (\ \mathrm{Cis}.\ 2S - 1):2$

Logo: $\mathrm{Cos}\ S = \{[\mathrm{Ciss} + \mathrm{Cis}(-S)]\ .\ \mathrm{CisS}\}\ :\ 2$

$\mathrm{Sen}\ S = \{[\mathrm{Ciss} - \mathrm{Cis}(-S)]\ .\ \mathrm{CisS}\}\ :\ 2$

Cos S = Cos S. Cis S (6); Sen S = i.sen S. Cis S(7)

usando: Tan S = Sen S : Cos S

Cot (− S) = Cos S : Sen S

Cos S. Sec (−S) = 1

Sen S. Csc (−S) = 1

teríamos : Tan S = i.tan S (8)

Cot S = i.Tan S (9)

Sec S = Sec S . Cis S (10)

Csc S = i. Csc S. Cis S (11)

Aplicações :

I) Sob a forma de valores numéricos temos:

Forma cartesiana

	0	π:4	π:2	3 π:4	π
Cos	1	(1−i):2	0	(1−i):2	1
Sen	0	(−1−i)÷2	−1	(−1−i):2	0
Tan	0	i	∞ i	−i	0
Cot	∞ i	i	0	−i	∞ i
Sec	1	1 + i	∞ i	1 − i	1
Csc	∞ i	−1 + i	−1	−1 − i	∞ i

Forma Polar

	π: 4	3 π:4
Cos	($\sqrt{2}$:2)Cisπ:4	($\sqrt{2}$:2)Cis−π:4
Sen	($\sqrt{2}$:2)iCisπ:4	−($\sqrt{2}$:2)iCis−π4
	NB− Cis S = Cos S −iSen S	

II) A identificacão de (6) com (3.1) de (7) com (3.2) e de (8) com (3.3'), leva-nos a : Cos (A:2) = p(p−a):bc(31) sen(A:2)= (p−b)(p−c) : bc (3.2'), Tan(A:2)= r: (p−a) (3.3")

III)Lei do Seno : Da (1) tiramos:

$\hat{a} = -\hat{b}$ = sen (−A): sen B ∴ a.â1:(−b.$\hat{b}$1)=isen(−A) :

i.sen B. Cis B ∴ a:b = ($\hat{b}$1:â1).Cis(−A−B)$\left(\frac{\text{sen A}}{\text{sen B}}\right)$

($\hat{b}$1:â1)Cis(C−188).senA:senB (1') − Lei do Seno

IV) Lei da Tangente, temos:

$\hat{a} \pm \hat{b}.\text{Cis}\ C = a.\hat{a}1 \pm b.\hat{b}1.\text{Cis}\ C = a.\hat{a}1 = b.\hat{a}1 \pm (a \pm b).\hat{a}1$

$(\hat{a} + \hat{b}.\text{Cis}\ C) : (\hat{a} - \hat{b}.\text{Cis}\ C) = (a - b) : (a + b).$

substituindo em (2), a 1ª fracão pelo seu valor e, na segunda, a tangente e a cotangente complexas pelas tangente e cotangente, chegamos a lei da tangente :

$(a + b) : (a - b) = \tan\,[(A+B) : 2] : \tan\,[(A-B) : 2]$ (2')

OBS.: No cálculo prático dos ângulos, quando, então, teremos de recorrer as tábuas trigonométricas, construidas para as funcões circulares, usaremos: (3.2'), (3.1'), (3.3") em lugar de (3.1), (3.2), (3.3') e também (1') em vez de (1) e (2') em lugar de (2), substituiremos aquelas formulas pelas suas versões modulares.

Resolucão de triângulos retângulos :

São quatro os casos:

1º Caso: Dados a hipotenusa $\hat{a}$ e o ângulo $\hat{B}$ (fig. 2).

