CAPÍTULO 14

ELETRODINÂMICA DE MAXWELL NO ARCABOUÇO DA REDUÇÃO DIMENSIONAL

https://doi.org/10.22533/at.ed.89012126241114

Data de aceite: 30/09/2025

Roemir Peres Machado Moreira
Centro Universitário FAEMA - UNIFAEMA
Ariquemes, RO, Brasil

RESUMO: As equações de Maxwell representam a base da eletrodinâmica clássica e consolidaram a unificação entre os fenômenos elétricos e magnéticos. Entretanto, em diversos contextos da física teórica e aplicada, torna-se relevante investigar versões reduzidas dessa teoria, sobretudo quando se busca simplificação analítica ou análise de sistemas essencialmente planares. Nesse sentido, a redução dimensional apresenta-se como ferramenta eficaz para converter a formulação original em (1+3) dimensões em uma teoria efetiva em (1+2) dimensões, preservando sua essência, mas revelando novas estruturas. O objetivo deste estudo é discutir a aplicação do procedimento de redução dimensional à eletrodinâmica de Maxwell, detalhando as modificações na lagrangiana, a derivação das equações de movimento e as implicações físicas decorrentes. Como metodologia, empregou-se o formalismo lagrangiano, no qual uma coordenada espacial foi "congelada", eliminando sua dependência nos campos, o que permitiu a decomposição do quadri-potencial em um vetor bidimensional e em um campo escalar adicional. Os resultados obtidos indicam que a teoria reduzida mantém a coerência interna da formulação original, mas apresenta características próprias, como a ausência de uma lei de Gauss independente para o magnetismo e a emergência de um campo escalar que obedece a uma equação de onda. Dessa forma, o modelo reduzido mostra-se consistente e aplicável à investigação de fenômenos em sistemas planares.

PALAVRAS-CHAVE: Equações de Maxwell, Formalismo Lagrangiano, Redução Dimensional, Sistema Planar.

INTRODUÇÃO

As equações de Maxwell constituem o alicerce teórico da eletrodinâmica clássica e representam um dos marcos mais importantes da física moderna. Formuladas por James Clerk Maxwell em meados do século XIX, elas sintetizam em um sistema de equações diferenciais o conjunto de leis experimentais que descrevem os fenômenos elétricos e magnéticos, unificando-os sob uma estrutura matemática coerente. A partir de sua formulação original em quatro dimensões espaço-temporais (1+3), tornou-se possível compreender a propagação das ondas eletromagnéticas, a interação entre campos e cargas, bem como estabelecer a base conceitual para o desenvolvimento de teorias mais avançadas, incluindo a eletrodinâmica quântica e a teoria quântica de campos (Jackson, 1999; Griffiths, 2012).

Entretanto, em diferentes contextos físicos e matemáticos, torna-se relevante analisar versões reduzidas dessa teoria, particularmente quando se busca simplificação formal ou a investigação de fenômenos restritos a sistemas planares. O cenário da redução dimensional emerge, nesse sentido, como uma ferramenta poderosa para converter uma teoria em (1+3) dimensões em uma formulação efetiva em (1+2) dimensões, preservando os aspectos essenciais da dinâmica original, mas com menor complexidade analítica.

A aplicação desse procedimento à teoria de Maxwell permite não apenas recuperar a estrutura fundamental das equações do eletromagnetismo em duas dimensões, mas também identificar o surgimento de novos elementos teóricos, como o aparecimento de um campo escalar associado à dimensão “congelada”. Tal característica amplia a interpretação da teoria reduzida, ao mesmo tempo em que revela diferenças estruturais em relação à formulação tridimensional, como a ausência de um análogo independente da lei de Gauss para o campo magnético.

Nesse contexto, o presente trabalho tem como propósito discutir a implementação da redução dimensional na eletrodinâmica de Maxwell, detalhando sua sistematização, a modificação da lagrangiana, as equações de movimento decorrentes e as implicações físicas que emergem do novo arranjo teórico.