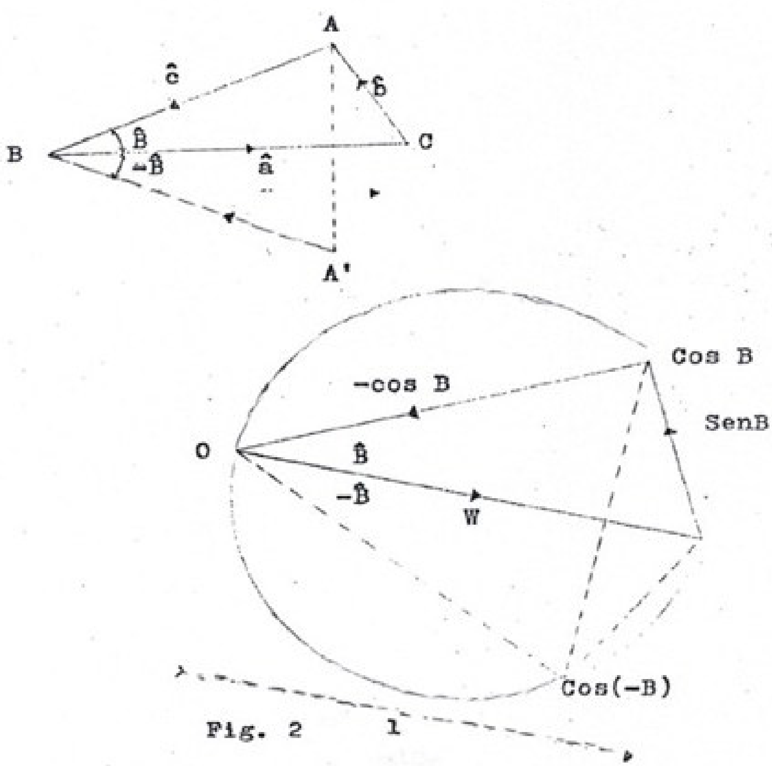


Fig. 2

$\hat{A} = 90^o$

$\hat{C} = 90^o - \hat{B}$

$\ddot{B}A = BC.$ Cos B $\therefore$ $\hat{c} = -a.CosB$

CA = BC. Sen B $\therefore$ $\hat{b} = \hat{a}.$ Sen B

Controle: $\hat{b} + \hat{c} = \hat{a}(\text{Sen B} - \text{Cos B}) = -\hat{a}$

Área: A área complexa é:

$\hat{S} = i.s$, sendo S a área da triângulo ABC. Temos :

$2\hat{s} = \hat{c}\bar{b}$, pois, de arg $\hat{c}$ - arg $\hat{b} = 90^o$ tiramos 2S=bc

substituindo, vem: $2\hat{s} = -\hat{a}.CosB.\bar{a}.Sen(-B)$, logo:

$2\hat{s} = a^2.$ senB.CosB.Cis(-2B), $4\hat{s} = a^2$. sen 2B.Cis(-2B)

$4\hat{s} = i.a^2$.sen 2B .

<u>2º Caso</u>: Dados o cateto $\hat{b}$ e o ângulo $\hat{B}$.

Sol. C= 90 - B

BA = CA. cot(-B) $\hat{c} = \hat{b}$.Cot B, $\hat{a} = \hat{b}$.Csc(-B).

BC = CA. Csc(-B)

Controle: $\hat{c} + \hat{a} = \hat{b}$

Csc(-B) - Cotg(-B) $= -\hat{b}$

Área: $2\hat{s} = \hat{c}b = \bar{b}.\hat{b}$.cot.B

$2\hat{s} = b^2$.CotgB

<u>3º Caso</u>: Dados a hipotenusa $\hat{a}$ e o cateto $\hat{c}$.

sol.

$\hat{b} = -\hat{a} - \hat{c}$

Cos B $= -\hat{c} : \hat{a}$, Cos $(-C) = -\hat{b} : \hat{a}$

Controle: $B + C = 90^o$

Área: $2\hat{s} = \hat{c}.\bar{b}$

$2\hat{s} = -\hat{c}(\bar{a} + \bar{c})$

<u>4º Caso</u>: Dados os 2 catetos $\hat{b}$ e $\hat{c}$.