SISTEMATIZAÇÃO DA REDUÇÃO DIMENSIONAL

A implementação de um ferramental matemático como o da redução dimensional em teorias formuladas em (1+3) dimensões para teorias em (1+2) dimensões, concede a perspectiva de simplificação analítica e computacional, mantendo-se, contudo, as propriedades físicas e matemáticas mais relevantes do sistema em estudo. Em alguns contextos, a transição de (1+3) dimensões para (1+2) dimensões permite identificar simetrias ocultas, reduzir o número de graus de liberdade e facilitar a obtenção de soluções exatas ou aproximadas. Além disso, a análise em sistemas planares serve como um laboratório conceitual para compreender fenômenos complexos em dimensões superiores, possibilitando a verificação de hipóteses, a validação de modelos e a construção de analogias que auxiliam na interpretação física. Essa abordagem é amplamente empregada em áreas como física da matéria condensada, teoria de campos e sistemas dinâmicos, onde modelos em (1+2) dimensões preservam aspectos essenciais do comportamento em

(1+3) dimensões, ao mesmo tempo em que reduzem significativamente a complexidade matemática envolvida (Belich *et al*, 2004).

O procedimento de conversão de teorias em dimensões superiores para sistemas planares, consiste em "congelar" uma componente espacial das demais. Por convenção, adota-se para exclusão a terceira componente espacial (eixo-z). Em tal método, é requerido que os campos da teoria, , anulem suas dependências em função desta coordenada, conduzindo a uma separação desta componente das demais pertencentes ao 4-vetor. Esta condição é vertida na expressão (Belich *et al*, 2005),

$$\partial_3 \chi \to 0, \qquad (1)$$

onde x representa um campo genérico definido em (1+2) dimensões. Desta forma, com esta imposição, fica assegurado que nenhuma variável do sistema exibirá uma dependência em relação à componente que está sendo extirpada do sistema.

A LAGRANGIANA DE MAXWELL

Com a premissa de descrever o comportamento da teoria de Maxwell sob a óptica da redução dimensional, toma-se como ponto de partida a lagrangiana representativa da teoria de Maxwell em (1+3) dimensões (Casana *et al*, 2011),

$$L = -\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - A_{\hat{\mu}} J^{\hat{\mu}}, \qquad (2)$$

sendo $F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}} A_{\hat{\mu}}$, e os índices gregos com chapéu assumem valores que variam de 0 a 3. Diante da condição arbitrada pela eq. (1), o quadri-potencial do campo eletromagnético, comportar-se-á como

$$A^{\hat{\mu}} \to (A^{\mu}; \varphi), \qquad (3)$$

de forma que $A^{(3)} = \varphi$ é agora um campo escalar, já os índices gregos sem chapéu passam a variar de 0 a 2. Por conseguinte, o quadri-potencial ficará externado como:

$$A^{\hat{\mu}} = (A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}; \varphi).$$

A mesma metodologia pode ser aplicada nos demais quadri-vetores que compõe o interesse, por exemplo, o 4-vetor corrente:

$$J^{\hat{\mu}} = (J^{\mu}; J),$$

em que J opera como fonte do campo escalar φ. Posto o cenário, será aplicado o mecanismo matemático da redução dimensional sobre a lagrangiana do campo eletromagnético, eq. (2), com isso, o termo cinético fica:

$$F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = F_{\mu\hat{\nu}}F^{\mu\hat{\nu}} + F_{3\nu}F^{3\nu} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu 3}F^{\mu 3} + F_{3\nu}F^{3\nu}$$
$$F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2F_{\mu 3}F^{\mu 3}. \quad (4)$$

Visto que

$$F^{\mu 3} = \partial^{\mu}A^{(3)} - \partial^{3}A^{\mu} = \partial^{\mu}\varphi,$$
$$F_{\mu 3} = \partial_{\mu}A_{(3)} = -\partial_{\mu}\varphi,$$

conduzindo para

$$F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\partial_{\mu}\varphi\,\partial^{\mu}\varphi,$$

que subsequentemente permite escrever

$$-\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi. \quad (5)$$

Seguindo o mesmo roteiro para o termo da 4-vetor corrente, este toma a forma:

$$A_{\hat{\mu}}J^{\hat{\mu}} = A_{\mu}J^{\mu} - \varphi J.$$

Portanto, a lagrangiana estabelecida em (1+3) dimensões, converte-se na seguinte lagrangiana reduzida em (1+2) dimensões:

$$L_{1+2} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\,\partial^{\mu}\varphi - A_{\mu}J^{\mu} + \varphi J, \quad (6)$$

sendo que a mesma, agora, passa a ser composta pela eletrodinâmica usual de Maxwell e por um setor escalar.

EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DA TEORIA

Uma vez incorporado o efeito do mecanismo de redução dimensional na lagrangiana do campo eletromagnético, a análise pode ser conduzida a partir do estudo do comportamento das equações de movimento resultantes desse procedimento. Para tal investigação, adota-se como referência o formalismo da equação de Euler–Lagrange, que orienta a derivação consistente das dinâmicas envolvidas (Casana *et al*, 2012). Assim,

$$\partial_{\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}\right) - \frac{\partial L}{\partial A_{\nu}} = 0, \quad (7)$$

que aplicada na eq. (6), proporciona o resultado

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = J^{\nu}. \quad (8)$$

Expandindo a eq. (8), em função das componentes e, tomando como princípio a componente temporal ($\partial_i F^{i0} = J^0$), resulta na correspondente lei de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho. \tag{9}$$

Por outro lado, externando a eq. (8), em função das componentes espaciais ($\partial_0 F^{0k} + \partial_i F^{ik} = J^k$), leva à lei de Àmpere

$$-\partial_t E^k + \epsilon^{ki} \partial_i B = J^k, \tag{10}$$

$$\vec{\nabla}^* B - \partial_t \vec{E} = \vec{J}, \tag{11}$$

de forma que $\nabla^{*k} = \epsilon^{ki} \partial_i$, corresponde ao gradiente dual, e as eqs. (10) e (11), representam as equações inomogêneas da teoria reduzida. Semelhantemente ao caso em (1+3) dimensões, estas equações satisfazem a equação da continuidade

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{12}$$

Ao se fazer uso do dual do tensor do campo eletromagnético em (1+2) dimensões, torna-se possível obter mais uma equação de Maxwell, para tanto adota-se

$$\overline{F}^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\nu\alpha}, \tag{13}$$

de modo que em função das componentes espaciais e temporal, fica:

$$\overline{F}^0 = \frac{1}{2} \epsilon^{0ij} F_{ij} = F_{12} = -B$$

$$\overline{F}^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ij0} F_{j0} = -\epsilon^{ij} E^j$$

que por sua vez, conduz para

$$\overline{F}^\mu = \left(-B, -\vec{E}^*\right), \tag{14}$$

sendo $\vec{E}^*$ o campo elétrico dual. Já a próxima equação de Maxwell é originada a partir da identidade de Bianchi,

$$\partial_\mu \overline{F}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\mu F_{\nu\alpha} = 0, \tag{15}$$

de maneira que ao tomar

$$\partial_t \overline{F}^0 + \partial_i \overline{F}^i = \partial_t(-B) + \partial_i(-\epsilon^{ij} E^j) = 0,$$

permite, assim, escrever a equação de Faraday,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t B = 0. \tag{16}$$

No processo de redução dimensional, observa-se o surgimento de um campo escalar adicional no modelo efetivo em duas dimensões. Esse campo emerge naturalmente da compactificação das variáveis associadas à dimensão suprimida e desempenha papel fundamental na nova formulação teórica. A dinâmica desse campo escalar é determinada pela aplicação do formalismo variacional, de modo que sua equação de movimento é obtida a partir da equação de Euler–Lagrange, assegurando a consistência entre a redução dimensional e a descrição lagrangiana do sistema. Desta forma, atuando a equação de Euler-Lagrange para o campo escalar,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\,, \tag{17}$$

concede a expressão

$$\Box\, \varphi = J\,, \tag{18}$$

em que $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$ é o operador D' Alambertiano. A equação de onda obtida para o campo escalar mostra-se consistente com a descrição do potencial escalar originado no processo de redução dimensional, assegurando a preservação da coerência matemática da teoria. Esse resultado evidencia que o potencial escalar desempenha um papel ativo na formulação reduzida, passando a integrar de maneira efetiva a dinâmica do sistema. Como consequência, a estrutura da teoria em dimensões inferiores não se limita apenas a uma simplificação formal, mas revela um novo arranjo dinâmico governado por um conjunto de quatro equações diferenciais. Essas equações correspondem às equações de Maxwell adaptadas ao contexto da eletrodinâmica reduzida, garantindo que a essência dos princípios fundamentais seja mantida, ainda que sob um novo regime dimensional.