Sol. $\hat{a} = -\hat{b} - \hat{c}$, tang.B $= -\hat{b} : \hat{c}$

tan(-c) $= -\hat{c} : \hat{b}$ tan$\hat{c} = \hat{c} : \hat{b}$

controle: $\hat{B} + \hat{C} = 90^o$

Área : $2\hat{s} = \hat{c}.\bar{b}$

Exemplos:

1º Caso: $\hat{a} = -(4\sqrt{3} : 3.\ \text{Cis}\ (-30^o)\ ;\ \hat{B} = 30^o$

sol: $\hat{c} = 90^o - \hat{B} = 90^o - 30^o = 60^o\ ;\ \hat{c} = -\ \hat{a}.\text{CosB}$

$(4\sqrt{3} : 3).\text{Cis}(-30^o).\ \text{Cos}\ 30^o = \hat{c}$

$\hat{c} = (\ 4\sqrt{3} : 3)(\sqrt{3} : 2\ )\ .\dot{.}.\quad \hat{c} = 2;\ \hat{b} = \hat{a}.\text{senB}$

$\hat{b} = -\ (4\sqrt{3} : 3).\ \text{Cis}(-30^o).\ (\ i:2).\text{Cis}30^o$

$\hat{b} = -\ (2\sqrt{3} : 3)i$

Área: $4\hat{s} = (16:3)i.\text{sen}60^o = (16:3)(\sqrt{3} : 2)i$

$\hat{s} = 2i\sqrt{3} : 3$

2º Caso: Dados $\hat{c} = 2,\ \hat{b} = 30^o$

sol. $\hat{c} = 90^o - \hat{B} = 90 - 30 = 60,\ \hat{b} = -\hat{c}.\text{tanB}$

$\hat{b} = -2i\sqrt{3} : 3,\ \hat{a} = -\ \hat{c}.\text{sec}(-B)\ .\dot{.}.\ \ \hat{a} = -2 : \cos 30^o$
$= -2:[(\sqrt{3} : 2).\text{Cis}\ 30^o\ .\dot{.}.\quad \hat{a} = (-4\sqrt{3} : 3)\ \text{Cis}\ (-30^o)$

Área: $2\hat{s} = \hat{c}.\bar{b} = \hat{c}.\ \bar{c}.\text{tang B} = c^2.\ \text{tanB}$

$2\hat{s} = 4.i.\sqrt{3} : 3\quad .\dot{.}.\quad \hat{s} = 2i.\sqrt{3} : 3$

3º Caso: Dados : $\hat{a} = -(4\sqrt{3} : 3)\ \text{cis}\ (-30^o),\ \hat{c} = 2.$

sol: $\hat{b} = -\hat{a} - \hat{c} = (4\sqrt{3} : 3).\text{Cis}(-30^o) - 2 =$

$= (\ 4.\sqrt{3} : 3\ ).\sqrt{3} : 2 - i:2) - 2\ .\dot{.}.$

$\hat{b} = -(2.\sqrt{3} : 3)i,$

$\text{Cos B} = -\hat{c} : \hat{a} = -2 : (\ -4.\sqrt{3} : 3)\text{Cis}(-30^o) =$

$= (\sqrt{3} : 2)\ \text{Cis}\ 30^o.\dot{.}.\quad \hat{B} = 30^o,\ \hat{A} = 90^o - 30^o, \hat{A} = 60^o$

Área: $2\hat{s} = \hat{c}.\bar{b} = 2(2.3:\sqrt{3})i\ .\dot{.}.\quad \hat{s} = (2.\sqrt{3} : 3)i.$

4º Caso: Dados $\hat{b} = -2i(\sqrt{3} : 3),\ \hat{c} = 2$

sol: $\hat{a} = -\hat{b} - \hat{c}\ .\dot{.}.\quad \hat{a} = -2 + 2i(\sqrt{3} : 3),\ \text{tanB} = -\hat{b}:\hat{c} =$

$i\sqrt{3} : 3 = \tan 30^o.\dot{.}.\quad \hat{B} = 30^o,\ \tan c = \hat{c}:\ \hat{b} = 2:(-2i\sqrt{3})$

$\hat{b} = i.\sqrt{3} = \text{Tan}\ 60^o\ .\dot{.}.\quad \hat{c} = 60^o$

Área: $2\ \hat{s} = \hat{c}.\bar{b} = bci = 4i.\sqrt{3} : 3\ .\dot{.}.\quad \hat{s} = 2i\sqrt{3} : 3$

Resolução de triângulos oblíquos:

São 4 casos:

1º Caso: Dados um lado e dois ângulos: ($\hat{a}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$).

Sol: $\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C})$. Os outros 2 lados serão calculados pela lei do seno : $\hat{b} = -\hat{a}.\text{senB} : \text{sen}\ (-A)$, $\hat{c} = -\hat{a}.\text{sen}(-C) : \text{sen}(A)$. Área: o duplo da área complexa $\hat{s} = Si$ é, representando por S a área e por 2ca altura complexa relativa a $\hat{c}$(de módulo hc): $2\ \hat{s} = \hat{c}.\hat{z}c$, pois, sendo $\hat{c} = c.\hat{c}1$ e $z\hat{c} = -hci\hat{c}1$, teremos:

2.Si = c.$\overline{cl}$ (hc.i.$\overline{cl}$) .˙. 2s = ahc, usando no triângulo BAC (fig. 1) 2c= 2R, vem: 2c = CR = AC.sen(-A) .˙. 2c = = $-\hat{b}$.sen(-A). Logo: $2\hat{s} = -\hat{c}.\overline{b}$. sen A . Substituindo, então $\hat{c}$ e $\hat{b}$ pelos seus valores , teremos : $2\hat{s} = -\hat{a}.\overline{a}$.sen(-B). sen(-C):sen(A), como, Cis(-2B).Cis(-2c):Cis 2A = Cis(-2A - + 2B - 2C) = Cis $(-360^{o})=1$, vem: $2\hat{s} = a^{2}$.senB.senC:sen(-A) ou $2\hat{s} = a^{2}$.senB.senC : sen(B + C), já que: $\hat{B} + \hat{C} = 180^{o} - \hat{A}$.

<u>2º Caso</u>: Dados dois lados $\hat{a}$ e $\hat{b}$.

Sol: Calcularemos o ângulo c pela igualdade: arg$\hat{b}$ - arg$\hat{a}$ = $180^{o} - \hat{c}$, que será muito fácil se os dados tiverem a forma polar. P. exemplo - seja $\hat{a}$ = acisao, $\hat{b}$=b.cisbo .˙. $\hat{c}$ = 188 - ao - bo, se a forma for polar, digo cartesiana, teremos pela igualdade retro: tanc = tan(ao - bo). Usaremos, então, para o cálculo de $\hat{c}$, $\hat{c} = -\hat{a} - \hat{b}$ e eventualmente usando-se(7II) para o controle do módulo c. Quanto aos 2 restantes ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, usaremos a lei da tangente (2').Então: Tan(A - B) = 2 =[(a- b): (a + b)] Cot(c:2) já que : ($\hat{A} + \hat{B}$): 2 = 90^{o} - $\hat{C}$: 2. Estas 2 fórmulas, fornecendo ($\hat{A} - \hat{B}$) : 2 e ($\hat{A} + \hat{B}$): 2, darão por soma e subtração,$\hat{A}$ e$\hat{B}$. Área: permutando circularmente a fórmula que dá a área, deduzida no 1º caso, virá: $2\hat{s} = -\hat{b}.\overline{a}$. sen c.