No grupo de equações resultantes da redução dimensional, nota-se a ausência da lei de Gauss para o campo magnético, a qual, em (1+3) dimensões, é expressa por $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Ao se considerar o análogo em (1+2) dimensões, verifica-se que a divergência do campo magnético é identicamente nula de maneira trivial. Isso decorre do fato de que o campo magnético em duas dimensões não se apresenta como um vetor tridimensional, mas como um campo escalar que pode ser interpretado como a componente perpendicular ao plano no qual a teoria está definida. Dessa forma, a operação divergente aplicada a esse campo resulta apenas no termo $\partial_3 B^3$, o qual, de acordo com a prescrição estabelecida na eq. (1), é necessariamente nulo.

Essa particularidade revela uma diferença estrutural importante entre a eletrodinâmica em três e em duas dimensões. Enquanto em (1+3) dimensões a lei de Gauss magnética garante a inexistência de monopolos magnéticos e constitui uma restrição fundamental da teoria, no caso planar essa equação torna-se redundante, uma vez que sua validade é automática. Assim, na formulação bidimensional das equações de Maxwell, o análogo da lei de Gauss magnética não precisa ser incluído explicitamente, pois sua condição já está incorporada na própria definição do campo magnético escalar. Em termos físicos, isso significa que, no regime reduzido, a dinâmica eletromagnética mantém coerência interna sem necessitar dessa lei como equação independente, reforçando o caráter simplificado e ao mesmo tempo consistente da teoria em dimensões mais baixas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise da redução dimensional aplicada à eletrodinâmica de Maxwell permitiu compreender de maneira clara como uma teoria formulada em quatro dimensões pode ser reinterpretada em um cenário planar. A preservação das principais estruturas matemáticas e físicas do modelo original demonstra a robustez do procedimento, que não apenas simplifica o formalismo, mas também mantém a essência dos fenômenos eletromagnéticos.

Um dos aspectos mais relevantes da investigação é o surgimento do campo escalar associado à dimensão "congelada". Esse elemento adiciona riqueza à formulação teórica, revelando novas possibilidades de interpretação e demonstrando que a redução dimensional vai além da mera supressão de coordenadas, constituindo-se como um recurso de ampliação do escopo conceitual da teoria.

Outro ponto importante refere-se à ausência de uma lei de Gauss independente para o campo magnético no contexto bidimensional. Esse resultado, embora esperado pela natureza escalar do campo magnético em (1+2) dimensões, ressalta as diferenças estruturais entre os regimes dimensionais e ajuda a consolidar a compreensão de como certas leis fundamentais se adaptam a diferentes contextos geométricos.

Por fim, o estudo confirma que a eletrodinâmica reduzida mantém coerência interna, consistência matemática e aplicabilidade em diferentes áreas da física teórica e aplicada. Ao fornecer um modelo mais simples e, ao mesmo tempo, rico em implicações, a redução dimensional se estabelece como ferramenta indispensável para a investigação de fenômenos em sistemas planares, oferecendo suporte tanto ao desenvolvimento de teorias quanto à análise de experimentos em escala reduzida.

REFERÊNCIAS

BELICH, H.; FERREIRA JR, M.M.; HELAYEL-NETO, J.A.; ORLANDO, M.T.D. Dimensional reduction of a Lorentz- and *CPT*-violating Maxwell-Chern-Simons model, **Phys. Rev. D**, n. 67, 2003; Erratum-ibid., **Phys. Rev. D**, n. 69, 2004.

BELICH, H.; FERREIRA JR, M.M.; HELAYEL-NETO, J.A. Dimensional Reduction of the Abelian-Higgs Carroll-Field-Jackiw Model, **Eur. Phys. J. C**, n. 38, p. 511-519, 2005;

CASANA, R.; FERREIRA JR., M. M.; CARVALHO, E. S. Dimensional reduction of the CPT-even electromagnetic sector of the standard model extension, **Phys.Rev.D**, n. 84, 2011;

CASANA, R.; FERREIRA JR., M. M.; MOREIRA, R. P. M. Aspects of a planar nonbirefringent and CPT-even electrodynamics stemming from the standard model extension, **Phys. Rev. D**, n. 84, 2011;

CASANA, R.; FERREIRA JR., M. M.; MOREIRA, R. P. M. Consistency analysis of a nonbirefringent Lorentz-violating planar model, **Eur. Phys. J. C**, n. 72, 2012;

GRIFFITHS, David J. **Eletrodinâmica.** 4. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012;

JACKSON, John David. **Classical Electrodynamics**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.