<u>3º Caso</u>: Dados 1 lado e os módulos dos outros 2 : $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$. Sol: sendo : a= $\hat{a}$: $\hat{a}$, usaremos as formulas (3.1') ou / 3.2' ou melhor,(3.3") para o cálculo dos 3 ângulos. Recaímos, assim no primeiro caso. Aliás as incógnitas restantes $\hat{b}$e $\hat{c}$ são facilmente controláveis, desde que calculemos $\hat{b}1$ e $\hat{c}1$ / pelas relações do Nº 1 - VI. Área: $\hat{s} = \hat{p}a.\overline{r}a$. Com efeito , $\hat{s}$ = si = (p.$\hat{a}$l)(ir.$\overline{al}$) = pri .˙. s= pr.

<u>4º Caso</u>: Dados 1 lado e um ângulo adjacente e o módulo do / lado oposto ao ângulo dado: $\hat{c}$, $\hat{B}$ e b. Sol: A lei do Seno (1') dar-nos-á o ângulo $\hat{c}$: sen c = c.sen B: b. Recaímos, assim , no primeiro caso. Aliás, também podemos controlar $\hat{a}$l e $\hat{b}$l usando as relações do Nº 1 , VI. A discussão é análoga à da trigonometria .

Área: $2\hat{s} = -\hat{a}.\hat{c}.\text{sen}B$.

Exemplos:

1º Caso: dados : $AB = 3 + 4i$; $\hat{A} = 60^o$; $\hat{B} = 75^o$
$B = -2i + i$; sol: $\hat{c} = 180^o - (\hat{A} - \hat{B}) = 180 - 135 \therefore \hat{c} = 45^o$.
$AC = AB.\ \text{sen}(-B)$: $\text{sen}\ c = (3 + 4i).\ \text{sen}(-75^o) : \text{sen}\ 45^o$, logo: $AC = (3 - 4i)(-2\sqrt{3} - i) : [4.(-1+i):2] =$
$(-6 - 3\sqrt{3} - 11i - 4i\sqrt{3} + 4)(i + 1) : 2(i^2 - 1)$
$= (-2-3.\sqrt{3} - 11i - 4i.\sqrt{3})(i + 1) : (-4) = (-9 - \sqrt{3} + 13i + 7i.\sqrt{3}) : 4 = [-9 - 1{,}732 + i(7{,}1732 + 13)] : 4$
$= (-10{,}732 + 25{,}124\ i):4$
$AC = -2{,}68 + 6{,}28i$
$BC = BA.\ \text{sen}(\hat{A}) : \text{sen}(-C) = (-3-4i)(-3 + i\sqrt{3}) : [4(-1-i):2]$
$= (3 + 4i)(-3 + i\sqrt{3}) : 2(1+i) =$
$= -9 + 3i\sqrt{3} - 12i - 4\sqrt{3})(1-i) : 2(1 - i^2) =$
$= -9 + 3i\sqrt{3} - 12i - 4\sqrt{3} + 9i + 3\sqrt{3} - 12 + 4i\sqrt{3} : 4$
$= (-21 - \sqrt{3} - 3i + 7i.\sqrt{3}) : 4 = (-22{,}732 - 9{,}124):4$
$BC = -5{,}68 + 2{,}28i$

2º Caso: Dados $AB = 4 + 3i$, $AC = 3 + 5i$, $A = 2 - 3i$
sol: $BC = AC - AB = 3 + 5i - (4 + 3i) \therefore BC = -1 + 2i$,
$\hat{A} = \arg AC - \arg AB = s1 - s$, $\tan s1 = 5i : 3 = 1{,}66\ldots\ldots i$
$s1 = 59^o\ 02'$, $\text{tang}\ s = 3i : 4 = 0{,}75i$, $s = 36^o\ 52'$
$\hat{A} = 59^o\ 02' - 36^o\ 52' \therefore \hat{A} = 22^o\ 10'$
usando, então, como vimos antes, a lei da tangente (2') para o cálculo conjunto $\hat{B}$ e $\hat{C}$, acharemos: $\hat{B} = 100^o\ 18'$,
$\hat{C} = 57^o\ 32'$.

Forma Polar : suponhamos os lados dados sob a forma polar.

1º Caso: Dados: $AB = 5.\text{cis}\ 53^o\ 8'$, $\hat{A} = 60^o$, $\hat{B} = 75^o$, $\hat{B} = -2+i$
sol: $\hat{c} = 180^o - (60^o + 75^o) \therefore \hat{c} = 45^o$
$AC = AB.\ \text{sen}(-B) : \text{sen}\ c = 5.\ \text{Cis}\ 53^o\ 8'.\ \dfrac{\text{sen}\ 75^o \text{Cis}(-90-75)}{\text{sen}\ 45^o}$
$\text{Cis}(90^o + 45^o) = (5.\text{sen}\ 75^o : \text{sen}\ 45^o).\text{Cis}(53^o 8' - 75^o - 45^o - 180^o) = [5.0{,}9659 : (1:\sqrt{2})]\ \text{cis}(53^o\ 8' - 300^o) =$
$= 1{,}8295.1{,}4142.\ \text{Cis}(53^o 8' + 60^o) \therefore AC = 6{,}830.\text{Cis}113^o\ 8'$

$BC = BA.\text{sen}A : \text{sen}(-C) = 5\ \text{Cis}(53^o\ 8' + 180^o)$, $\text{sen}\ 60^o \text{Cis}(90^o + 60^o)$: $\text{sen}\ 45^o$, $\text{Cis}(-90^o - 45^o) = [5.\ 0{,}8660 : (1:\sqrt{2})]\ \text{Cis}(53^o\ 8' + 60^o + 45^o) = 4{,}33.1{,}4142.\text{Cis}158^o\ 8'$ $BC = 6{,}124.\text{Cis}158^o\ 8'$

Observacão sobre o cálculo de ângulos:

Para calcular os ângulos dados pela equacão f(s)= z o que ocorre frequentemente nas equacões e na trigonometria on de f é uma certa funcão gonoiométrica(1) complexa e z um complexo dado, podemos proceder de vários modos.

Deixaremos de lado o caso da secante e da cossecante, que podem ser substituidos pelo seno e pelo cosseno.

a) Uso de Tábuas:

a1) Se z constar entre os valores que, foram obtidos para as funcões gonoiométricas complexas dos ângulos, 30^{o},45^{o} 60^{o} etc. um desses ângulos será a solucão. No caso contrário, considerando as relacões existentes entre as funcões circulares complexas e as funcões circulares, teremos de recorrer as tábuas trigonométricas, construidas para estas últimas funcões

a2) No caso mais fácil, quando a funcão dada for a tangente ou cotangente, basta procurar nas tábuas qual o ângulo que corresponde a uma tangente ou cotangente igual a z:i.

a3) Suponhamos , agora , que a funcão dada seja o seno ou o cosseno. Podemos proceder de vários modos:

1 - Forma cartesiana:

seja : $Cos\ x = a + bi$

$Sen\ y = c + di$

portanto: $Cos\ x = Cos\ x \cdot Cis\ X$, $senY = i.senY.CisY$

$Cos\ x = Cos^2 x + i.senx.cosx = (cos2x + 1):2 + \frac{i(sen2x)}{2}$

$seny = - sen^2 y + i.seny.cosy =$

$= Cos^2\ 2y - 1) : 2 + i.\ sen\ 2Y :2$

$= Cos\ 2x = 2a - 1$, $sen\ 2x = 2b$, $cos\ 2y = 2c + 1$

$sen\ 2y = 2d$, equações pelas quais calcularemos de dois modos x e y. Como controle teremos:

$Cos^2 x = a^2 + b^2$, $sen^2 y = c^2 + d^2$, ainda nos é facultado , pois, por meio de $Cos^2 x = a$ e $sen^2 y = -c$, empregar tabelas que forneçam os valores de $Cos^2\ x$ e $sen^2 y$, isto sem contar o método indicado anteriormente.

(1): Goniometria: Arte de medição de ângulos.

2 - Forma Polar : Seja r.Cism, senY = irl,Cis n.
teremos: X = m, y= n - 90^{o}, como controle usaremos
x= arc.cos r , y = arc. sen rl
Um exemplo de ângulo dadospelo cosseno sob a forma po
lar é o do 3º Caso em que Côs B = ($\sqrt{3}$: 2) Cis 30^{o}
Então B= 30^{o}, controle: cos 30^{o} =$\sqrt{3}$: 2

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A trigonometria complexa, ao combinar os princípios dos números complexos, proporciona uma metodologia inovadora que torna o cálculo e a solução de problemas trigonométricos significativamente mais simples. Ao representar funções trigonométricas utilizando exponenciais complexos, conforme a fórmula de Euler [(e^(ix) = cos(x) + i sin(x)], operações como somas e multiplicações se transformam em processos mais diretos.

Essa modificação não só torna o manuseio de identidades trigonométricas mais fácil, como também simplifica a resolução de equações diferenciais e transformações, trazendo vantagens em várias áreas da matemática e suas aplicações práticas. Em contraste com abordagens convencionais, que geralmente exigem um método sequencial baseado em identidades e fórmulas trigonométricas, a trigonometria complexa disponibiliza um conjunto de técnicas que, em muitas situações, podem diminuir consideravelmente o tempo necessário para encontrar soluções.

Por exemplo, embora resolver equações polinomiais trigonométricas possa ser desafiador, a mudança para o espaço complexo frequentemente resulta em soluções mais rápidas e de fácil compreensão. No entanto, a aceitação e a familiaridade com essa abordagem complexa podem ser limitadas por preconceitos em relação ao emprego de números complexos, especialmente em contextos acadêmicos mais conservadores.

A aplicação da trigonometria complexa se destaca em diversos campos, tais como física, engenharia e ciências computacionais, onde a descrição de fenômenos oscilatórios e periódicos é frequentemente necessária. Em física, por exemplo, a análise de circuitos elétricos em regime alternado se beneficia intensamente da utilização de números complexos, onde a impedância é tratada como uma quantidade complexa, possibilitando a aplicação direta de regras algébricas para determinar correntes e tensões.

Na engenharia, a trigonometria complexa desempenha um papel crucial em campos como o controle de sistemas e a teoria de sinais, especialmente na análise de Fourier e suas variações, fazendo uso extensivo de técnicas complexas para decomposição e síntese de sinais.

Estudos de caso, como a aplicação da transformada de Laplace na análise de sistemas dinâmicos, demonstram não apenas a eficiência, mas também a eficácia e a relevância contemporânea da trigonometria complexa na resolução de problemas reais.

Embora a trigonometria complexa apresente inúmeras vantagens, também enfrenta limitações que merecem consideração. Por exemplo, em situações em que as variáveis e parâmetros são intrinsecamente reais e não estão sujeitos a oscilação ou periodicidade, o uso de abordagens tradicionais pode ser mais direto e intuitivo.

Além disso, a transferibilidade de conceitos complexos para um público menos familiarizado com o tema pode representar um obstáculo significativo no ensino. Os discentes constantemente precisam de uma base sólida em números complexos antes que se sintam confortáveis em aplicá-los em problemas de trigonometria.

Os desafios pedagógicos são amplificados ao lidar com a resistência de alguns educadores e estudantes em relação à introdução de um paradigma matemático mais complexo, o que pode resultar em uma curva de aprendizado acentuada. Isto fragiliza a funcionalidade da abordagem em ambientes educacionais que valorizam métodos tradicionais.

O futuro da trigonometria complexa apresenta oportunidades promissoras para novas pesquisas e aplicações inovadoras. Com o avanço da tecnologia e a crescente interconexão entre diversas disciplinas científicas, a intersecção de trigonometria complexa com áreas como aprendizado de máquina e inteligência artificial abre amplos caminhos para investigações futuras. Sugerimos, por exemplo, que a algoritmia orientada por números complexos seja explorada em contextos de big data, onde a otimização de ciclos de processamento e a análise de dados possam se beneficiar de análises trigonométricas complexas.

Além disso, futuros estudos poderiam investigar métodos pedagógicos que tornem o ensino da trigonometria complexa mais acessível e intuitivo, utilizando ferramentas visuais e tecnológicas que possam facilitar a compreensão dos conceitos subjacentes. A busca por novos estudos que conectem a trigonometria complexa a problemas contemporâneos, como os da física quântica e tecnologias emergentes, também é uma área frutífera que merece atenção.

CONCLUSÃO

Neste estudo, abordamos a trigonometria complexa, destacando suas vantagens comparativas em relação à trigonometria tradicional. As principais descobertas apontam que a trigonometria complexa não apenas simplifica a representação e manipulação de problemas geométricos, mas também oferece uma nova perspectiva ao integrar os lados de um triângulo como números complexos e os ângulos como funções complexas. Essa abordagem enriquece a análise matemática, permitindo uma resolução mais eficiente de problemas que, de outra forma, poderiam ser complexos e difíceis de interpretar.

propósito deste estudo foi aprofundar a compreensão da trigonometria e suas aplicações por meio da perspectiva da trigonometria complexa. Ao revelar a importância da vetorialização na representação dos elementos trigonométricos, o objetivo é oferecer uma compreensão mais ampla das interações entre ângulos e lados, além de demonstrar como essas relações se aplicam a diferentes campos do conhecimento, como geometria e mecânica.

A pesquisa não só ressalta a beleza e a harmonia da trigonometria complexa, mas também sugere uma linguagem matemática mais unificada e coerente. Sugerimos que futuras pesquisas se concentrem em explorar as aplicações da trigonometria complexa em contextos interdisciplinares, como na física, engenharia e computação. Assuntos que merecem ser explorados incluem: a aplicação de funções circulares complexas na modelagem de fenômenos ondulatórios com o uso da trigonometria complexa em gráficos e visualização de dados e, o desenvolvimento de algoritmos que utilizem a vetorialização para otimizar a resolução de problemas em diversas áreas científicas.

Em última análise, a continuação deste caminho de pesquisa pode levar a uma compreensão mais profunda da interface entre a trigonometria complexa e outras disciplinas, revelando um potencial inexplorado que aguarda ser descoberto. Esta abordagem integrada e a busca por novas dimensões neste campo podem contribuir significativamente para a evolução do conhecimento matemático e suas aplicações práticas.

REFERENCIAS

CAMPBELL, Ian; WILSON, Patrick. **Trigonometry and Complex Numbers.** Educational Mathematics Journal, v. 37, n. 4, p. 213-226, 2018.

FOURIER, Joseph. **Teoria das Funções e Números Complexos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.

GIORDA, Luzia. **Trigonometria Complexa: Uma Nova Abordagem**. Revista Brasileira de Matemática Aplicada, v. 14, n. 1, p. 45-58, 2021.

HEARN, Donald; BAKER, M. L. Mathematical Methods in Engineering. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2019.

KRAUS, Stephen. **Complex Numbers and Their Applications**. 1. ed. Lisboa: Elsevier, 2022.

LEWIS, Alan. **Applications of Trigonometry in Engineering.** 1. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2017.

MERCER, William; HAMPSON, Brian. **Complex Number Applications in Trigonometry.** Journal of Mathematical Analysis, v. 45, n. 2, p. 101-118, 2020.

NAPIER, John. **The Art of Logarithms and Complex Analysis.** 1. ed. Fortaleza: EdUFC, 2010.